

УДК 004.942

## Математическая модель процесса самомодуляции интенсивных гравитационных волн на глубокой воде

Е. В. Белкин, А. В. Киричок, В. М. Куклин

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

В статье рассматривается получение системы дифференциальных уравнений для описания развития многомодовой модуляционной неустойчивости интенсивной гравитационной волны, на глубокой воде. Приведены результаты моделирования, в которых показан эффект самомодуляции волнового поля. Найден характерные времена развития процесса неустойчивости. Предложен способ ускорения решения полученной системы путем организации параллельных вычислений.

**Ключевые слова:** самомодуляция волн, нелинейные эффекты, численный эксперимент.

В статі розглядається отримання системи диференціальних рівнянь для опису розвитку багатомодової модуляційної нестійкості інтенсивної гравітаційної хвилі на глибокій воді. Наведено результати моделювання, в яких показано ефект самомодуляції хвильового поля. Знайдено характерний час розвитку процесу нестійкості. Запропоновано спосіб прискорення чисельного розв'язку отриманої системи шляхом організації паралельних обчислень.

**Ключові слова:** самомодуляція хвиль, нелінійні ефекти, чисельний експеримент

In the paper we consider the system of differential equations to describe the development of multi-mode modulation instability of intense gravitational waves in deep water. The results of numerical solution, which shows the effect of modulation of the wave, are demonstrated. The characteristic time of the modulation instability process development is found. The technique to for accelerating the solution obtaining process through the organization of parallel computations is proposed.

**Key words:** modulation of waves, nonlinear effects, numerical experiment.

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Одной из актуальных проблем безопасности судоходства и нефтедобычи в океанах и морях является определение условий появления интенсивных поверхностных волн, способных привести к крупным катастрофам и авариям. Ранее появление таких волн считалось достаточно редким, и учитывать их появление и воздействие не считали нужным. Однако с развитием судоходства и появления индустрии морской добычи полезных ископаемых на границах шельфа появились многочисленные достоверные свидетельства появления таких аномальных волн. Аномально высокими волнами считаются волны, высота которых более чем в два раза превышает значимую высоту волн. Значимая высота волн рассчитывается для заданного периода в заданном регионе. Для этого отбирается треть всех зафиксированных волн, имеющих наибольшую высоту, и находится их средняя высота.

Построение эффективного математического описания океанского волнения, способного объяснять появление аномально высоких волн, является крайне важной для кораблестроения, а также для проектирования технических систем мониторинга океанского волнения. Однако на сегодняшний день не существует общепризнанного научного объяснения данному явлению, и также не существует однозначной математической модели, способной объяснить или

предсказать его появление [1,2]. Поэтому исследования в данном направлении являются актуальными.

Настоящая работа опирается на метод многомодового описания нелинейных взаимодействий, происходящих в волновых процессах в сплошных средах, описанных в работах [3-6]. Целью данной работы является построение математического описания нелинейного многомодового взаимодействия волновых возмущений в среде с сильной дисперсией, учитывающее явление самомодуляции волны под воздействием спектра возмущений.

## 2. Модуляция волны большой амплитуды в среде с сильной дисперсией

Будем полагать, что для медленно меняющихся комплексных амплитуд волновых возмущений справедливо уравнение типа уравнения Лайтхилла [7], для эволюции амплитуды интенсивной волны, медленной в сравнении с периодом колебаний

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i\hat{F}(ik_0 + \frac{\partial}{\partial x}, |A|^2) \cdot A + G \quad (1)$$

где  $\delta$  – линейный декремент затухания колебаний,  $G$  – внешний источник, поддерживающий только монохроматическую волну с частотой  $\omega_0$  конечной амплитуды  $A$ , с волновым числом, равным  $k = k_0$ . Причем  $\hat{F}(ik, |A|^2)$  – оператор, определяющий вклад пространственной дисперсии и интенсивности волны в её частоту.

Для гравитационных поверхностных волн на глубокой воде, представляющих интерес для судоходства в районах с высоким уровнем возбуждения океанского волнения, справедливо следующее выражение для частоты волн большой амплитуды [8]

$$\omega = \sqrt{gk} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} A^2 k^2 + \dots \right) \quad (2)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $A$  – амплитуда,  $k$  – волновое число. Решение ищем в виде  $A = \sum A_K(t) \cdot \exp\{i(k_0 + K)x\}$ . Тогда для волновых возмущений  $A_K$ , имеющих волновое число  $k_K = k_0 + K$  с учетом дисперсионного уравнения (2) уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial A_K}{\partial t} = -\delta A_K - i[\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0}] - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} (|A|^2 A)_K \quad (3)$$

При этом выражение  $(|A|^2 A)_K$  определяет нелинейное взаимодействие между волновым возмущением  $A_K$  и основной модой  $A_0$  в рамках диаграммы взаимодействия  $k_s + k_{-s} = k_n + k_{-n}$  и имеет вид:

$$\left( |A|^2 A \right)_K = \left( A_K \left( 2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2 \right) + A_{-K}^* \left( A_0^2 + \sum_{K \neq K, 0} A_K \cdot A_{-K} \right) \right) \quad (4)$$

Введем в рассмотрение действительные амплитуды и фазы:

$$A_K = |u_K| \exp(i\varphi_K). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) с учетом (4) и рассматривая отдельно действительную и мнимую части и произведя несложные упрощения, получаем выражение для действительных амплитуд и фаз возмущений, взаимодействующих с основной волной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_K}{\partial \tau} &= -\delta_d u_K + (1+K)^{2.5} \cdot [u_{-K} \cdot u_0^2 \sin \Phi_K + \\ &+ u_{-K} \sum_{K \neq K, 0} u_K u_{-K} \cdot \sin(\Phi_K - \Phi_K)] \\ \frac{\partial \varphi_K}{\partial \tau} &= -\frac{2[\sqrt{(1+K)} - 1]}{\alpha} - (1+K)^{2.5} \cdot [2u_0^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} u_{K'}^2 + u_K^2] + \\ &+ \frac{u_{-K}}{u_K} u_0^2 \cos \Phi_K + \frac{u_{-K}}{u_K} \sum_{K \neq K, 0} u_K u_{-K} \cdot \cos(\Phi_K - \Phi_K) \end{aligned} \quad (5)$$

где частоты мод  $\omega(K) - \omega_0 = \omega[k_0(1+K)] - \omega(k_0) = \sqrt{gk_0(1+K)} - \sqrt{gk_0}$  и использованы обозначения  $\Phi_K = 2\varphi_0 - \varphi_K - \varphi_{-K}$ ;  $\frac{\omega_0}{2}t = \tau/\alpha$ ;  $\alpha = k_0^2 |A_0|^2$ ;

$\tau = t \cdot \sqrt{gk_0} \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2}$  и для удобства сделана замена  $K \rightarrow K/k_0$ . Здесь следует различать моды с индексами  $K$  и  $K$ , соответственно и фазы  $\Phi_K$  и  $\Phi_K$ .

Основная волна подвергается интегральному воздействию мод спектра, и поддерживается внешним источником  $G$ . Уравнения для модуля и фазы медленно меняющейся комплексной амплитуды основной моды, производя действия, аналогичные вышерассмотренным, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \delta u_0 + u_0 \cdot \sum_{K \neq K, 0} u_K u_{-K} \cdot \sin \Phi_K &= G \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -u_0^2 - 2 \sum_{K \neq 0} u_K^2 - \sum_{K \neq 0} u_K u_{-K} \cdot \cos \Phi_K \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) образуют систему из  $2N+2$  дифференциальных уравнений, достаточную для описания взаимодействия основной волны и плотного спектра возмущений из  $2N$  мод, с волновыми числами симметричными волновому числу основной волны.

Для удобства решения можно перейти к целочисленным индексам  $K \rightarrow K_m$ ,  $u_K \rightarrow u_m$ ,  $\varphi_K \rightarrow \varphi_m$ ,  $K_m = m \cdot \Delta K / k_0$  где  $\Delta K = \frac{2K_{Max}}{N}$  и  $m = \pm(1, 2, \dots, N)$ , причем  $K_{Max} / k_0 = \sqrt{2}k_0 |A_0| = \sqrt{2} \cdot \alpha^{1/2}$ . Выражение  $K_{Max}$  определяет область развития спектра неустойчивости.

Система уравнений (5,6) может быть решена численно. Начальные условия для выбираются исходя из физических соображений (амплитуда основной волны нормирована на единицу, начальные амплитуды и фазы возмущений случайны, значение отношения декремента поглощения к величине максимального инкремента (степень превышения волной порога

неустойчивости) выбирается в интервале  $\delta \in [0.05; 0.5]$ , соответственно, для нормировки амплитуды основной волны, уровень внешней накачки  $G$  принимается равным  $\delta$ )

### 3. Результаты численного моделирования процесса самомодуляции.

Рассмотрим систему (5-6) с точки зрения доказательства единственности решения. Учитывая несимметричность стоксовой и антистоксовой части спектра неустойчивости, частное амплитуд, стоящее в уравнении для производной фазы  $\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}$  требует более тщательного рассмотрения. Согласно теореме 2.6 [9] система (5-6) будет иметь единственное решение при  $u_m > 0$  для всех  $m$ , участвующих в рассмотрении. Для обеспечения устойчивости расчетной схемы необходимо контролировать значения амплитуд мод и исключать из учета моды, амплитуды которых приближаются к нулю вместе со своими производными по времени. Методика исключения неактивных мод из расчетной схемы рассмотрена в работе [5]. Там же показана применимость рассматриваемой методики.

Верификация расчетного алгоритма проведена по аналогии с работой [6], а именно рассмотрены энергетические показатели системы при отключении внешнего источника энергии (рис 1, а) и при переводе системы в консервативное состояние (рис 2, б)

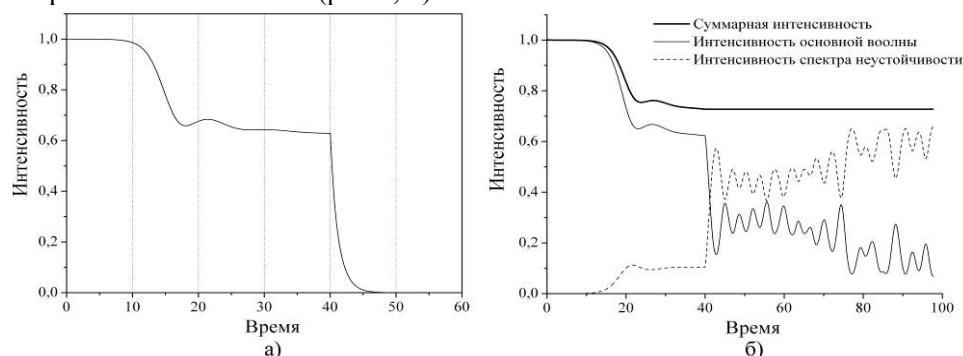


Рис 1. Верификация расчетного алгоритма: а) – затухание процесса при отсутствии внешнего источника; б) – сохранение внутренней энергии системы

Результаты численного решения системы (5,6) показывают рост несимметричного спектра возмущений, при этом наблюдается модуляция основной волны под воздействием мод последнего. К данной модели применена методика экспресс-анализа волнового поля, применимость которой обсуждалась в [6]. Анализ поля колебаний позволил выделить короткоживущий всплеск модуляции, амплитуда которого превышала значимую высоту волны более чем в два раза (рис 2).

Построение зависимости амплитудных показателей от времени позволяет ответить на вопрос о характерном времени появления значительных всплесков модуляции волнового поля, а, следовательно, найти наиболее вероятную пространственную область их появления (см. рис. 3).

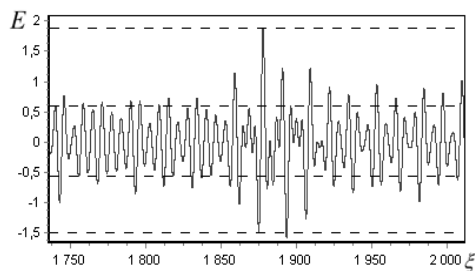


Рис. 2. Внезапный всплеск амплитуды волнового поля, зафиксированный в результате численного эксперимента

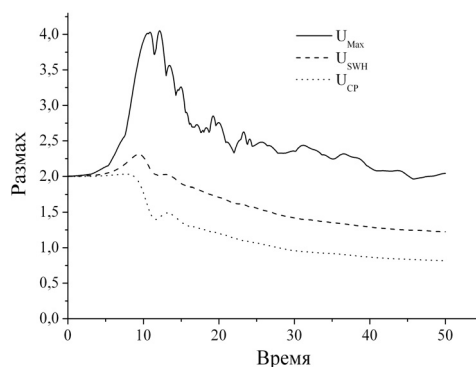


Рис. 3. Зависимость амплитудных характеристик поля от времени развития процесса  
 $U_{Max}$  – максимальная высота,  $U_{SWH}$  – значимая высота,  $U_{CP}$  – средняя высота.

Вычислительная сложность рассматриваемой модели находится в квадратичной зависимости от числа степеней свободы (количества мод). Для обеспечения лучшего соответствия моделируемого процесса в расчетах необходимо использовать большое число мод. При использовании современных многоядерных и многопроцессорных вычислительных платформ существенный выигрыш в скорости может быть получен путем применения параллельных вычислений. Структура системы уравнений позволяет построить простую и эффективную схему параллельных вычислений.

Полный цикл вычислений дифференциалов для уравнений с индексами от  $-N$  до  $N$  разбивается на  $Q$  независимых циклов по числу желаемых потоков вычислений. При этом границы циклов  $N_q^{begin}$  и  $N_q^{end}$  вычисляются для обеспечения равномерной вычислительной нагрузки на каждый исполняемый поток, как  $N_q^{begin} = \left\langle -N + \frac{2N}{Q}q \right\rangle$  и  $N_q^{end} = \left\langle -N + \frac{2N}{Q}(q+1) \right\rangle$ , где  $Q$  – количество потоков,  $q = [0..Q-1]$  – номер потока вычислений,  $\langle \rangle$  – операция взятия целой части. При использовании данной схемы разбиения разумно требовать, чтобы количество потоков было много меньше количества уравнений в системе, т.е.  $Q \ll 2N$ . В противном случае, расходы процессорного времени на обслуживание потоков могут становиться больше, чем выигрыш от их использования.

#### 4. Выводы.

Получена система дифференциальных уравнений для описания развития многомодовой модуляционной неустойчивости интенсивной гравитационной волны, на глубокой воде. Приведены результаты моделирования, в которых показан эффект самомодуляции волнового поля. Найдены характерные времена развития процесса неустойчивости, что позволяет определить возможную пространственную область появления аномальных всплесков самомодуляции. Предложен способ ускорения решения полученной системы путем организации параллельных вычислений. Предложенная модель многомодового взаимодействия может применяться в системах спутникового мониторинга океанского волнения для заблаговременного обнаружения опасных для судоходства зон.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pelinovsky E. Rogue Waves in the Ocean / С. Kharif, E. Pelinovsky, A. Slunyaev. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2009.
2. Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теории и моделирование / Пелиновский Е.Н. // "Успехи современного естествознания" №9 2007 –М.: ИД «Академия Естествознания» – 2007., с 113.
3. Куклин В. М. Образование самоподобных пространственных структур в модуляционно-неустойчивых средах / В. М. Куклин // Электромагнитные явления. – 2001. – Т. 4, № 1 (13). – С. 85-100
4. Белкин Е.В. Моделирование развития модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде / Белкин Е.В., Куклин В.М.// Вісник ХНУ ім. В.Н.Каразіна.. – Сер. «Ядра, частинки, поля.» – 2008. – № 794, випуск 1 (37). с. 51-56.
5. Белкин Е. В. Анализ численной модели модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде/ Белкин Е.В., Гуштин И.В.// Вісник ХНУ ім. В.Н.Каразіна.– Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2008 – № 809 (9). с. 20-31.
6. Белкин Е. В. Построение и анализ усложненной модели неустойчивости волны конечной амплитуды с использованием модели волновых возмущений Лайтхилла / Белкин Е.В. // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» № 847(10), 2009, с. 3-15
7. M. J. Lighthill. / J.Inst. Math. Appl. 1965, V.1, N.2. p.269-306
8. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В. И. Карпман – М.Наука. 1973. – 175с
9. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / Тихонов А.Н. Васильева А.Б., Свешников А.Г. – М.: Наука, 1980. – 231 с.

---

Надійшла у першій редакції 01.04.2010, в останній - 03.04.2010.

© Е. В. Белкин, А. В. Киричок, В. М. Куклин, 2010