УДК 519.81

Методологическая предпочтительность интервальных экспертных оценок при принятии решений в условиях неопределенности

Ю. Н. Бардачев, В. В. Крючковский, Т. В. Маломуж
Херсонский национальный технический университет, Украина

В работе показано, что при переходе к непосредственно точечной оценке сложных альтернатив, более естественными для экспертов и корректными с точки зрения получаемых результатов являются интервальные оценки, которые позволяют до последнего момента сохранить полноту информации о множестве возможных решений.

Ключевые слова: *интервальные оценки, принятие решений, неопределенность.*

В роботі показано, що для переходу безпосередньо до точкової оцінки складних альтернатив, більш природнім для експертів та коректним з точки зору одержуваних результатів є інтервальні оцінки, які дозволяють до останнього моменту зберігати повноту інформації про множину можливих розв’язків.

Ключові слова: *інтервальні оцінки, прийняття рішень, невизначеність.*

The work shows that at making dotted estimations of complex alternatives it is more natural for experts and correct from the point of view of given results to use interval estimates that allow to maintain the completeness of information on a set of possible outcomes till the latest moment.

Key words: *interval estimations, decision making, uncertainty.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В теории принятия решений термин «неопределенность» отражает не столько неопределенность реального материального мира, сколько уровень наших знаний, понимания, изученности различных процессов, их взаимосвязи, возможности и точности измерений различных величин. Это означает, что следует говорить не о неопределенности реальной ситуации принятия решений, а о неопределенности абстрактной модели, на основе которой принимается решение. При этом определяющее значение для точности модели имеет качество исходной экспериментальной выборки, которое определяется НЕ-факторами [1]. В качестве НЕ-факторов выступают неточность измерений и неполная наблюдаемость компонент входного и выходного воздействий, неконтролируемые случайные воздействия, статистическая неоднородность экспериментальной последовательности, неполнота и неоднозначность знаний о проблемной области и решаемой задаче и др.

Еще одним значимым НЕ-фактором является несогласованность локальных моделей. Проблема связана с тем, что в силу различных причин: вычислительных, функциональных, узкой специализации аналитиков и т.д., основным методом анализа сложных систем является декомпозиция на условно-независимые подсистемы (задачи), каждая из которых моделируется отдельно и затем производится интеграция результатов. Реализация такого подхода порождает ряд дополнительных НЕ-факторов: неточность и неполнота ограничений, определяющих требования к локальным моделям; несогласованность их входов-выходов; разнородность абстрактных языков описания; несогласованность локальных оптимальных решений и т.д. Таким образом, можно утверждать, что любая абстрактная модель является принципиально неточной.

С учетом этого утверждения остановимся на важнейшем этапе процедуры принятия решений – на формировании критерия оценки эффективности, т.е. метрики, в которой производится сравнение «качества» допустимых решений $x \in X$.

В условиях многокритериальности наиболее перспективным подходом к решению проблемы оценивания является формирование обобщенной скалярной многофакторной оценки, т.е. функции полезности *P(x)*, в виде полинома Колмогорова-Габора [2,3]:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j k_j(x) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ji} k_j(x) \cdot k_i(x) + ..., \tag{1}$$

где $k_j(x)$, $k_i(x)$ – приведенные к безразмерному виду и одинаковому интервалу возможных значений, частные критерии;

a_j , a_{ji} – безразмерные коэффициенты, для которых выполняются условия

$$0<<a_j,\ a_{ji} \le 1,\ \ \forall j,i \in \overline{1,m};$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ji} + ... = 1$$

Конструктивная реализация такого подхода сводится к определению конкретного вида (структуры) полинома и численных значений его параметров (коэффициентов *a*).

Как показано в работе [4], независимо от того, какой метод используется для определения параметров модели формирования функции полезности [5] − экспертного оценивания или компараторной идентификации − их значения имеют принципиально интервальный характер за счет разброса субъективных мнений экспертов. Это означает, что значения частных критериев *k(x)* также содержат неопределенность и поэтому известны только с большей или меньшей интервальной погрешностью. При этом неопределенность обусловлена наличием НЕ-факторов [1].

2. Анализ исследований и публикаций

Очевидно, первая попытка принятия решений в условиях неопределенности была предпринята Яковом Бернулли (1654-1705) в его книге «Искусство предположений» [6]. Именно на принцип недостаточного основания Я.Бернулли (который гласит, что если распределение вероятностей состояний природы неизвестно, то нет причин считать их различными) опирается критерий Байеса-Лапласа. Возможно, самый большой вклад в развитие теории принятия решений в условиях неопределенности внес А.Вальд [7].

Отметим также работы Сэвиджа, Гурвица, Ходжа-Лемана [8]. Важнейшее понятие теории принятия решений в условиях неопределенности, а именно «оптимальность по Парето», было введено итальянским экономистом и социологом Вильфредо Парето (1848-1923) [9]. Благодаря работе Л.Заде «Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений» (1973), неопределенность больше не рассматривается как некоторое внешнее препятствие в поведении сложной системы, а трактуется как её неотъемлемая характеристика. В работе [10] Л.Заде ввел класс множеств с неточно определенными границами – класс нечетких множеств («Fuzzy Sets”).

Другое направление исследований ориентировано на повышение достоверности и воспроизводимости результатов прогнозной экспертизы. Так, согласно методу Черчмена-Акоффа [11] альтернативы ранжируются по важности. В методе Терстоуна [12] для получения численных оценок значимости альтернатив используются парные сравнения. Метод фон Неймана-Моргенштерна [13] заключается в получении численных оценок альтернатив с помощью так называемых вероятностных смесей.

Общей чертой этих и других методов является ориентация на формирование точечных числовых оценок важности альтернатив. Это связано с тем, что эти методы обслуживают решение частной задачи оценивания важности частных критериев в модели аддитивной полезности, представляющей собой первое слагаемое в формуле (1).

3. Изложение основного материала

В отличие от описанного выше подхода, основанного на замещении интервальных неопределенностей некоторыми гипотетическими стохастическими или нечеткими предположениями ЛПР, что позволяет, в конечном счете, получить точечные оценки «качества» допустимых альтернатив, в настоящее время развивается подход, основанный на непосредственном анализе интервалов [14].

Принципиальная особенность процесса оценивания заключается в том, что в качестве исходной информации выступают индивидуальные оценки экспертов, которые затем некоторым образом усредняются (согласовываются). Формирование точечной количественной экспертной оценки основано на гипотезе, что усреднение субъективных индивидуальных мнений позволяет получить оценку, приближающуюся к объективной.

Вместе с этим очевидно, что из-за несовпадения исходных индивидуальных оценок, все экспертные оценки, независимо от метода их вычисления, носят не точечный, а интервальный характер. Границы интервала возможных значений определяются крайними индивидуальными оценками, а анализ группирования оценок дает некоторую информацию о распределении индивидуальных оценок внутри интервала.

Стремление преодолеть недостатки экспертного оценивания (возможная заинтересованность в определенном конечном результате, оказание на экспертов авторитарного давления, зависимость конечных результатов от методологии проведения экспертизы и обработки исходных оценок экспертов и др.) привело к разработке метода компараторной идентификации [15]. Метод основан на факте, что квалифицированные эксперты способны эвристически принимать эффективные решения в сложных многокритериальных ситуациях, а также ранжировать решения в порядке убывания их «полезности» [16]. На основе этого разработаны процедуры ординальной классификации, которые хорошо зарекомендовали себя на практике при принятии и реализации решений [17].

Формальная постановка задачи компараторной идентификации модели многофакторного оценивания состоит в следующем. Задано множество допустимых решений $x_i \in X$, $i = \overline{1,n}$, каждое из которых характеризуется одинаковым по структуре кортежем $k(x_i) = \langle k_j(x_i) \rangle$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$. ЛПР или эксперт на основе анализа доступной информации эвристически определяет лучшее решение $x_e \in X$ (первый вариант) или устанавливает на допустимом множестве решений X отношение строгого или нестрогого порядка (второй вариант)

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \sim x_4 \succ \cdots, \tag{2}$$

где $\succ, \sim$ соответственно знаки предпочтительности и эквивалентности.

Отсюда, руководствуясь методом многофакторного скалярного оценивания, который основан на гипотезе, выдвинутой Дж. Нейманом и О. Моргенштерном [13], получаем, что в первом варианте

$$P(x_e) > P(x_i), \qquad \forall i \neq e, \tag{3}$$

а во втором варианте

$$P(x_1) > P(x_2) > \cdots > P(x_n). \tag{4}$$

На основе этих соотношений для (3) можно записать систему неравенств

$$P(x_i) - P(x_e) \leq 0, \qquad i = \overline{1,n} \tag{5}$$

Аналогичную систему неравенств и равенств можно записать для последовательности (2). При этом замена строгих неравенств на нестрогие позволяет определить границы множества, которое гарантированно включает в себя полиномиальную модель формирования функции полезности, удовлетворяющую последовательностям (3) и (4). Эти последовательности играют роль обучающей и проверочной экспериментальной выборки.

Не останавливаясь более подробно на методах компараторной структурно-параметрической идентификации, подчеркнем следующий важный факт. Как показано в работе [4], для любой допустимой фиксированной полиномиальной структуры многофакторного скалярного оценивания (1) весовые коэффициенты относительной важности частных критериев или их суперпозиций являются интервальными величинами, границы которых определяются (5).

В рамках подхода, основанного на непосредственном анализе интервалов на всех промежуточных этапах вычислений и анализа, рассматриваются интервальные величины, заданные только значениями границ интервала. В терминах задачи принятия решений это означает, что показатели эффективности решения вычисляются в виде интервальных значений и только на последнем этапе принятия решений в случае необходимости трансформируются в точечные решения. Это позволяет сохранить до последнего момента полноту информации о множестве возможных решений.

Кроме того, при переходе к непосредственно количественной оценке сложных альтернатив, например, многокритериальной функции полезности, более естественным для экспертов и корректными с точки зрения получаемых результатов являются интервальные оценки, когда указывается верхняя $a_i^{\max}$ и нижняя $a_i^{\min}$ границы оценки i-ой альтернативы.

Конечная цель задачи принятия решений заключается в выборе из допустимого множества решений X единственно наилучшего по выбранным частным критериям $k_j(x)$

$$x^\circ = \arg\underset{x\in X}{extr}\{k_j(x)\}\,, \qquad j=\overline{1,m}\,.$$

В условиях неопределенности эта задача может быть решена двумя способами:

- синтезируется оптимизационная модель выбора решений, проводится её анализ, в результате которого выявляются все возможные неопределенности и определяются их количественные и качественные характеристики. Все выявленные неопределенности детерминизируются и исходная задача трансформируется в детерминированную оптимизационную задачу, которая решается классическими методами математического программирования. Но при таком подходе теряется очень важная системная информация об общем интервале возможных значений полезности (эффективности) альтернативных решений, а также о взаимосвязи и взаимовлиянии неопределенностей.

- вычисляются интервальные скалярные значения полезности для всех альтернативных решений или непосредственно экстремальное решение и его интервальное значение полезности. При этом учитываются все интервальные неопределенности как параметров, так и переменных модели оценивания полезности решений. Затем на основе полученной информации производится детерминизация (выбор точечного решения). Реализация этого подхода связана с необходимостью вычисления обобщенных интервальных значений полезности по модели, которую получаем из модели (1) следующим образом. В расширенном пространстве переменных полином Колмогорова-Габора является линейным по параметрам [18]. Это означает, что если в полиноме заменить мультипликативные и степенные функции частных критериев переменными $z_i(x)$, то его можно представить в виде линейной аддитивной формы

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i z_i(x)\,.$$

С учетом интервальной неопределенности исходной информации модель оценивания скалярной полезности многокритериальных альтернатив будет иметь вид

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\,\overline{z_i}(x)\,, \qquad (6)$$

где знаками (−) обозначены интервальные неопределенности.

Независимо от формы представления исходной информации (в виде точечных или интервальных количественных оценок) в общем случае возникает необходимость ее предварительной обработки с целью приведения к стандартизованной форме. Здесь имеется в виду тот факт, что стремление повысить универсальность методов экспертного оценивания и сделать их инвариантными конкретной предметной области привело к широкому распространению измерений в бальных шкалах [19] и формированию относительных оценок, что обеспечивается, без потери общности, выполнением условий:

$$0 \le a_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 .$$

Переход к натуральным показателям обеспечивается в случае необходимости масштабированием относительных оценок, что, в свою очередь, послужило толчком к развитию интервального анализа [14].

Если оценки экспертов формируются в виде интервальных значений, то это означает, что экспертам предложена некоторая бальная шкала с фиксированным количеством баллов B (например, 10), но оценка важности каждой альтернативы x_i задана в виде интервала $\left(b_i^{\min}, b_i^{\max}\right)$. Переход к нормализованным интервальным оценкам a_i осуществляется по формулам

$$a_i^{\min} = \frac{b_i^{\min} - B_i^{\min}}{B_i^{\max} - B_i^{\min}}; \qquad a_i^{\max} = \frac{b_i^{\max} - B_i^{\max}}{B_i^{\max} - B_i^{\min}},$$

где $B_i^{\min}$ и $B_i^{\max}$ – соответственно минимальное и максимальное значения бальной оценки (например, для интервала [0,10] $B_i^{\min}$=0, $B_i^{\max}$=10). В результате для каждого из j экспертов получим кортеж интервальных оценок вида

$$A_j = \left\langle \left[a_i^{\min}, a_i^{\max}\right]_j, i = \overline{1,n} \right\rangle, \quad j = \overline{1,n} .$$

В данном случае каждый интервал $\left[a_i^{\min}, a_i^{\max}\right]_j$ соответствует предпочтению одного эксперта.

Для повышения информативности возможных значений внутри интервала используют метод объективной информации или, в случае её недостаточности, метод замещения неопределенности опытом специалиста-эксперта. В большинстве случаев эти два метода используют совместно и дополняют друг друга. Обычно внутри интервала имеется несколько точечных или интервальных оценок. Характер их группирования и распределения на интервале несет ценную информацию для определения предпочтительности различных значений оценок параметров. Поэтому анализируемый интервал обычно разбивается на нечетное количество N равных интервалов

$$\Delta a_i = \frac{a_i^{\max} - a_i^{\min}}{N},$$

где N=3 или N=5 в зависимости от величины интервала.

После выполнения разбиения строится гистограмма. В случае точечных индивидуальных оценок высота каждого столбца равна количеству n_i оценок, попавших в каждый из подинтервалов. При интервальных индивидуальных оценках число n_i равно количеству интервалов, которое полностью или частично попадает в подинтервал Δa_i. На основе полученных гистограмм решается задача определения предпочтительности значений параметров на интервале.

При анализе гистограмм распределения индивидуальных оценок параметров на интервале возможны следующие ситуации

- при малом количестве (от 1 до 5) значений (точечных или интервальных) нельзя делать статистические выводы, так как они будут иметь очень низкую доверительную вероятность, поэтому в данном случае делаем эвристические выводы. Если точки рассеяны по интервалу сравнительно равномерно, то возможны два эвристических решения:

1) возможные значения внутри интервала распределены по закону равной вероятности;

2) предпочтения внутри интервала не определены.

Оба случая означают, что аналитиком назначена толерантная функция принадлежности $\mu(a_i)$ нечеткому множеству «лежит в интервале от $a_i^{\min}$ до $a_i^{\max}$».

- при среднем количестве оценок (от 6 до 12) невозможно сделать адекватные статистические выводы. Поэтому в этом случае имеем также два эвристических заключения:

1) если значения индивидуальных оценок рассеяны по интервалу сравнительно равномерно, то принимаем равномерную функцию принадлежности;

2) если не равномерно, то принимаем треугольную или трапециевидную функцию принадлежности.

- при большом количестве значений (более 15) строим диаграмму и делаем статистические выводы, т.е. аппроксимируем её функцией плотности распределения нормальной случайной величины и определяем доверительную вероятность.

Задача сводится к тому, чтобы аппроксимировать гистограмму функцией плотности нормального распределения случайной величины

$$f(a_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a_i - m)^2}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

и подобрать, исходя из опытных данных, математическое ожидание m и среднее квадратичное отклонение σ.

Параметры m и σ, входящие в выражение (7), выбирают так, чтобы наилучшим образом согласовать аппроксимирующее аналитическое распределение со статистическим. При этом можно использовать различные методы, например, метод моментов [20], который состоит в том, чтобы математическое ожидание и дисперсия у выравниваемого и выравнивающего распределений совпадали.

Не останавливаясь на методах и средствах определения многофакторных оценок альтернатив в условиях интервальной неопределенности параметров и факторов, а также ранжирования альтернатив на основе полученных оценок, в данной статье отметим следующее. Решение ряда задач связано с проблемой определения экстремального значений многофакторных оценок альтернатив.

Наиболее известной задачей этого класса является задача многокритериальной оптимизации, формальная запись которой имеет вид:

$$x^{\circ} = \arg \underset{x \in X}{extr}\, P(x) \,. \tag{8}$$

С учетом (6) задача (8) определения экстремального значения функции в условиях интервальной неопределенности примет вид:

$$x^{\circ} = \arg[\underset{\{a_i^{\circ}\}, x \in X}{extr} (\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \cdot \overline{z_i}(x))]; \quad (9)$$

$$a_{\circ}^{\circ} \in [a_i^{\min}, a_i^{\max}], \quad \forall_i = \overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^{\circ} = 1 \quad (10)$$

Как показано в [21], для любой формы задания интервальной неопределенности можно определить соответствующие интервальные значения функции полезности *P(x)* альтернатив $x \in X$ (6) и предпочтения этих значений внутри интервала.

Однако, для конструктивного практического использования результатов необходимо произвести «детерминизацию» решения, т.е. обосновать правила выбора конкретного точечного значения $x^{\circ} \in [x_{\min}^{\circ}, x_{\max}^{\circ}]$. При решении этой задачи необходимо учитывать два критерия: абсолютное значение x° и степень его адекватности особенностям конкретной задачи. Таким образом, задача (9) – (10) является двухкритериальной со всеми вытекающими отсюда трудностями многокритериальной оптимизации. Учитывая особенности задачи, наиболее адекватным её решением является принцип последовательной оптимизации [22] по частным критериям в порядке убывания их важности. Мы хотели бы подчеркнуть, что при решении задачи (9) – (10) в принципе возможны два подхода:

- устранение интервальной неопределенности на этапе подготовки решения путем выбора точечных значений параметров $a_i^{\circ} \in [a_i^{\min}, a_i^{\max}]$ с учетом всех ограничений (10);

- получение интервального решения $\overline{x}^{\circ} = [x_{\min}^{\circ}, x_{\max}^{\circ}]$ в условиях неопределенности параметров a_i и затем выбор точечного решения $x^{\circ} \in [x_{\min}^{\circ}, x_{\max}^{\circ}]$. Выбор того или иного подхода основан на системологическом анализе особенностей конкретной задачи.

Предлагаемые подходы позволяют на основе учета конкретных особенностей модели многофакторного оценивания корректно перейти от случайных интервальных значений параметров $\overline{a_i}$ модели к их точечным оценкам. Это дает возможность трансформировать задачу оптимизации со случайными параметрами (9) – (10) в детерминированную задачу условной оптимизации.

Интервальными неопределенными величинами могут быть не только параметры модели многофакторного оценивания a_i, но и частично или полностью, характеристики оцениваемых альтернатив $k_j(x), j = \overline{1,m}$. Эти характеристики измерены в различных шкалах, имеют разную размерность, интервалы возможных значений, вид экстремума, степень и форму описания неопределенности. В этом случае вычисление многофакторных оценок альтернатив (6) и определение экстремального решения $x \in X$ (9) – (10) связано не только с детерминизацией параметров a_i, но и с необходимостью приведення характеристик $k_j(x)$ к изоморфному виду и учета их неопределенности. Приведение характеристик к изоморфному виду связано, во-первых, с трансформацией, при необходимости, различных видов неопределенности к одной форме и, во-вторых, их нормализацией, т.е. приведение к безразмерному виду, одинаковому интервалу измерения и обеспечением инвариантности и виду экстремума.

После нормализации характеристик $\bar{k}_j(x)$, вычисление многофакторных оценок альтернатив $x \in X$ (6) определяется правилами выполнения арифметических операций над интервальными неопределенными величинами [14].

Как показано выше, результаты расчета по любым моделям будут интервальными числами. В полной мере это касается моделей многофакторного оценивания.

Общим для всех интервальных величин является допущение о том, что границы интервалов известны, поэтому основой для их классификации являются вид и форма представления информации о характере распределения возможных значений внутри интервала. По этому признаку можно выделить статистическую, нечеткую интервальные неопределенности и интервальные числа. По степени информативности интервальные неопределенности можно ранжировать следующим образом:

$$\text{статистическая} \succ \text{нечеткая} \succ \text{интервальная}$$

неопределенности. Очевидно, что в качестве базовой можно принять только одну из субъективных форм представления неопределенности – нечеткую или интервальную. Такая трансформация связана с увеличением неопределенности при переходе от более информативных форм к менее информативным, что выражается в увеличении интервалов возможных значений. При этом возникает вопрос о величине погрешности определения обобщенного интервального значения полезности (6) при переходе от более информативных форм к менее информативным.

С этой целью в работе было проведено тестовое вычисление интервальных значений обобщенных функций полезности для различных видов интервальной неопределенности исходной информации. Проведено сравнение значений интервалов неопределенности и модальных (средних) значений полезности решения $P(x)$ при различных видах неопределенности исходных данных модели (6). Рассмотрены статистическая (в форме нормального и равновероятного законов распределения возможных значений), нечеткая (в виде нечетких R,L-чисел) и заданная в виде интервальных величин неопределенности. Чтобы обеспечить сравнимость результатов расчетов границы интервалов исходных данных и их величина принималась одинаковыми, а в качестве средних или модальных значений использовались их центры. Для упрощения расчетов и повышения их наглядности весовые коэффициенты частных критериев принимались детерминированными, а $k_i(x)$ задавались в интервальном виде.

Анализ результатов тестовых расчетов подтвердил, что в условиях интервальной неопределенности наиболее информативной является статистическая форма представления исходных данных. При этом во всех без исключения случаях нормальный закон распределения вероятности дает меньший интервал неопределенности по сравнению с законом равной вероятности в среднем на 75%. Однако, к мощности и качеству исходной статистической выборки, по которой определяются распределения, предъявляются значительно более высокие требования. С этих позиций объяснима близость интервальных результатов, полученных для исходных данных, распределенных по закону равной вероятности и заданных в виде интервальных величин. В первом случае интервалы меньше в среднем на 27%.

4. Выводы

Принципиальная особенность процесса оценивания заключается в том, что в условиях многокритериальности многофакторная оценка эффективности решения является не точечной детерминированной величиной, а интервальной неопределенной оценкой. Это обусловлено тем, что, во-первых, коэффициенты a_j независимо от метода их идентификации являются интервальными величинами, а во-вторых, значения частных критериев, полностью или частично, также носят интервальный характер. Последнее обусловлено тем, что любая система является открытой, т.е. взаимодействует с внешней средой (метасистемой), которая не контролируется локальной системой, а ЛПР не располагает полной информацией о её состоянии. Это, в свою очередь, означает, что все или часть показателей эффективности решений $k_j(x)$ являются интервально неопределенными. В работе показано, что если все интервальные неопределенности приведены к одному виду, то реализация задачи вычисления обобщенной скалярной оценки эффективности решений, известной как функции интервальной полезности (6), не вызывает затруднений, так как для каждого класса интервальных неопределенностей известны специализированные арифметики.

Таким образом, для перехода к непосредственно точечной оценке сложных альтернатив более естественными для экспертов и корректными с точки зрения получаемых результатов являются интервальные оценки, которые позволяют до последнего момента сохранить полноту информации о множестве возможных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нариньяни А.С. НЕ-факторы: неоднозначность (доформальное исследование) / А.С. Нариньяни // Новости искусственного интеллекта. – 2003. – № 5. – С. 58-69.
2. Ивахненко А.Г. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным / А.Г. Ивахненко, Ю.П. Юрачковский. – М.: Радио и связь, 1987. – 116 с.
3. Петров К.Э. Мультипликативно-аддитивная функция оценки полезности / К.Э. Петров // Радиоэлектротехника и информатика. – 2000. - № 4. – С.35-36.
4. Петров Э.Г. Модель выбора многокритериального решения при интервальном задании весовых коэффициентов / Э.Г. Петров, Л.В. Батней // Вестник Херсонского госуд. техн. ун-та. – 2002. - № 1(14). – С. 28-31.

5. Фишборн П. Теория полезности / П. Фишборн. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. II. Математика XVIII столетия. – М.: Наука, 1970. – 300 с.
7. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха. – М.: ИД «Вильямс», 2001. – 912 с.
8. Кунда Н.Т. Дослідження операцій у транспортних системах. Навчальний посібник / Н.Т. Кунда. – К.: ВД «Слово», 2008. – 400 с.
9. Крючковський В.В. Проблема прийняття рішень: історичні аспекти та сучасні підходи / В.В. Крючковський // Проблеми інформаційних технологій. – 2008. – № 2. – С. 76-85.
10. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и её применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. М.: – Мир, 1968. – 476 с.
11. Churchman C.W. Methods of Inquiry / C.W. Churchman, R.L. Ackoff. – St. Louis : Educational Publishers, 1950. – 134 p.
12. Thurstone L.L. The measurement of values / L.L. Thurstone. – Chicago : Univ. Chicago Press, 1959. – 268 p.
13. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. М.: Наука, 1970. – 124 с.
14. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
15. Овезгельдыев А.О. Компараторная идентификация моделей интеллектуальной деятельности / А.О. Овезгельдыев, Э.Г. Петров // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 5. – С. 48-58.
16. Выявление экспертных знаний /[О.П. Ларичев, А.М. Мечетов, Е.М. Мошкович, Е.М. Фрумс]. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
17. Larichev O.I. Decision support system for classification of finite set of multicriteria alternatives / O.I. Larichev, A.V. Kornev, D.Yu. Kochin // Decision support system. – 2002. – Vol. 33. – pp. 320-335.
18. Cover T.M. Geometrical and statistical of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition / T.M. Cover // IEEE Trans. On Electronic Computers. – 1965. – № 14. – pp. 326-334.
19. Панкова Л.А. Организация экспертизы и анализ экспертной информации / Л.А. Панкова, А.М. Петровский, М.В. Шнейдерман. – М.: Наука, 1984. – 120 с.
20. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – М.: Юнити-ДАНА, 2001. 543 с.
21. Петров К.Э. Компараторная структурно-параметрическая идентификация моделей скалярного оценивания / К.Э. Петров, В.В. Крючковский. – Херсон : Олди-плюс, 2009. – 294 с.
22. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / 1982. – 254 с.

Надійшла 01.04.2010.