

## Специфікація та параметрична ідентифікація LQ-моделей оптимального керування за даними спостережень

О. М. Назаренко, Д. В. Фільченко  
 Сумський державний університет, Україна

A problem of linear-quadratic optimal control model design has been considered. The paper is devoted to the case of three dimensional phase space with time-invariant parameters. A special attention has been focused on the matching of the identification time range with the optimization horizon. An approach to specification of the quadratic performance measure has been elaborated. The linear equation of motion and quadratic performance measure has been identified using collocation approach and multicriterion feedback controller. The optimal solution of LQ problem has been found by Pontryagin's maximum principle. Numerical experiment has been performed using real statistical data for macroeconomic dynamics.

### 1. Вступ

Багато проблем сучасного математичного моделювання зводиться до задач оптимального керування: конструювання сервомеханізмів у техніці, мінімізація енергії систем у фізиці [1], моделювання автоматичних стабілізаторів в економіці [2], тощо.

Загальна задача оптимального керування полягає в наступному. З множини допустимих фазових траєкторій  $\{\mathbf{x}(\tau)\} = \{\mathbf{x}(\tau) \in E^m \mid \tau_* \leq \tau \leq \tau_k\}$  за допомогою вибору допустимої траєкторії керування  $\{\mathbf{u}(\tau)\} = \{\mathbf{u}(\tau) \in E^r \mid \tau_* \leq \tau \leq \tau_k\}$  знайти таку фазову траєкторію, що забезпечує виконання деякої умови оптимальності (критерію якості)  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  за період часу  $[\tau_*, \tau_k]$ . Допустимість траєкторії керування визначається множиною  $U$  кусково-неперервних функцій часу, а допустимість фазової траєкторії – рівнянням руху при допустимих керуваннях. Тоді математична модель задачі динамічної оптимізації має вигляд:

$$\max_{\{\mathbf{u}(\tau)\}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{\tau_*}^{\tau_k} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau + \varphi(\mathbf{x}_k, \tau_k), \quad \{\mathbf{u}(t)\} \in U, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau), \quad \mathbf{x}(\tau_*) = \mathbf{x}_*.$$

Тут підінтегральна функція  $L(\dots)$ , термінальна функція  $\varphi(\dots)$  та вектор-функція  $\mathbf{f}(\dots)$  неперервно диференційовані за всіма аргументами.

Для розв'язання задачі (1) використовують апарат динамічного програмування або принцип максимуму Понтрягіна. Проте чисельна реалізація класичних алгоритмів часто призводить до проблем, пов'язаних зі стійкістю розв'язків і об'ємом пам'яті комп'ютера [1], а аналітичні методи часто відрізняються складністю математичного апарату [2].0

Окрім того, при розв'язанні практичних задач, особливо для слабо формалізованих динамічних систем [3, 4], функціональні форми  $L(\dots)$ ,  $\varphi(\dots)$  і  $\mathbf{f}(\dots)$  не

специфіковані, а параметри, від яких вони залежать, невідомі. У випадку стаціонарної моделі (1) специфікацію та ідентифікацію можна проводити на базовому періоді  $[\tau_0, \tau_1]$ , що передує періоду оптимізації ( $\tau_1 \leq \tau_*$ ).

Ідентифікація диференціально-алгебраїчних рівнянь здійснюється в рамках різних статистичних методів: різницевих, інтегральних, нелінійних регресійних, колокаційних, тощо [5]. Однак проблема ідентифікації диференціально-алгебраїчних рівнянь, що входять у склад моделі оптимального керування, майже не вивчена (особливо для слабо формалізованих систем) [3, 4], а отже, потребує особливої уваги.

## 2. Постановка задачі

Як показує практика [1], багато об'єктів керування досить точно описується лінійними динамічними моделями. Шляхом раціонального вибору квадратичних критеріїв якості часто вдається знайти ефективні оптимальні керування. Тому дана робота присвячена побудові стаціонарних лінійно-квадратичних (LQ) моделей оптимального керування.

Нехай в  $N+1$  цілочисельних точках проміжку  $[\tau_0, \tau_*]$  наявна статистична інформація  $\{\mathbf{x}_\tau\}$  про динаміку фазового вектора  $\mathbf{x}$  та  $\{Y_\tau\}$  про динаміку деякої скалярної функції  $Y(t)$ , яка певним чином зв'язана з квадратичною функцією якості  $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Зробивши заміну  $t = \tau - \tau_*$ , ідентифікацію моделі можна проводити на проміжку  $[-N, 0]$ , а оптимізацію – на  $[0, t_k]$ ,  $t_k = \tau_k - \tau_*$ . Стаціонарну LQ-модель оптимального керування будемо записувати у вигляді:

$$\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{t_k} G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \quad (3)$$

де  $A$  – довільна матриця,  $B$  – симетрична невідроджена матриця,  $\mathbf{a}_0$  – невідомий вектор-стовпець.

Отже, проблема побудови моделі (2), (3) оптимального керування включає в себе такі задачі:

- а) специфікація квадратичної функції якості  $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ;
- б) ідентифікація рівняння руху і функції  $G(\cdot)$  так, щоб:
  - рівності  $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_t$ ,  $G(t) \approx G_t$  виконувались з високою точністю на  $[-N, 0]$ ;
  - змінні  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ ,  $G(t)$  були неперервні в точці  $t = 0$ ;
  - модель була нечутливою до незначних змін вхідної інформації;
  - достатні умови екстремуму функціоналу  $J$  були виконані;
- в) проведення специфікації та ідентифікації моделі (2), (3) так, щоб вони забезпечували ефективну схему комп'ютерної реалізації.

У даній роботі розглянуто випадок розмірностей  $m = 3$  і  $r = 3$ . Як показує практика [6], тривимірний фазовий простір виявляється достатньо для відображення в моделі властивостей реальних динамічних систем.

## 3. Метод розв'язання

У даному дослідженні запропонований наступний підхід до ідентифікації моделі (2), (3). Спочатку методами колокації на проміжку  $[-N, -1]$  з високою точністю оцінюється декомпозиція траєкторії руху  $\mathbf{x}(t)$ , звідки відновлюється

однорідна (матриця  $A$ ) та неоднорідна ( $\mathbf{z} \equiv \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{a}_0$ ) частини рівняння (3). Граничне значення  $\mathbf{x}_*$  можна розглядати як прогнозне для декомпозиції  $\mathbf{x}(t)$  в момент часу  $t = 0$ . Якщо статистичні дані для керування  $\mathbf{u}(t)$  невідомі, то матриця  $B$  і вектор  $\mathbf{a}_0$  моделі все ще залишаться невідомими. Їх оцінки пропонується отримати з ідентифікації підінтегральної функції якості  $G$ , для чого остання повинна бути специфікована належним чином.

### 3.1. Оцінювання декомпозиції траєкторії фазових координат

Суть колокаційних методів, що використовуються для ідентифікації диференціальних рівнянь на базовому періоді, полягає у розкладанні фазової траєкторії за базисними функціями [5]. Нехай на вхід динамічної системи подається гармонійний сигнал  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 \cos \mu t + \mathbf{k}_2 \sin \mu t$ . Крім того, будемо вважати, що декомпозиція містить лінійний тренд. Тоді, очевидно, розв'язок рівняння (3) приймає вигляд:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{n}_1 + \mathbf{m}_1 t + \mathbf{m}_2 \cos \omega t + \mathbf{m}_3 \sin \omega t + \mathbf{n}_2 \cos \mu t + \mathbf{n}_2 \sin \mu t. \quad (4)$$

У загальному випадку для частоти  $\omega$  власних коливань і частоти  $\mu$  збурюючих коливань можуть виконуватися наступні умови:  $\omega > \mu$ ,  $\omega < \mu$  і  $\omega = \mu$ . Останній випадок є особливим (ефект резонансу, що притаманний, наприклад, гамільтоновим системам). До того ж, при  $\omega = \mu$  функціональна форма моделі (4) зазнає структурних змін і розв'язок (4) набуває вигляду:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 t + \mathbf{q}_2 t \cos \omega t + \mathbf{q}_3 t \sin \omega t + \mathbf{p}_2 \cos \omega t + \mathbf{p}_2 \sin \omega t, \quad (5)$$

що можна інтерпретувати як розклад траєкторії руху на трендову, сезонну (коливання зі змінною амплітудою) та періодичну (коливання зі сталою амплітудою) складові [7]. Оскільки для реальних динамічних систем умова  $\omega = \mu$  є малоймовірною, у роботі розглядається випадок  $\omega \neq \mu$ .

При кожному заданому значенні частот  $\omega$  і  $\mu$  невідомі коефіцієнти в (4) можна оцінити за допомогою методу найменших квадратів (МНК) для лінійних регресій [8]. При цьому оптимальні частоти  $\omega$  і  $\mu$  треба шукати в таких областях, де виконується наступний мультикритерій із заданими пріоритетами: коефіцієнти детермінації  $R_i^2$  максимальні, фактичні відносні помилки  $\Delta_i$  прогнозів  $x_i(0)$  мінімальні, індекси обумовленості  $CI_i$  нормованих інформаційних матриць МНК мінімальні. Останній показник часто використовується у статистиці для аналізу чутливості МНК-оцінок до незначних коливань вхідної інформації [9]. Налаштування моделі на заданий набір властивостей будемо здійснювати за допомогою мультикритеріального регулятора, який діє за принципом оберненого зв'язку [10].

У даному випадку регулятор можна інтерпретувати як фільтр, який відсіює сторонні значення параметрів керування  $\omega$ ,  $\mu$  і налаштовує модель на оптимальне функціонування, що відповідає реальному динамічному процесу. Регулятор впливає на динамічну модель і, навпаки, остання керує роботою регулятора. У цій двосторонній взаємодії динамічної моделі і регулятора за допомогою оберненого зв'язку відбувається керування енергетичним балансом системи [10].

В оптимальному режимі рівняння балансу можна записати у вигляді [2]:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = c, \quad (6)$$

де  $H(\cdot)$  – функція Гамільтона;  $c$  – стала, заздалегідь невідома.

Таким чином, робота регулятора полягає у виборі таких значень параметрів керування, які налаштовують динамічну модель на значення константи  $c$ , що відповідає даному процесу. При переході від одного процесу до іншого енергетичний зміст лівої частини (6) не змінюється, а змінюється лише значення  $c$ .

У матричному вигляді модель розкладу (4) та його похідної можуть бути подані наступним чином:

$$\dot{\mathbf{x}} = N\mathbf{f} + M\mathbf{g}, \quad \dot{\mathbf{x}} = (NJ_\mu + MJ_0)\mathbf{f} + MJ_\omega\mathbf{g}, \quad (7)$$

$$N = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3], \quad M = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3], \quad \mathbf{f} = [1, \cos \mu t, \sin \mu t]', \quad \mathbf{g} = [t, \cos \omega t, \sin \omega t]',$$

$$J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}, \quad J_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \\ 0 & \mu & 0 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

З іншого боку, враховуючи (3),  $\dot{\mathbf{x}} = AN\mathbf{f} + AM\mathbf{g} + \mathbf{z}$ . Ця рівність не буде суперечити (7), якщо покласти, наприклад,

$$A = MJ_\omega M^{-1}, \quad \mathbf{z} = (NJ_\mu + MJ_0 - AN)\mathbf{f}. \quad (8)$$

Неважко помітити, що у цьому випадку неоднорідна частина  $\mathbf{z}$  задовольняє однорідну задачу Коші:

$$\dot{\mathbf{z}} = R\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}(0) = (NJ_\mu + MJ_0 - AN)\mathbf{f}(0), \quad (9)$$

$$R = (NJ_\mu + MJ_0 - AN)J_\mu(NJ_\mu + MJ_0 - AN)^{-1}.$$

Це означає, що коли вхідний сигнал  $\mathbf{z}$  є розв'язком задачі Коші (9), то матриця  $A$  системи диференціальних рівнянь (3) визначається однозначно за формулою (8).

Якщо вхідний сигнал  $\mathbf{z}$  специфікований, то керування  $\mathbf{u}(t)$ , очевидно, задовольняє неоднорідну задачу Коші:

$$\dot{\mathbf{u}} = D(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}_0), \quad \mathbf{u}(0) = B^{-1}\mathbf{z}(0) - \boldsymbol{\alpha}_0; \quad D = B^{-1}RB, \quad \boldsymbol{\alpha}_0 = B^{-1}\mathbf{a}_0. \quad (10)$$

Тут матриця  $B$  і вектор  $\mathbf{a}_0$  залишаються невідомими і для їх оцінювання необхідна додаткова інформація про динамічну систему.

### 3.2. Специфікація підінтегральної функції цільового функціоналу

З матричної алгебри та формул (8), (10) випливає, що власні числа матриці  $A$  дорівнюють  $0, \pm i\omega$ , а матриці  $D - 0, \pm i\mu$ .

Розглянемо період оптимізації  $[0, t_k]$ . Згідно принципу максимуму Понтрягіна [1] для задачі (2), (3), гамільтоніан  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{y}'\dot{\mathbf{x}}$ , а необхідні умови екстремуму функціонала (2) мають вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}'} = A\mathbf{x} + B(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}_0), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}'} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}'} - A'\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(t_k) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}'} = 0 \Rightarrow \mathbf{y} = -B^{-1} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}'}. \end{cases} \quad (11)$$

Якщо  $G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = g_0 + \boldsymbol{\alpha}_0' A\mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{u}' B\mathbf{u}$  ( $g_0$  – константа інтегрування), то, очевидно,  $\mathbf{y} = \mathbf{u}$ . Тоді динаміка оптимального керування задається задачею Коші

$$\dot{\mathbf{u}} = -A'(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}_0), \quad \mathbf{u}(t_k) = 0. \quad (12)$$

Отже, на відміну від рівняння (10) для керувань на базовому періоді, в оптимальному режимі  $D = -A'$ .

З метою ідентифікації невідомих параметрів  $B$  і  $\alpha_0$  продовжимо функцію  $G$  з періоду оптимізації  $[0, t_k]$  неперервно на базовий період  $[-N, 0]$ . В координатах  $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  отримуємо ( $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{z} - \alpha_0$ ,  $b_0$  – стала величина, заздалегідь невідома):

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = b_0 + \alpha_0' \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{z}' K \mathbf{z}, \quad K \equiv B^{-1}. \quad (13)$$

Для ідентифікації моделі (13) залишається придати фізичний зміст величині  $G$ . Оскільки функція  $H$ , згідно (6), має зміст енергії, то і  $G$  має розмірність енергії. За постановкою задачі залишилися не специфікованими керування  $\mathbf{u}(t)$  і функція  $Y(t)$ . Логічно припустити, що їх розмірність співпадає з розмірністю фазових координат  $\mathbf{x}$ . Аналізуючи розмірності правих частин рівнянь (12), (13), неважко помітити, що розмірність  $G$  дорівнює відношенню квадрату розмірностей фазових координат до часу. Тоді величину  $G$  можна подати, наприклад, у вигляді  $G = nY\dot{Y}$ , де  $n$  – деякий безрозмірний коефіцієнт, за допомогою якого можна регулювати масштаб керування  $\mathbf{u}(t)$ . Зауважимо, що

$$\frac{1}{2} \mathbf{z}' K \mathbf{z} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}' - \mathbf{x}' A') K \mathbf{z} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}' K \mathbf{z} - \frac{1}{2} \mathbf{x}' A' K \mathbf{z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}' K \mathbf{z}) - \frac{1}{2} \mathbf{x}' (K R + A' K) \mathbf{z},$$

де, згідно (10), в оптимальному режимі ( $D = -A'$ ) останній доданок тотожно дорівнює нулю. Після інтегрування виразу (13) приходимо до наступного результату:

$$F \equiv n \frac{1}{2} Y^2 = c_0 + b_0 t + \alpha_0' \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}' K \mathbf{z}. \quad (14)$$

Отже, задача Коші для функції якості  $F$  набуває вигляду:

$$\dot{F} = \begin{cases} b_0 + \alpha_0' \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{z}' K \mathbf{z} - \frac{1}{2} \mathbf{z}' K (A + D') \mathbf{x}, & F(0) = F_*, \quad t < 0, \\ \beta_0 + \alpha_0' \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{z}' K \mathbf{z}, & F(0) = F_*, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Тут спочатку проводиться ідентифікація на базовому періоді ( $D \neq -A'$ ), після чого з умови неперервної диференційованості функції  $F$  обчислюється значення  $\beta_0$  за формулою

$$\beta_0 = b_0 - \frac{1}{2} \mathbf{z}' K (A + D') \mathbf{x} \Big|_{t=0}.$$

### 3.3. Розв'язання LQ-задачі оптимального керування

Враховуючи фізичний зміст підінтегральної функції якості  $G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , логічно перейти від моделі оптимального керування (2) в формі Лагранжа до моделі оптимального керування в формі Майєра [2]:

$$\begin{aligned} \max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J &= F(t_k), & (16) \\ \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{z}, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \\ \dot{F} = \beta_0 + \alpha_0' \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{z}' K \mathbf{z}, & F(0) = F_*. \end{cases} \end{aligned}$$

Виконання необхідних умов екстремуму цільового функціоналу  $J$  за принципом максимуму Понтрягіна дає:

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, y_4) &= \mathbf{y}'\dot{\mathbf{x}} + y_4\dot{F}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)', \\
 \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}'} = A\mathbf{x} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}'} = -A'(\mathbf{y} + y_4\mathbf{a}_0), \quad \mathbf{y}(t_k) = 0, \\ \dot{y}_4 = -\frac{\partial H}{\partial F} = 0, \quad y_4(t_k) = 1, \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}'} = \mathbf{y} + y_4(\mathbf{a}_0 - K\mathbf{z}) = 0. \end{cases} & \quad (17)
 \end{aligned}$$

Звідси знаходимо, що  $y_4 = 1$ ,  $\mathbf{y} = K\mathbf{z} - \mathbf{a}_0$ , а значить,  $\mathbf{y} = \mathbf{u}$ . Отже, як і очікувалося, оптимальне керування  $\mathbf{u}^*(t)$  дійсно задовольняє задачу Коші (12). Розв'язуючи двоточкову задачу (17), отримуємо ( $I$  – одинична матриця)

$$\mathbf{u}^*(t) = (e^{-A'(t-t_k)} - I)\mathbf{a}_0, \quad (18)$$

$$\mathbf{x}^*(t) = e^{At}\mathbf{x}_* + \int_0^t e^{A(t-\tau)}K^{-1}e^{-A'(\tau-t_k)}\mathbf{a}_0 d\tau. \quad (19)$$

У даній роботі керування на досліджуваному періоді  $[-N, t_k]$  повинні бути неперервними в точці  $t=0$ , тобто  $\mathbf{u}^*(0) = \mathbf{u}(0)$ , де  $\mathbf{u}(0)$  обчислюється на базовому періоді. Згідно (18), отримуємо  $\mathbf{u}^*(0) = (e^{A't_k} - I)\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{z}^*(0) = K^{-1}e^{A't_k}\mathbf{a}_0$ . Враховуючи значення  $\mathbf{z}(0)$  на базовому періоді (9), для виконання рівності  $\mathbf{u}^*(0) = \mathbf{u}(0)$  необхідно і достатньо зв'язати невідомі параметри  $K$  і  $\mathbf{a}_0$  умовою

$$\mathbf{a}_0 = e^{-A't_k}K\mathbf{z}(0). \quad (20)$$

Це означає, що ідентифікацію функції  $F$  (14) на базовому періоді необхідно проводити з додатковою умовою (20), тобто слід покласти

$$F = c_0 + b_0t + \mathbf{x}'e^{-A't_k}K\mathbf{z}(0) - \frac{1}{2}\mathbf{x}'K\mathbf{z}, \quad t < 0. \quad (21)$$

Вираз (21) зручний для ідентифікації, оскільки він виражений лише через відомі величини  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{z}$ . Його ідентифікація повинна проводитись разом із декомпозицією (4) і також є мультикритеріальною. Як і для (4), коефіцієнт детермінації  $R^2$  регресійної моделі, що відповідає (21), обирається якомога більшим, а фактична відносна помилка  $\Delta$  прогнозу  $F(0)$  та індекс обумовленості  $CI$  нормованої інформаційної матриці МНК – якомога меншими. Також повинна виконуватись умова  $K > 0$  (достатня умова екстремуму цільового функціоналу [2]).

Отже, після сумісної ідентифікації моделі (4), (21) на базовому періоді задача оптимального керування стає повністю визначеною і її розв'язки можуть бути знайдені за формулами (18), (19).

#### 4. Чисельний експеримент

Прикладом слабо формалізованих динамічних систем є макроекономічні системи. Керування такими системами відбувається за допомогою спеціальних інструментів (фіскальна, монетарна політика, тощо). Однак моделі макроеконо-

мічних систем зазвичай є більш адекватними при досить високій агрегації величин, що входять у них [9]. Саме тому інформація за керуванням  $\mathbf{u}(t)$  для таких систем може бути відсутньою.

Для апробації моделей розглянуто макроекономіку Нідерландів. У якості  $\mathbf{x}$  обрано ключові макроекономічні величини: валовий приріст основних фондів ( $x_1$ ), експорт товарів і послуг ( $x_2$ ), фонд заробітної платні ( $x_3$ ). Величина  $Y$  подана валовим внутрішнім продуктом (ВВП). За цими величинами сформовані ряди динаміки об'єму  $N = 31$  (1971-2001 рр.) [11]. Всі дані нормовані діленням на значення в 1971 р. При макроекономічному моделюванні часто розглядають п'ятирічний горизонт планування. Тоді задача (14) може бути сформульована наступним чином: необхідно знайти такі оптимальні траєкторії макроекономічних величин  $x_1, x_2, x_3$ , щоб ВВП системи в 2006 р. був максимальним.

Комп'ютерна реалізація роботи мультикритеріального регулятора за принципом оберненого зв'язку дозволила провести ідентифікацію моделей (4), (19) при  $t \in [-31, 0]$ . Керуючі параметри, що дозволили налаштувати модель на заданий набір властивостей, приймають значення  $\omega^* = 0.2055$ ,  $\mu^* = 0.3052$ , тобто частота системи  $\omega^*$  виявилася меншою за частоту  $\mu^*$  зовнішнього сигналу.

Декомпозиція (4) після процедури рафінування (відкидання незначущих коефіцієнтів моделі) при 5%-му рівні значущості приймає вигляд:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 7.8496 + 0.2518t + 0.6933 \cos \omega^* t + 0.2260 \sin \omega^* t + 0.3123 \sin \mu^* t, \\ &\quad \text{(с.п.)} \quad (0.1422) \quad (0.0085) \quad (1.1158) \quad (0.1029) \quad (0.1184) \\ x_2(t) &= 14.6434 + 0.5167t + 1.9313 \cos \omega^* t + 1.0517 \sin \omega^* t + 1.0889 \sin \mu^* t, \\ &\quad \text{(с.п.)} \quad (0.1401) \quad (0.0051) \quad (0.1132) \quad (0.1028) \quad (0.1141) \\ x_3(t) &= 9.3766 + 0.2993t + 0.3392 \cos \omega^* t + 0.4094 \sin \omega^* t. \\ &\quad \text{(с.п.)} \quad (0.1387) \quad (0.0045) \quad (0.0627) \quad (0.1225) \end{aligned}$$

Тут у дужках наведені стандартні помилки відповідних МНК-оцінок [8].

Як видно з Табл. 1 та Рис. 1а-1в декомпозиція (4) ідентифікована адекватно і може бути застосована для відновлення параметрів динамічної моделі. Тоді за формулами (8), (9) можна відновити матрицю  $A$  рівняння руху (3) фазового вектора  $\mathbf{x}(t)$  та матрицю  $R$  рівняння руху (9) вхідного сигналу  $\mathbf{z}(t)$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0.6922 & -0.1753 & -0.2798 \\ 2.0278 & -0.4541 & -0.9223 \\ 0.4092 & -0.1015 & -0.2381 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -1.3116 & 0.3530 & 0.2177 \\ -4.8829 & 1.2729 & 0.7914 \\ -0.3714 & 0.5069 & 0.3866 \end{bmatrix}.$$

Малі фактичні (у порівнянні з реальними даними [11]) та середньоквадратичні (обчислені за довірчими інтервалами [8]) помилки прогнозів в точці  $t=0$  дозволяють використовувати їх для отримання граничних значень:

$$\mathbf{x}_* = [8.5429, 16.5747, 9.7158]', \quad \mathbf{z}(0) = [0.1042, 0.2292, 0.2207]'.$$

Табл.1. Імітаційні, прогнозні та робастні властивості моделей (4), (21)

	Коефіцієнт детерміації $R^2$	Факт. помилка $\Delta$ прогнозу	Сер.квадр. помилка $\delta$ прогнозу	Індекс обумовленості $CI$
$x_1$	0.9955	0.5986%	4.8337%	36.489
$x_2$	0.9930	1.6079%	5.7667%	34.925
$x_3$	0.9967	2.0125%	3.4250%	31.542
$F$	0.9831	1.2124%	5.0541%	128.56

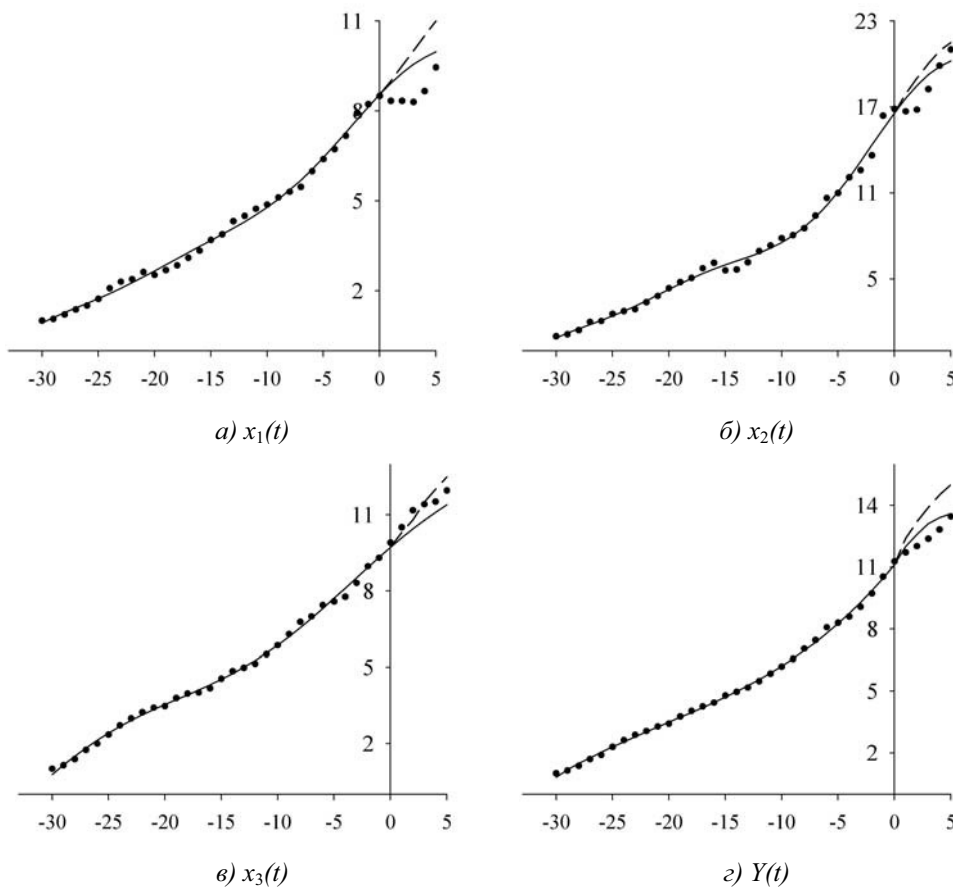


Рис.1. Реальні (точки), модельні (неперервні лінії) та оптимальні (пунктирні лінії) траєкторії руху динамічної системи

Нехай масштаб керування  $\mathbf{u}(t)$  на базовому періоді визначається умовою  $\max|u_i(t)/x_i(t)| \leq l$  ( $i = 1, 2, 3$ ), де  $l$  оберемо, наприклад, на рівні 0.05. Тоді оптимальне значення параметру масштабу (14)  $n = 0.01$ , а ідентифікація цільової функції  $F$  приводить до наступних результатів ( $K = [\mathbf{k}]$  – діагональна матриця):



$$F = \underset{(c.o.)}{0.4986} - \underset{(0.1854)}{0.0103}t + \underset{(0.0052)}{\mathbf{x}'e^{-A't_k}[\mathbf{k}]\mathbf{z}(0)} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'[\mathbf{k}]\mathbf{z}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2.7202, 0.5156, 0.6158 \\ (0.5123) \quad (0.0893) \quad (0.1370) \end{bmatrix}'.$$

Оскільки константа диференціального рівняння (3)  $\mathbf{a}_0 = K^{-1}\mathbf{a}_0$ , де  $\mathbf{a}_0$  визначається формулою (20), то  $\mathbf{a}_0 = [0.0790, 0.1933, 0.2624]$ . Модель (21) є адекватною, що підтверджується результатами, наведеними в Табл. 1 та на Рис. 1г.

Отже, LQ-задача (16) повністю ідентифікована. Оптимальне керування  $\mathbf{u}^*(t)$  може бути знайдено за формулою (18):

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= 0.0315 + 0.0371 \cos \omega^*t - 0.0592 \sin \omega^*t, \\ u_2^*(t) &= -0.0180 - 0.0006 \cos \omega^*t + 0.0214 \sin \omega^*t, \\ u_3^*(t) &= 0.0046 - 0.0303 \cos \omega^*t + 0.0129 \sin \omega^*t. \end{aligned}$$

Підставляючи цей розв'язок у формулу (19), отримаємо оптимальний закон руху фазового вектора  $\mathbf{x}^*(t)$ :

$$\mathbf{x}^*(t) = (P + Qt)\mathbf{h},$$

$$P = \begin{bmatrix} 7.5599 & 0.9830 & 0.6922 \\ 14.0787 & 2.4961 & 2.5423 \\ 9.4943 & 0.2215 & 0.6291 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.1991 & 0.0522 & 0.0377 \\ 0.4085 & 0.1342 & 0.1404 \\ 0.2366 & 0.0175 & 0.0436 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos \omega^*t \\ \sin \omega^*t \end{bmatrix}.$$

Як і очікувалося, його структура співпадає з декомпозицією (5).

На рис. 1 пунктирною лінією показані оптимальні траєкторії  $\mathbf{x}^*(t)$  і  $Y^*(t)$  на періоді  $[0, 5]$ . Видно, що коли розподіл ресурсів наближається до оптимального, то очевидним є суттєве збільшення економічного ефекту від їх використання.

## 5. Висновки

У даній роботі запропонований підхід до ідентифікації стаціонарних LQ-моделей оптимального керування у тривимірному фазовому просторі. Критеріями ідентифікації обрані високі імітаційні, прогностні та робастні властивості моделі. Раціональна специфікація LQ-задачі дозволила знайти оптимальні розв'язки в явному вигляді та уникнути труднощів чисельної реалізації. Апробація запропонованого підходу проведена на реальних статистичних даних і продемонструвала його адекватність і ефективність використання для постановки і розв'язання задач оптимального керування.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Изд-во Мир, 1972.
2. Intriligator M.D. Mathematical optimization and economic theory. – Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 508 pp.
3. Nazarenko O.M., Filchenko D.V. Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective. // IJICIC. – Vol. 4, Number 7, 2008. – pp.1553-1566.

4. Назаренко О.М. Побудова та ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем // Вісник Харк. нац. ун-ту., – 2008. – № 833 Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип. 10 – С. 185-192.
5. Ramsay J.O., et al. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. – 2007. Vol. 69, N. 5. – P. 741-796.
6. Анищенко В.С. Детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 6. – С. 70-76.
7. Hamilton J.D. Time Series Analysis. – N.J.: Princeton Univ. Press, 1994. – 800 p.
8. Назаренко О.М. Основи економетрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – К.: „Центр навчальної літератури”, 2005. – 392 с.
9. Greene W.H. Econometric Analysis. Fifth Edition. – New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003. – 802 p.
10. Бабаков И.М. Теория колебаний. Изд. 4-ое, испр. – М.: Наука, 2004. – 591 с.
11. Eurostat's Web Site. – <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>.

Надійшла 30.03.2009.