

УДК 532.546

## Решение нелинейной задачи определения поля коэффициента проницаемости с использованием дискретных особенностей

Г. В. Голубев

*Казанский государственный технический университет им А.Н.Туполева, Россия*

Рассмотрена задача об определении фильтрационных параметров неоднородных трещиновато-пористых пластов при движении в них жидкости по нелинейному закону фильтрации. Работа скважин моделируется дискретными логарифмическими особенностями. Для решения задачи предлагается метод Галеркина с конечными элементами. Разобран общий алгоритм, рассмотрены примеры.

**Ключові слова:** *фільтрація, трещиноватость, пористость, нелинейный закон, математическое моделирование, дискретные особенности, метод Галёркина.*

Розглянуто задачу про визначення фільтраційних параметрів неоднорідних пластів із тріщинами та порами при просуванні у них рідини за нелінійним законом фільтрації. Жерла моделюють дискретні логарифмічні особливості. Для розв'язку задачі запропоновано метод Гальоркіна з скінченими елементами. Розглянуто загальний алгоритм і приклади.

**Ключові слова:** *фільтрація, тріщини, пори, нелінійний закон, математичне моделювання, дискретні особливості, метод Гальоркіна.*

We consider the problem of determination of filtration parameters of non-homogeneous crack-porous stratum in motion of fluids in it in accordance with the nonlinear filtration law. Explored and injected wells are simulated as discrete logarithm type singularities. Also examined is the general algorithm and a number of examples is given.

**Keywords:** *filtration, fracturing, porosity, non-linear law, mathematical modeling, discrete features, the method of Galerkin.*

Данная статья, как и работа [1], посвящена изучению фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах. Но если в [1] упор сделан на решении задачи определения поля давлений, то здесь на задаче определения фильтрационного параметра – коэффициента проницаемости. В некотором смысле их можно охарактеризовать как прямую и обратную задачи. В исходных предпосылках работ имеется много общего, хотя имеются и отличия. В качестве математической модели среды принимается модель Баренблатта – Желтова. Движение жидкости по трещинам описывается нелинейным двучленным законом Форхгеймера в первой форме в виде, разрешенном по отношению к скорости фильтрации

$$\bar{v}_1 = -B_1 \nabla p, \quad (1)$$

где  $B_1 = (\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1) / 2\beta |\nabla p|$ , и использованы обозначения:  $\bar{v}_1$  – скорость фильтрации,  $p$  – функция давления,  $k_1$  – проницаемость трещин,  $\mu$  – вязкость жидкости,  $\beta$  – постоянная.

Для движения жидкости в пористых блоках породы, где сосредоточены основные запасы нефти, используется нелинейный закон ДХК (Девликамова, Хабибуллина, Кабирова):

$$\bar{v}_2 = -k_2 u \nabla p / [\mu_0 + \mu_1 (u - 1)], u = 1 + \exp c_1 (|\nabla p| - \beta_1), \quad (2)$$

где  $\bar{v}_2$  – скорость фильтрации в блоках;  $k_2$  – проницаемость блоков;  $\beta_1$  – градиент давления, соответствующий началу интенсивного разрушения структуры нефти;  $c_1$  – определяет скорость разрушения образовавшейся структуры;  $\mu_0, \mu_1$  – вязкости нефти до и после разрушения структуры.

В некоторых случаях для фильтрации в блоках может быть также использован закон Дарси

$$\bar{v}_2 = -k_2 \nabla p / \mu. \quad (3)$$

Коэффициенты проницаемости и трещин и блоков считаются переменными величинами, функциями координат:  $k_1 = k_1(x, y), k_2 = k_2(x, y)$ . В работе [1] получены основные уравнения фильтрации как при комбинации законов (1) и (2)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c-1}}{2\beta|\nabla p|} + \frac{k_2(1+\exp c_1(|\nabla p|-\beta_1))}{\mu_0 + \mu_1 \exp c_1(|\nabla p|-\beta_1)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c-1}}{2\beta|\nabla p|} + \frac{k_2(1+\exp c_1(|\nabla p|-\beta_1))}{\mu_0 + \mu_1 \exp c_1(|\nabla p|-\beta_1)} \right] = -f, \quad (4)$$

где  $c = k_1 / \mu$  – коэффициент текучести,  $f$  – функция плотности отбора; так и при комбинации законов (1) и (3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c-1}}{2\beta|\nabla p|} + \frac{k_2}{\mu} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c-1}}{2\beta|\nabla p|} + \frac{k_2}{\mu} \right] = -f. \quad (5)$$

Равенства (4) или (5) можно рассматривать или как уравнения для определения функции давления или как уравнения для определения фильтрационного параметра. В уравнениях их два:  $k_1$  (или  $c$ ) и  $k_2$ . Поскольку в рамках предлагаемого подхода две неизвестные функции из одного дифференциального уравнения определить не удастся, то одну из них следует отнести к числу задаваемых. Разберем алгоритм решения задачи, когда  $k_2$  известно,  $k_1$  определяется. Ну скажем, по результатам обработки кернов или гидродинамических исследований на скважинах для  $k_2$  принимается некоторая гипотеза, не противоречащая априорной информации. В этом случае в уравнениях (4) или (5) все входящие в них величины, кроме функции  $k_1$  (или  $c$ ) считаются известными. Запишем его в виде, когда неизвестной величиной считается функция  $c$ .

$$a(x, y, c) \frac{\partial c}{\partial x} + b(x, y, c) \frac{\partial c}{\partial y} + \Phi(x, y, c) = 0, \quad (6)$$

где  $a = 2\beta|\nabla p|^3 \partial p / \partial x, b = 2\beta|\nabla p|^3 \partial p / \partial y$ , а функцию  $\Phi(x, y, c)$  ввиду ее громоздкого вида здесь приводить не будем. Учитывая сложный вид функций  $a, b, \Phi$  точные аналитические решения задачи могут быть получены только в относительно небольшом числе случаев, а в общем случае возможно найти лишь численное решение, один из вариантов которого далее излагается. Уравнение (6) является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Для него естественной является постановка задачи Коши, т.е. уравнение должно быть дополнено данными Коши

$$c|_{\Gamma} = \varphi(\tau), \quad (7)$$

где носитель данных Коши  $\Gamma$  ни в одной точке не принимает характеристического направления, а  $\tau$  – дуговая абсцисса линии  $\Gamma$ .

Исследуемую задачу сформулируем следующим образом: в области фильтрации  $D$  с границей  $\partial D$  найти функцию  $c$ , удовлетворяющую в ней дифференциальному уравнению (6) и дополнительному условию (7).

Физически считаются известными: распределение давления в пласте на некоторый момент времени с поправками на дискретные логарифмические особенности, данные Коши (7), а также некоторая другая информация из технической документации месторождения. При этом, по существу, требуются только дискретные данные Коши.

Для решения задачи (6),(7) в работе используется метод Галеркина с конечными элементами [2]. Разобьем область  $D$  на конечные элементы

$$D = \bigcup_{e=1}^N D_e, \quad (8)$$

где  $N$  – общее число элементов. Применим триангуляцию, т.е. разбиение области  $D$  на треугольные конечные элементы  $D_e, e=1,2,\dots,N$ . Нумерацию узлов возьмем одноиндексной, а для типичного элемента « $e$ » вершины пусть находятся в узлах  $v, k, s$ , которые пронумерованы в направлении обхода их против часовой стрелки. На элементе « $e$ » применим линейную аппроксимацию зависимости  $c = c(x, y)$  от координат по формуле  $c_e^h = A + Bx + Cy$ .

Определяя постоянные  $A, B, C$  через значения функции  $c$  в узлах, получим

$$c_e^h = c_v p_v(x, y) + c_k p_k(x, y) + c_s p_s(x, y), \quad (9)$$

$$\text{где } p_v(x, y) = D_{ks} / C_{vks}, p_k = D_{sv} / C_{ksv}, p_s(x, y) = D_{vk} / C_{svk}, \quad (10)$$

$$D_{ks} = \begin{vmatrix} 1, x, y \\ 1, x_k, y_k \\ 1, x_s, y_s \end{vmatrix}, C_{vks} = \begin{vmatrix} 1, x_v, y_v \\ 1, x_k, y_k \\ 1, x_s, y_s \end{vmatrix},$$

Остальные формулы аналогичны. Здесь  $(x_v, y_v), (x_k, y_k), (x_s, y_s)$  – координаты вершин треугольника,  $C_{vks} = C_{ksv} = C_{svk}$  – его удвоенная площадь.

Первую из формул (10) можно представить также в виде

$$p_v(x, y) = (\tau_{ks} + \eta_{ks}x - \xi_{ks}y) / C_{vks}, \quad (11)$$

$$\text{где } \tau_{ks} = x_k y_s - y_k x_s, \xi_{ks} = x_k - x_s, \eta_{ks} = y_k - y_s.$$

Нетрудно заметить, что  $p_v(x_l, y_l) = 1$ , если  $v = l$ ; или 0, если  $v \neq l$ .

Обозначим через  $P_v$  типичный узел, а через  $D_v^h$  – объединение треугольников, имеющих точку  $P_v$  своей вершиной. Если изобразить базисную функцию  $\omega_v(x, y)$  графически, то она будет представлять собой пирамиду с вершиной в точке  $P_v$  и основанием  $D_v^h$ . Итак, базисом пространства  $F_h$  возьмем систему пирамидальных функций  $\{\omega_v(x, y)\}, v=1,2,\dots,n$ , определяемую условиями:

1)  $\omega_v(x_l, y_l) = \delta_{vl}$ , где  $\delta_{vl}$  – символ Кронекера, 2)  $\omega_v(x, y)$  на каждом из треугольников является линейной функцией координат, т.е. подсчитывается по формулам типа (9), а в остальной области равняется нулю.

Приближенное распределение искомой функции в области ищем в виде

$$c^h = \sum_{v=1}^n c_v \omega_v(x, y), \quad (12)$$

где  $c_v$  – узловые параметры системы, за которые принимаются значения функции в узлах;  $\omega_v(x, y)$  – базисные функции при лагранжевой линейной интерполяции;  $n$  – общее число узлов.

Договоримся о процедуре нумерации элементов и узлов. Нумерация элементов может быть проведена в произвольном порядке, независимо от нумерации узлов:  $1, 2, \dots, N$ . Нумерацию узлов примем плотной: сначала нумеруем узлы в основании первого ряда элементов – первый слой узлов; затем нумеруем узел, ближайший к первому, а далее продолжаем нумерацию узлов второго слоя и т.д. При этом разность номеров узлов, лежащих на одной стороне треугольника, должна быть наименьшей. Эта разность определяет ширину ленты матрицы получающейся системы алгебраических уравнений. Если максимальная разность в номерах узлов любого элемента равна  $d$ , то эта матрица будет иметь ширину полуленты  $d+1$ . За счет разреженности и ленточной структуры матрицы увеличивается вычислительная эффективность процесса решения. Типичное уравнение системы в общем виде записывается

$$\sum_{e=1}^N \int_{D_e} w_j(L^e c_e^h) dD_e = 0, \quad (13)$$

где через  $Lc$  обозначена левая часть уравнения (6);  $L^e$  ограничение оператора  $L$  на функции, определенные в  $D_e$ ;  $w_j$  – весовые функции. Подставляя в (13)

выражение  $c^h$  из (12), получим

$$\sum_{v=1}^n c_v \sum_{e=1}^N \int_{D_e} w_j \left( a \frac{\partial \omega_v(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial \omega_v(x, y)}{\partial y} \right) dD_e + \sum_{e=1}^N w_j \Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) dD_e = 0, \quad (14)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно критерию Галеркина полагаем  $w_j = \omega_j$ , т.е. в качестве весовых функций принимаем базисные функции. Обозначим

$$g_{vj} = \sum_{e=1}^N \int_{D_e} \omega_j \left( a \frac{\partial \omega_v(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial \omega_v(x, y)}{\partial y} \right) dD_e, \quad v, j = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

тогда система уравнений (14) переписется следующим образом

$$\sum_{v=1}^n c_v g_{vj} + \sum_{e=1}^N \int_{D_e} \omega_j(x, y) \Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) dD_e = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Это и есть нелинейная система алгебраических уравнений для определения узловых параметров  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , подлежащая численному решению на ПЭВМ, например, с использованием программного продукта Mathcad 2001. Professional.

Для решения систем уравнений в нем используется итерационный метод Левенберга-Маркарда, заимствованный из пакета алгоритмов MINPACK, разработанного в США. Этот метод является квазиньютоновским (разновидностью градиентного метода). Соответствующая численная процедура имеет ряд ограничений, например, число уравнений должно быть не более пятидесяти. Кроме того, необходимо учитывать, что более или менее сложная система нелинейных уравнений окажется не по силам не только пакету Mathcad, но и другим более мощным пакетам: Mathematica, Maple, Gauss и др. В этом случае будет выдано сообщение: решение не найдено. Можно также не обращаться к стандартным подпрограммам, а составить свою, используя, например, следующую идею. Система (16) содержит линейную и нелинейную части. Начинать ее решение следует с подсчета коэффициентов  $g_{\nu j}$ ,  $\nu, j = 1, 2, \dots, n$ . Само решение осуществляется методом последовательных приближений. Выбирается нулевое приближение  $(c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$ . Подсчитываются величины  $G_j^0 = \sum_{e=1}^N \int_{D_e} \omega_j(x, y) \Phi(x, y, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0) dD_e, j = 1, 2, \dots, n$ . Для определения

$(c_1^1, c_2^1, \dots, c_n^1)$  решается система линейных алгебраических уравнений. Далее процесс повторяется до выполнения некоторого условия его окончания. При рассмотрении примеров по реализации описанного алгоритма интересно, прежде всего, рассмотреть такие, для которых существуют точные аналитические решения задачи. Поэтому рассматривалась радиальная нелинейная фильтрация в круговом пласте к центральной скважине. Задавались дебит скважины  $Q$  и давление на контуре питания  $p_k$ . Брались линейный и экспоненциальный законы изменения проницаемости

$$k_1 = k_{10}(1 + \alpha r), k_1 = k_{10} \exp \alpha r, k_{10}, \alpha = const. \quad (17)$$

Определялось поле давлений пласта. При расчете примеров распределения давлений считались заданными и с помощью функций  $k_1$  вида (17) ставились данные Коши. Затем реализовывалась предлагаемая численная процедура. Полученное приближенное решение сравнивалось с точным в узловых точках. Расчеты показали вполне удовлетворительные результаты. Такие точные решения могут быть использованы не только для оценки погрешности приближенных методов, но и для построения индикаторных диаграмм  $\Delta p = f(Q)$ . При разработке месторождений их строят достаточно часто. Такая диаграмма показывает зависимость дебита скважины от депрессии  $\Delta p$  и характеризует производительность скважины и призабойную зону пласта. Уравнение индикаторной диаграммы для кругового трещиновато-пористого с постоянными  $k_1, k_2$  в случае, когда основное уравнение фильтрации имеет вид (5) записывается

$$\Delta p = p_k - p_c = \frac{\mu Q}{2\pi h k_2} \ln \frac{r_k}{r_c} - \frac{\mu}{2\beta k_2} \left( \frac{k_1}{k_2} + 1 \right) (r_k - r_c) + \frac{\mu(k_1 + k_2)}{2\beta k_2^2} \left[ \sqrt{r_k(r_k - eQ)} - \right.$$

$$-\sqrt{r_c(r_c - eQ)} + \frac{eQ}{2} \ln \frac{(\sqrt{r_k - eQ} - \sqrt{r_k})(\sqrt{r_c - eQ} + \sqrt{r_c})}{(\sqrt{r_k - eQ} + \sqrt{r_k})(\sqrt{r_c - eQ} - \sqrt{r_c})}. \quad (18)$$

Здесь обозначено:  $e = 2\beta k_1 k_2 / \pi h (k_1 + k_2)^2$ ;  $r_k, r_c$  – радиусы контура питания и скважины;  $p_k, p_c$  – давления на них. Параметры индикаторной кривой выбирались так:  $h = 1 \text{ м}, r_k = 100 \text{ м}, r_c = 0,1 \text{ м}, \mu = 1 \text{ мПа} / \text{с}, \beta = 10^3 \text{ с} / \text{м}, k_1 = 10^{-12} \text{ м}^2, k_2 = 2 * 10^{-14} \text{ м}^2$ . Вычисления проводились в интервале изменения дебита от  $-6 * 10^{-4} \text{ м}^3 / \text{с}$  до нуля, а знак минус брался потому, что рассматривался случай нагнетательной скважины. Полученная кривая при шаге  $2 * 10^{-5}$  приведена на рис.1.

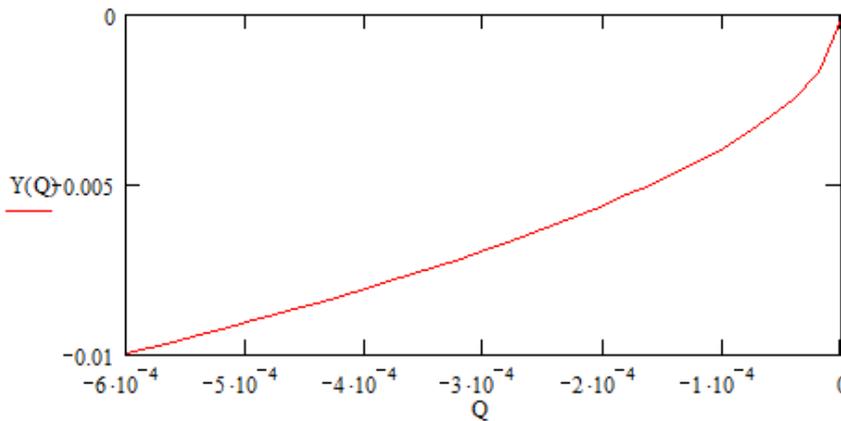


Рис. 1. Индикаторная диаграмма.

Вычисления велись в среде Mathcad. Можно отметить отчетливо нелинейный характер кривой вблизи начала координат. Она может быть использована для определения необходимой депрессии при выбранном дебите скважины (или наоборот).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев Г.В. Решение задач фильтрации в трещиновато-пористых средах при нелинейных законах движения жидкостей с использованием дискретных особенностей // Труды XIV межд. Симпозиума МДОЗМФ-2009, Харьков-Херсон, 2009.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1977, 404с.

Надійшла 30.05.2009.

© Голубев Г. В., 2009