

Численное исследование сходимости метода дискретных особенностей в задачах динамики тонких упругих пластин

Ю. С. Шувалова

Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Украина

The second basic dynamic problem for thin elastic plates in Kirchhoff model is under consideration. The problem reduces to system of the non-stationary boundary equations by means of dynamic analogue of a single layer potential. The research of convergence of discrete singularities method for the plate of the rectangular form was carried out.

1. Введение

Задача расчета напряжений, возникающих в процессе колебаний тонких упругих пластин актуальна во многих отраслях аэрокосмической, электронной, машиностроительной промышленности. В статье предложен вариант метода теории потенциалов, позволяющий свести задачу динамики тонких упругих пластин к системе граничных нестационарных уравнений. Метод исследования основан на схеме, развитой в [1–4] в задачах классической динамической теории упругости.

2. Постановка задачи

В рамках модели Кирхгофа рассматривается тонкая упругая пластина, занимающая область $\Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, где Ω – некоторая область в \mathbb{R}^2 ($h = const$).

Пластина находится под действие произвольной нестационарной нагрузки с плотностью $q(x, t)$. Смещение $u(x, t)$ точки срединной плоскости пластины в направлении, перпендикулярном этой плоскости в недеформированном состоянии, является решением смешанной задачи (1.1):

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) + D\Delta^2 u(x, t) = q(x, t), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), \end{cases} & x \in \Omega, \\ \begin{cases} (Qu)(x, t) = g_1(x, t), \\ (-Mu)(x, t) = g_2(x, t), \end{cases} & (x, t) \in \Gamma \times (0; +\infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\text{где } Qu = -D(\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_\tau [n_1 n_2 (\partial_2^2 u - \partial_1^2 u) + (n_1^2 - n_2^2)\partial_1 \partial_2 u]), \quad (1.2)$$

$$-Mu = D(\Delta u + (1-\nu)(2n_1 n_2 \partial_1 \partial_2 u - n_2^2 \partial_1^2 u - n_1^2 \partial_2^2 u)),$$

– операции обобщенной перерезывающей силы и изгибающего момента, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, ∂_n – производная по внешней нормали $n(x) = (n_1(x), n_2(x))$ к контуру

$\Gamma = \partial\Omega$, ρ – поверхностная плотность пластины, $D = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}$ – ее цилиндрическая жесткость.

3. Построение динамического потенциала

Несложные вычисления дают явный вид фундаментального решения уравнения колебаний пластины:

$$\Phi(x, t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{D}} \int_{\frac{|x|^2}{4\sqrt{Dt}}}^{\infty} \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu,$$

где $\theta(t)$ – характеристическая функция полуоси $(0, \infty)$.

Запаздывающий потенциал простого слоя с заданной на $\Gamma \times \mathbb{R}$ гладкой двухкомпонентной плотностью вводится формулой:

$$(V\vec{\alpha})(x, t) = \iint_{\Gamma \times \mathbb{R}} (\Phi(x-y, t-\tau)\alpha_1(y, \tau) + \partial_{n,y} \hat{O}(x-y, t-\tau)\alpha_2(y, \tau)) ds, d\tau, \quad (2.1)$$

где $\partial_{n,y}$ – операция нормальной производной, действующая по переменной y .

Потенциал $V\vec{\alpha}$ удовлетворяют однородному уравнению колебаний пластины в $\Omega \times \mathbb{R}_+$, а если плотность равна нулю при $t < 0$, то и нулевым начальным условиям. Для потенциала $V\vec{\alpha}$ справедливы формулы скачков:

$$\begin{aligned} (QU\vec{\alpha})^\pm(x, t) &= \pm\alpha_1(x, t) + (QU\vec{\alpha})^0(x, t), \\ (-MV\vec{\alpha})^\pm(x, t) &= \pm\alpha_2(x, t) + (-MV\vec{\alpha})^0(x, t), \end{aligned} \quad (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+, \quad (2.2)$$

Объемный потенциал с плотностью $q(x, t)$ вводится формулой

$$(Uq)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \Phi(x-y, t-\tau)q(y, \tau) dy d\tau.$$

Дальше, без ограничения общности, будет рассматриваться задача (1.1) для однородного уравнения колебаний пластины, поскольку имеющуюся неоднородность с помощью объемного потенциала можно перенести в краевые условия.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) + D\Delta^2 u(x, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), \end{cases} & x \in \Omega, \\ \begin{cases} (Qu)(x, t) = \tilde{g}_1(x, t), \\ (-Mu)(x, t) = \tilde{g}_2(x, t), \end{cases} & (x, t) \in \Gamma \times (0; +\infty), \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\tilde{g}_1(x, t) = g_1(x, t) - (QUq)(x, t)$, $\tilde{g}_2(x, t) = g_2(x, t) - (-MUq)(x, t)$.

Представив решения задачи (2.3) потенциалом простого слоя $u(x, t) = (V\vec{\alpha})(x, t)$, получим систему граничных уравнений

$$\begin{cases} (QU\vec{\alpha})^\pm(x, t) = g_1(x, t), \\ (-MV\vec{\alpha})^\pm(x, t) = g_2(x, t), \end{cases} \quad (x, t) \in \Gamma \times (0; +\infty) \quad (2.4)$$

Однозначная разрешимость поставленной задачи была доказана в [5] в однопараметрической шкале пространств соболевского типа.

4. Применение метода потенциалов к моделированию динамических процессов тонкой упругой пластины прямоугольной формы

Рассмотрим тонкую упругую пластину прямоугольной формы. Учитывая формулы скачков (2.2), из системы (2.4) получен явный вид интегральных граничных уравнений. Далее приведем представление системы для одной из сторон $x = (x_1; 0) \in \Gamma_1$ ($0 < x_1 < a$):

$$\frac{1}{2}\alpha_1(x, t) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{\Gamma} \alpha_k(y, t) Q_k(x - y, t) ds_y + \int_0^{\infty} \frac{\alpha_k(y, t) - \alpha_k(y, \tau)}{(t - \tau)^2} \tilde{Q}_k(x - y, t - \tau) ds_y d\tau \right] = \tilde{g}_1(x, t),$$

$$\frac{1}{2}\alpha_2(x, t) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{\Gamma} \alpha_k(y, t) M_k(x - y, t) ds_y + \int_0^{\infty} \frac{\alpha_k(y, t) - \alpha_k(y, \tau)}{(t - \tau)^2} \tilde{M}_k(x - y, t - \tau) ds_y d\tau \right] = \tilde{g}_2(x, t)$$

1) Пусть $y = (s, 0) \in \Gamma_1$, тогда $Q_1(x - y, t) = 0, M_2(x - y, t) = 0, .$

$$Q_2(x - y, t) \approx \frac{1 + \nu}{4\pi(x_1 - s)^2} - \frac{3(x_1 - s)^2}{128\pi Dt^2}, M_1(x - y, t) \approx -\frac{\nu}{4\pi} + \frac{(1 + \nu)}{8\pi} \ln t - \frac{(1 + 5\nu)(x_1 - s)^4}{1536\pi Dt^2}.$$

Разбиваем Γ_1 на n частей, на каждой из которых считаем плотности $\alpha_k(y, t)$ постоянными ($\alpha_{ki}(y, t) = const, i = \overline{1, n}$).

$$\int_{\Gamma_1} \alpha_2(y, t) Q_2(x - y, t) ds_y = \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1 + \nu}{4\pi(x_1 - s)^2} - \frac{3(x_1 - s)^2}{128\pi Dt^2} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_{2i}(s, t) \left[\frac{1 + \nu}{4\pi(x_1 - s)} + \frac{(x_1 - s)^3}{128\pi Dt^2} \right]_{a_{i-1}}^{a_i} \tag{2.4}$$

Первое слагаемое в правой части (2.4) понимаем как интеграл в смысле Адамара

$$\int \frac{dy}{y^2} = \operatorname{Re} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{dy}{(y + i\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{y^2 - \varepsilon^2}{(y^2 + \varepsilon^2)^2} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{y\varepsilon}{\varepsilon^2 + y^2} = -\frac{1}{y} + c.$$

$$\int_{\Gamma_1} \alpha_1(y, t) M_1(x - y, t) ds_y = \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{(1 + \nu) \ln t - 2\nu}{8\pi} - \frac{(1 + 5\nu)(x_1 - s)^4}{1536\pi Dt^2} ds =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} \left[\frac{((1 + \nu) \ln t - 2\nu)s}{8\pi} + \frac{(1 + 5\nu)(x_1 - s)^5}{7680\pi Dt^2} \right]_{a_{i-1}}^{a_i}$$

2) на остальных частях границы $\Gamma_i, i = \overline{1,3}$ ($t > 0, x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_i, i = \overline{1,3}$)

$$Q_1(x-y, t) = A(x-y) \cdot \cos \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}} + B(x-y) \cdot t \cdot \sin \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}},$$

$$Q_2(x-y, t) = C(x-y) \cdot \cos \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}} + D(x-y) \cdot \frac{1}{t} \cdot \sin \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}} + E(x-y) \cdot t \cdot \sin \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}},$$

$$M_1(x-y, t) = F(x-y)t \sin \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}} + G(x-y) \int_0^\infty \theta(t-\tau) \sin \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}},$$

$$M_2(x-y, t) = J(x-y) \cdot \cos \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}} + K(x-y) \cdot t \cdot \sin \frac{|x-y|^2}{4\sqrt{Dt}}.$$

Интегралы $\int_{\Gamma_i} \alpha_k(y, t) Q_k(x-y, t) ds_y, \int_{\Gamma_i} \alpha_k(y, t) M_k(x-y, t) ds_y, k = 1, 2$ вычисляются аналогично.

5. Исследование сходимости численных результатов

Для численной реализации возьмем пластину размеров $1 \times 1 \times 0,1$ (м). Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Края пластины свободны, т.е. решается задача (1.1) с нулевыми начальными и граничными условиями. Плотность внешних сил, действующих на пластину $q(x, t) = q_0 \sin t$.

$$\partial_t^2 u(x, t) + D\Delta^2 u(x, t) = q_0 \sin t, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \partial_t u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad x \in \Omega,$$

$$\begin{cases} (Qu)(x, t) = 0, \\ (-Mu)(x, t) = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in \Gamma \times (0; +\infty).$$

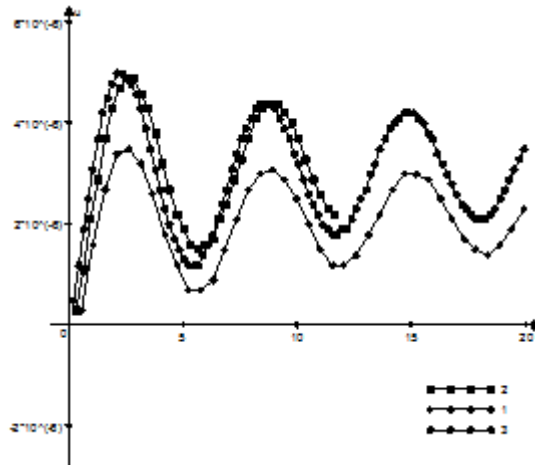


Рис.1 Смещения в центре пластины при различном шаге по времени

$$1: \Delta t = \frac{\pi}{6}, 2: \Delta t = \frac{\pi}{10}, 3: \Delta t = \frac{\pi}{15}.$$

На рисунках представлена зависимость смещения $u(x, t)$ в центре срединной плоскости пластины от времени.

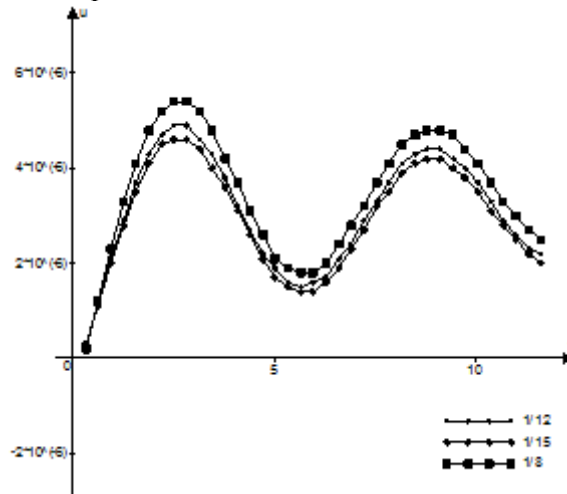


Рис.2 Смещение в центре пластины при различном шаге по пространственным переменным

$$\Delta x_1 = \frac{1}{8}, \Delta x_2 = \frac{1}{12}, \Delta x_3 = \frac{1}{15}$$

6. Выводы

Построен динамический аналог потенциала простого слоя для второй основной задачи динамики тонких упругих пластин, который позволяет определять смещение любой точки пластины в произвольный момент времени без использования методов типа конечных разностей или конечных элементов. Численно показана сходимость метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chudinovich I.Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems. // Math. Methods Appl. Sci., - 1993. - 16. - P. 203-215.
2. Chudinovich I.Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 2. Methods for approximate solutions. // Math. Methods Appl. Sci., - 1993, - 16- P. 217-227.
3. Chudinovich I.Yu. Methods of potential theory in the dynamics of elastic media. // Russian J. Math. Phys., - 1993. - 1. - P. 427-446.
4. Chudinovich I.Yu. On the solution of the boundary equations in problems of elastic wave diffraction on the spatial cracks. // Differencial'nye uravneniya, - 1993, - 29 - P. 1648-1651. (In Russian)
5. Chudinovich I.Yu., Gassan Yu.S. Boundary Equations in basic Dynamic Problems for Thin Elastic Plates// Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика і механіка", - 2000. - № 475. - С.250-258

Надійшла 20.03.2009.