

Моделювання однієї оберненої задачі Стефана

О. Б. Кобильська, В. П. Ляшенко

*Кременчуцький державний політехнічний університет
ім. Михайла Остроградського, Україна*

This work is devoted the decision of reverse task for a heat equalization conductivity in an area with a variable border. The basic parameter of management of the temperature field of locomotive environment is certain. A task is decided in the cylindrical system of coordinates. The temperature distributing is determined in an environment where the length is variable and at which terms the temperature distributing will be set.

1. Загальна постановка питання і його актуальність

У порошковій металургії виробництво стрижнів та дроту із тугоплавких металів, наприклад вольфраму, відбувається одночасно з підігрівання металу [1]. Це викликано тим, що більшість тугоплавких металів не деформується при кімнатній температурі. Перед пластичною деформацією дріт, що рухається через зону нагрівання довжиною $\xi(T) = L - v(t)t$ зі швидкістю $v(t) \neq 0$, розігрівається електричним струмом I_0 до технологічної температури T_l , а потім потрапляє у пристрій для деформування. При цьому до одного кінця зони нагрівання підведений нерухомий струмопідвід, а до іншого рухомий.

Розглянемо дріт у вигляді рухомого ізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками, що рухається через зону нагрівання зі швидкістю $v(t) \neq 0$. Проблема керування температурним полем, полягає у

визначенні потужності джерел тепла $w(T, t) = \frac{I(t)^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ коли зона

нагрівання весь час зменшується та прямує до нуля, а температура в зоні нагрівання повинна залишатися сталою. Тому для підтримки сталого значення температури необхідно керувати основним параметром $w(T, t)$ - силою струму $I(t)$. Такого типу задачу можна віднести до задачі Стефана з рухомою межею без зміни фазового стану середовища.

2. Витоки дослідження авторів

Задачам Стефана, де досліджується зміна фазового стану на межі двох нерухомих середовищ присвячено багато робіт [2], [4]. Для рухомих середовищ такого типу задачі зустрічаються рідко.

3. Нерозв'язані питання і мета роботи

Задача керування полягає у визначенні функції $w(T, t)$ у циліндричній області Ω , та умов при яких температура у кінці зони нагрівання буде сталою.

Метою роботи є визначення параметрів керування температурним полем у зоні нагрівання, довжина якої є змінною величиною $\xi(t) = L - v(t)\Delta t, 0 < t < t_0$.

4. Використовуваний метод і його програмна реалізація

Для визначення температурного поля розглядається задача для лінійного рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат (r, φ, z) у області $\Omega: \{0 < z < \xi(t), 0 < r < r_0, 0 < t < t_0\}$. Зважаючи на фізичну природу джерел тепла $w(T, t)$ та симетрію поля по φ маємо задачу

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -w(T, t) \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (2)$$

$$T(r, 0, t) = T_0, T(r, \xi(t), t) = T_l \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0, z, t)}{\partial r} = -\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4), \quad \frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

де $-\lambda, c, \rho_0, \rho_n, \varepsilon$ - теплофізичні характеристики циліндра, T_c - температура навколишнього середовища, σ - стала Стефана - Больцмана, $v(t)$ - швидкість руху циліндра через зону нагрівання. На проміжку часу $t \in (0, t_1)$ циліндр рухається зі сталою швидкістю v через зону довжиною L , а на проміжку часу $\Delta t = t_0 - t_1$ зі змінною швидкістю $v(t)$ і довжина зони нагрівання зменшується до нуля. Час Δt визначається із умови $L - v(t)\Delta t = 0$. Функції $w(T, t), v(t) \in C^1$ - неперервні додатно визначені.

Температурне поле циліндра є змінною величиною, що залежить від параметра $I(t)$. З математичної точки зору визначення цього параметра приводить до розв'язання оберненої задачі до задачі (1)-(4). Для визначення параметра $I(t)$ необхідно знати температурний розподіл у зоні нагрівання.

5. План і хід розв'язку задачі

Якщо температурний розподіл уздовж радіуса циліндра не суттєвий, то можна перейти до розгляду усередненого, по радіусу, температурного поля. При цьому враховується теплообмін поверхні з навколишнім середовищем.

Застосувавши до рівняння (1) оператор усереднення

$$u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t) r dr \quad (5)$$

та врахувавши умови теплообміну на границі області (4) отримаємо задачу

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t)c\rho_n \frac{\partial u}{\partial z} + u \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} - \frac{2\alpha}{r_0} \right) + \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha}{r_0} T_c - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} (u^4 - T_c^4) = c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6)$$

$$0 < z < \xi(t) = L - v(t)t, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

$$u(z, 0) = T_0 \quad (7)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(\xi(t), t) = T_l \quad (8)$$

Розв'язок задачі шукаємо у два етапи. Спершу розв'язується задача (6)-(8) при умові $v(t) = v = \text{const}$, $\xi(t) = L = \text{const}$ та визначається параметр I_0 , що дозволяє підтримувати у кінці зони нагрівання рухомого середовища температуру T_l . Потім, вважаючи, що температурний розподіл у зоні нагрівання відомий розв'язується обернена задача та визначається параметр $I(t)$, необхідний для досягнення температури T_l коли довжина зони нагрівання зменшується за законом $0 < z < \xi(t) = L - v(t)\Delta t$ і прямує до нуля.

1-ий етап. Розглянемо спрощення задачі (6)-(8), котре при певних обмеженнях дозволяє отримати аналітичний розв'язок. Знехтувавши перерозподілом тепла у зоні нагрівання за рахунок теплопровідності, та втратами тепла за рахунок випромінювання маємо задачу Коші для рівняння першого порядку в частинних похідних

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t) \frac{\partial u}{\partial z} - u\psi - \chi = 0 \quad (9)$$

$$u(z, 0) = \varphi_1(z), \quad u(0, 0) = T_0 \quad (10)$$

$$\text{де } \psi = \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n} - \frac{2\alpha}{r_0 c\rho_n}, \quad \chi = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n} + \frac{2\alpha}{r_0 c\rho_n} T_c.$$

Її аналітичний розв'язок методом характеристик має вигляд

$$u(z, t) = -\frac{1}{\psi_1 (T_0 \psi_1 + \chi_1)} e^{-\psi_1 (z - \frac{kt^2}{2} + t)} - \frac{\chi_1}{\psi_1} \quad (11)$$

Тут перша з умов (10), що задає криву на інтегральній поверхні $u = u(z, t)$, визначається при умові що $v(t) = v = \text{const}$ та має вигляд

$$\varphi_1(z) = \frac{(T_0 \psi_1 + \chi_1)}{\psi_1} e^{\psi_1 z} - \frac{\chi_1}{\psi_1} \quad (12)$$

$$\text{де } \psi_1 = \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n v} - \frac{2\alpha}{r_0 c\rho_n v}, \quad \chi_1 = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n v} + \frac{2\alpha}{r_0 c\rho_n v} T_c$$

Більш точне наближення спрощеної задачі (6)-(8) можна отримати у випадку

задачі Коші для нелінійного рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t) \frac{\partial u}{\partial z} - u\psi - \chi + \mathcal{G}(u^4 - T_c^4) = 0, t > 0, 0 < z < L \quad (13)$$

$$u(z, 0) = \varphi_1(z), u(0, 0) = T_0 \quad (14)$$

$$\mathcal{G} = \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0 c \rho_n}, \psi = \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n} - \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n}, \chi = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n} + \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n} T_c.$$

Її загальний розв'язок має вигляд

$$F(z - \int v(t) dt, t - \int \frac{du}{f(u)}) = 0 \quad (15)$$

$$\text{де } f(u) = -u \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n} - \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n} \right) - \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n} - \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n} T_c + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0 c \rho_n} (u^4 - T_c^4).$$

Використавши умову (14) отримуємо поверхню $u(z, t)$. Чисельний розв'язок цієї задачі отримано методом “предиктор - коректор” [3].

Розв'язавши (11) або (12) відносно I_0 отримаємо силу струму необхідну для нагрівання циліндра довжиною L до температури T_l . Значення I_0 знайдене із розв'язку задачі (13)-(14) буде більш точним. Його отримано методом прогонки. Далі розв'язуємо чисельно обернену задачу до задачі (13)-(14), поклавши $\lambda = 0$ для $0 < t < t_0$ та визначимо параметр $I(t)$ на кожному часовому шарі.

На другому етапі замінимо в задачі (6)-(8) сталі значення сили струму I_0 знайденою функцією $I(t)$ і перейдемо до безрозмірних координат та параметрів

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - V \frac{\partial \theta}{\partial x} - b(((T_l - T_c)\theta + T_c)^4 - T_c^4) + g_1 \theta + P_0(\tau)n = Pe \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (16)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \tau < 1 \quad (17)$$

$$\theta(0, \tau) = 0, \theta(\xi(\tau), \tau) = 1 \quad (18)$$

$$\text{де } -x = \frac{z}{L}, \tau = \frac{t}{t_0}, n = \beta T_c + 1, \theta = \frac{u - T_0}{T_l - T_0}, Pe = \frac{c \rho_n L^2}{\lambda \tau_0}, g_1 = (-\mu + P_0(\tau)m),$$

$$\mu = \frac{2\alpha L^2}{\lambda r_0}, V(\tau) = \frac{v(\tau)c\rho_n L^2}{\lambda L}, Po(\tau) = \frac{I(\tau)^2 \rho_0 L^2}{\lambda(T_l - T_c)\pi^2 r_0^4},$$

$$m = \beta(T_l - T_c), b = \frac{2\varepsilon\sigma \cdot L^2}{r_0 \lambda(T_l - T_c)}.$$

Розв'язок задачі (16)-(18) шукаємо методом Рунге, який базується на дискретизації за часом.

Уведемо в області $\Omega: \{0 < x < \xi(\tau), t_1 < t < t_0\}$ рівномірну за часом сітку $\varpi_{\Delta\tau} = \{\tau_j = j\Delta\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$. На кожному часовому шарі підставляємо відповідне значення $I(\tau_j)$. Замінюємо похідну за часом різницевою похідною і поставимо у відповідність задачі (16)-(18) наступну систему диференціально-різницевих задач Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\frac{d^2\theta^j}{dx^2} - V_j \frac{d\theta^j}{dx} + g\theta^j = f(\theta^j), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \tau < 1, \quad (19)$$

$$\theta^0 = 0, \theta^j(0) = 0, \theta^j(\xi(j)) = 1, \quad (20)$$

де $f(\theta^j) = \omega + b(((T_l - T_c)\theta^j + T_c)^4 - T_c^4)$, $g = (-\mu + Pom - \frac{Pe}{\Delta\tau})$,

$$b = \frac{2\varepsilon\sigma \cdot l^2}{r_0 \lambda(T_l - T_c)}, \quad \omega = \frac{-Pe\theta^{j-1}}{\Delta\tau} - Pom.$$

Розглядаємо на кожному відрізку часу нелінійну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку відносно сіткової функції $\theta^j(x)$.

Побудуємо функцію Гріна для лінійного оператора задачі (19)-(20).

Загальний розв'язок рівняння $\frac{d^2\theta^j}{dx^2} - V_j \frac{d\theta^j}{dx} + g\theta^j = 0$ має вигляд

$\theta = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. Умову $\theta(0) = 1$ задовольняє, наприклад, розв'язок $\theta_1(x) = e^{k_1 x}$, а другу крайову умову $\theta(\xi(j)) = 1$ – розв'язок $\theta_2(x) = e^{k_2(x-\xi(j))}$. Функцію Гріна для кожної крайової задачі шукаємо у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)e^{k_1 x}, & \text{при } 0 \leq x \leq s, \\ \psi(s)e^{k_2(x-\xi(j))}, & \text{при } s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ визначаються з умов $\psi(s)e^{k_1 s} = \varphi(s)k_2 e^{k_2(x-\xi(j))}$, $\theta_1'(x)\psi(s) - \theta_2'(x)\varphi(s) = 1$.

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{e^{k_1(x-s)}}{(k_2 - k_1)}, & \text{при } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{e^{k_2(x-s)}}{(k_2 - k_1)}, & \text{при } s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Побудувавши функції Гріна $G(x, s)$, зводимо задачі (19),(20) до системи нелінійних інтегральних рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна

$$y^j(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s^j) ds = \int_0^x \frac{e^{k_1(x-s)}}{(k_2 - k_1)} f(s^j) ds + \int_x^1 \frac{e^{k_2(x-s)}}{(k_2 - k_1)} f(s^j) ds$$

де $f(x^j) = \omega + b(((T_l - T_c)\theta^j(x) + T_c)^4 - T_c^4)$.

Розв'язок кожного рівняння шукаємо методом ітерацій.

6.Обчислювальний експеримент: обґрунтування алгоритмів і реалізація

Проведені чисельні розрахунки температурних розподілів за розв'язками задач (6)-(8) та (13)-(14) для конкретних циліндричних областей. На рис.1 зображена функція, що визначає параметр $I(t)$, для підтримки необхідної температури T_l у зоні нагрівання, отримана за розрахунками оберненої задачі до задачі (13)-(14).

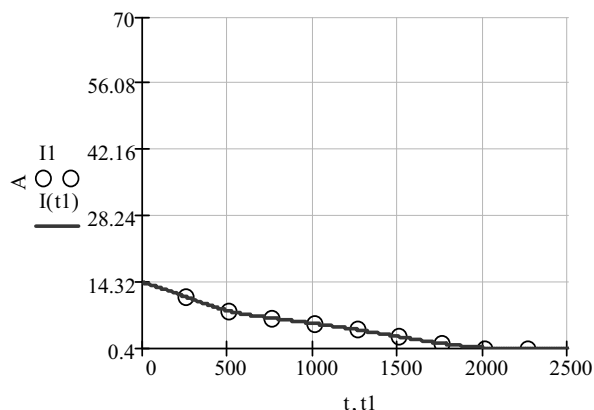


Рис. 1 Графік залежності сили струму $I(t)$ від часу для підтримки температури T_l .

Чисельні розрахунки виконані для вольфраму.

7. Висновки за результатами і напрями подальших досліджень

Отримано розв'язок математичної моделі, що описує температурний розподіл циліндричної області, довжина якої є змінною величиною $\xi(t) = L - v(t)t$,

$0 < t < t_0$ та визначено функцію $I(t)$ – параметр керування температурним полем, що дозволяє підтримувати температурне поле у стрижні сталим. Чисельні та чисельно - аналітичні розв'язки дозволяють проводити аналіз температурних розподілів для різних умов теплообміну поверхні циліндра з навколишнім середовищем.

Ця модель дозволяє враховувати перерозподіл температури за рахунок теплопровідності та втрат тепла з поверхні. Розв'язки можуть бути використані для проектування системи автоматичного контролю температури дроту та стрижнів під час термічної обробки. Усі розрахунки і графіки виконані в середовищі Mathcad.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крупин А. В. Соловьев В.Я. Пластическая деформация тугоплавких металлов М. : Металлургия 1971. 352с.
2. Березовская Л.М. Кучеренко В.И. К расчету тепловых полей в охлаждаемых струях расплава. – В кн.. Физико-технические приложения краевых задач. Киев: Наук. думка, - 1978,с. 169-176.
3. Агошкин В.И., Дубовский П.Б. Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики М.: Физматлит , 2002,320с.
4. Васильев В.И.,Максимов А.М.,Петров Е.Е.,Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Наука, физматлит, 1997, 270с.

Надійшла 31.03.2009.