

УДК 519.2:504.75

Об одном методе моделирования самоподобного стохастического процесса

Ж. В. Дейнеко, А. А. Замула, Л. О. Кириченко, Т. А. Радивилова
Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

В работе предложена математическая модель самоподобного стохастического процесса, являющаяся функциональным преобразованием фрактального броуновского движения и учитывающая как степень самоподобия, так и тяжесть хвоста распределения временных реализаций процесса. В статье продемонстрирована возможность применения данной модели для построения реализаций фрактального информационного трафика.

Ключевые слова: математическая модель, самоподобный стохастический процесс, фрактальное броуновское движение, показатель Херста.

У роботі запропоновано математичну модель самоподібного стохастичного процесу, що є функціональним перетворенням фрактального броунівського руху. Модель враховує як ступінь самоподоби, так і вагу хвоста розподілу часових реалізацій процесу. У статті продемонстрована можливість застосування даної моделі для побудови реалізацій фрактального інформаційного трафіка.

Ключові слова: математична модель, самоподібний стохастичний процес, фрактальний броунівський рух, показник Херста.

The mathematical model of self-similar stochastic process, which is a functional transformation of a fractal Brownian motion, is offered. The parameters of model are both the degree of self-similarity, and the heaviness of the tail of the probability distribution. The paper demonstrated the possibility of applying this model to construct realizations of fractal network traffic.

Key words: mathematical model, self-similar stochastic process, fractal Brownian motion, Hurst exponent.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Многие природные явления являются фрактальными структурами и процессами, статистическими по своему характеру. Такие явления изучаются самыми различными науками – от распределения галактик в астрономии до формирования облаков, климата и погоды, предсказания землетрясений в метеорологии; от полимеризации и окисления в химии до структуры легких и сосудистой системы человека, в физиологии зрительной системы и картин роста многих растений в биологии; от «языков», мешающих добыче нефти и структуры притоков, областей водосбора речных системы, частоты наводнений в геофизике до собственно физики, где фракталы и статистическое самоподобие встречаются в броуновском движении, поверхностях разломов, в анализе радарных сигналов, коагуляциях, перколяциях, ограниченной диффузией агрегации, диэлектрическом пробое, в исследованиях турбулентности и в других явлениях [1, 2, 3].

Как показали многочисленные исследования последних десятилетий, реализации большинства наблюдаемых в природе и технике динамических процессов имеют фрактальную геометрию. Фрактальность означает самоподобие, то есть, на разных масштабах временной ряд сохраняет свою

структуру. Чтобы показать самоподобие ряда, необходимо определить показатель H , называемый параметром Херста, который представляет собой меру самоподобия стохастического процесса. Показатель Хёрста H принимает значения от 0 до 1 и позволяет провести различие между случайными процессами с независимыми приращениями (при $H = 0,5$), со статистически зависимыми значениями, обнаруживающими так называемое персистентное (поддерживающее) поведение ($H > 0,5$), и со статистически зависимыми значениями, показывающими антиперсистентное поведение ($H < 0,5$). Для оценки параметра Херста существует множество методов, достаточно полный обзор которых представлен в [4].

Все вышеуказанное привело к появлению ряда моделей самоподобных стохастических процессов. Следует отметить отсутствие универсальной модели, которая могла бы использоваться для описания фрактальных процессов различной прикладной природы. Таким образом, разработка и усовершенствование моделей процессов, обладающих фрактальными свойствами, является актуальной и важной проблемой.

2. Нерешенные проблемы и цели работы

В настоящее время одними из наиболее распространенными на практике моделями фрактальной динамики являются модели, основанные на фрактальных точечных процессах или случайных величинах, распределение которых имеет тяжелые хвосты. Для моделирования экономических временных рядов, обладающих фрактальной структурой, часто применяются фрактальные модели авторегрессии и скользящего среднего (FARIMA). Эти модели имеют ряд недостатков, в том числе: недостаточную согласованность со свойствами и характеристиками реальных процессов; необходимость привлечения экспертов к подбору параметров в режиме отладки модели; зачастую громоздкий математический аппарат [5-8].

В качестве математической модели природных случайных процессов, обладающих фрактальными свойствами, часто рассматривается фрактальное броуновское движение (ФБД), которое нашло широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и теории сетевого трафика [1, 3, 5, 9]. Однако нормальный закон распределения, которым обладают реализации ФБД, не содержит тяжелых хвостов, характерных для распределений большинства фрактальных процессов.

Целью данной работы является разработка математической модели самоподобного стохастического процесса на основе ФБД, учитывающую как степень самоподобия, так и тяжесть хвоста распределения ряда. Модель должна использовать достаточно простой математический аппарат, позволяющий без участия экспертов по реальному временному ряду создать адекватный модельный ряд.

3. Необходимые теоретические сведения о самоподобных стохастических процессах

Поскольку терминология в данной области еще не устоялась, приведем основные понятия и определения [10-14].

Стохастический процесс $X(t)$ с непрерывной переменной времени называется самоподобным в узком смысле с параметром H , $0 < H < 1$, если для любого вещественного значения $a > 0$ справедливо выражение:

$$a^{-H} X(at) \doteq X, \quad (3.1)$$

которое понимается в смысле равенства распределений. Параметр H , называемый параметром Херста, представляет собой меру самоподобия стохастического процесса.

Стохастический процесс $X(t)$ является статистически самоподобным или строго самоподобным в широком смысле, если процесс $a^{-H} X(at)$ обладает теми же статистическими характеристиками второго порядка (математическим ожиданием, дисперсией и автокорреляционной функцией), что и $X(t)$:

$$\begin{aligned} M[X(t)] &= a^{-H} \cdot M[X(at)]; \\ D[X(t)] &= a^{-2H} \cdot D[X(at)]; \\ r_x(t, s) &= a^{-2H} \cdot r_x(at, as). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим понятие самоподобия для процессов с дискретным временем. Пусть $X = (X_1, X_2, \dots)$ – временная реализация стационарного в широком смысле случайного процесса дискретного времени $t \in N = \{1, 2, \dots\}$. Обозначим через $X^{(m)} = \{X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots\}$ – усредненный по блокам длины m процесс X , компоненты которого определяются равенством $X_t^{(m)} = \frac{1}{m}(X_{tm-m+1} + \dots + X_{tm})$, $m, t \in N$. Ряд $X^{(m)}$ называется агрегированным.

Процесс X называется самоподобным в узком смысле с параметром $0 < H < 1$, если справедливо выражение

$$m^{1-H} X^{(m)} \doteq X, \quad m \in N, \quad (3.3)$$

которое понимается в смысле равенства распределений.

Процесс X называется самоподобным в широком смысле с параметром H , если корреляционная функция агрегированного процесса не изменяется после усреднения по блокам длины m

$$r_m(k) = r(k), \quad m \in \{2, 3, \dots\}. \quad (3.4)$$

Самоподобные процессы при $H > 0,5$ обладают медленно (гиперболически) убывающей автокорреляционной функцией:

$$r(k) \sim k^{-\beta}, \quad (3.5)$$

где параметр β связан с показателем Херста соотношением $H = 1 - \beta/2$.

Одним из важнейших свойств большинства самоподобных процессов является наличие тяжелых хвостов их функций распределений, т.е. хвост распределения затухает по степенному закону:

$$P[\xi > x] \sim c \cdot x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Параметр α определяет степень тяжести хвоста. При $0 < \alpha < 2$ величина ξ обладает бесконечной дисперсией, а при $0 < \alpha < 1$ ее математическое ожидание

также бесконечно. Основное свойство случайной величины с тяжелым хвостом состоит в том, что она проявляет высокую изменчивость. Иными словами, выборка из такой случайной величины представляет собой большей частью относительно небольшие значения, однако также содержит и достаточное количество очень больших значений.

4. Обоснование математической модели

Рассмотрим хорошо известный фрактальный процесс броуновского движения. Гауссовский процесс $X(t)$ называется фрактальным броуновским движением с параметром H , $0 < H < 1$, если приращения случайного процесса $\Delta X(\tau) = X(t + \tau) - X(t)$ имеют гауссовское распределение:

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0\tau^H}} \cdot \int_{-\infty}^x \text{Exp}\left[-\frac{z^2}{2\sigma_0^2\tau^{2H}}\right] dz, \text{ где } \sigma_0 - \text{коэффициент диффузии.}$$

Фрактальное броуновское движение с параметром $H = 0,5$ совпадает с классическим броуновским движением. Приращения ФБД называются фрактальным гауссовским шумом (ФГШ). Дисперсия ФГШ подчиняется соотношению $D[X(t + \tau) - X(t)] = \sigma_0^2 \tau^{2H}$.

Приращения фрактального броуновского движения ΔX обладают свойством самоподобия в узком смысле, то есть случайные процессы $X(t + \tau) - X(t)$ и $a^{-H}(X(t + a\tau) - X(t))$ имеют одинаковые конечномерные распределения для любого $a > 0$.

Теорема. Приращения фрактального броуновского движения ΔX обладают свойством самоподобия в узком смысле, то есть $X(t + \tau) - X(t) \doteq a^{-H}(X(t + a\tau) - X(t))$, для любого $a > 0$.

Теорема и доказательство приведены в [15].

Существует несколько методов построения ФБД для случая дискретного времени. Одним из наиболее используемых на практике является метод последовательного случайного сложения Фосса. Метод включает в себя следующий пошаговый алгоритм [3]. Исходные значения координат $X(t_i)$ в моменты времени $t_i = 0, 1/2, 1$ равны нулю. На первом шаге к значениям координат $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_3)$ прибавляются случайные числа, выбранные из нормального распределения с нулевым средним и начальной дисперсией σ_1^2 . Средние значения времени на каждом интервале рассматриваются как дополнительные узлы на оси времени; значения координаты в них оцениваются интерполяцией. На следующем шаге ко всем координатам $X(t_i)$, ($t_i = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$) прибавляются случайные числа с нулевым средним значением и уменьшенной дисперсией $\sigma_2^2 = \frac{\sigma_1^2}{2^{2H}}$. На n -ом шаге алгоритма мы получаем значения реализации ФБД для $1 + 2^n$ значений времени t_i . Дисперсия слагаемых n -го поколения равна

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_{n-1}^2}{2^{2H}} = \frac{\sigma_0^2}{2^{2Hn}}. \quad (4.1)$$

Процесс, предложенный Фоссом, приводит к обобщенному броуновскому движению при любом разрешении. На рис. 1 представлены реализации ФБД, полученные методом Фосса.

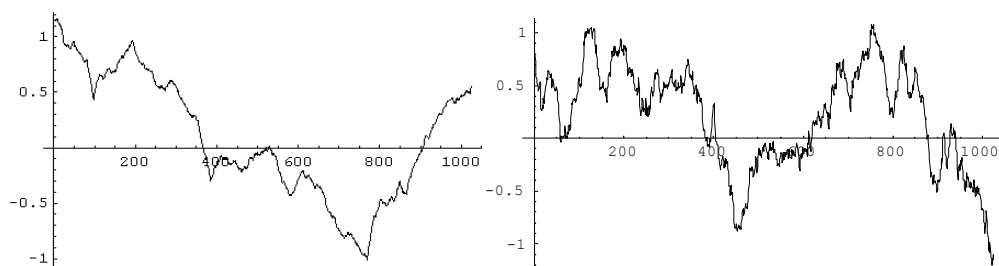


Рис. 1. Реализации ФБД, полученные методом Фосса. Справа $H=0,9$, слева $H=0,6$

Теоретически ФГШ является моделью самоподобного процесса с определенным показателем Херста и с соответствующей долгосрочной зависимостью. Однако эта модель обладает существенным недостатком: отсутствием тяжелых хвостов, характерных для многих природных процессов. На практике наиболее часто используемыми распределениями с тяжелыми хвостами являются распределения Парето, Коши, Леви и логарифмически нормальное распределение.

Величина η имеет логарифмически нормальное распределение $\text{Log}N(a, \sigma)$, если $\eta = \text{Exp}[\xi]$, где случайная величина ξ распределена нормально $N(a, \sigma)$. Плотность случайной величины η

$$p_\eta(y) = \frac{1}{y\sqrt{2a\sigma}} e^{-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0; \quad p_\eta(y) = 0, \quad y \leq 0. \quad (4.2)$$

Для случайной величины с логнормальным распределением математическое ожидание и дисперсия соответственно равны:

$$M[\eta] = e^a \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}}, \quad D[\eta] = e^{a^2} \cdot e^{\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1). \quad (4.3)$$

На рис. 2 приведены графики плотности логнормального распределения с разными параметрами a и σ . Тяжесть хвоста $P[\xi > x]$ зависит от отношения

$F[\eta] = \frac{D[\eta]}{M[\eta]}$, которое называется индексом дисперсии или фактором Фано.

Таким образом, величина $F[\eta]$ является количественной характеристикой тяжести хвоста логнормального распределения.

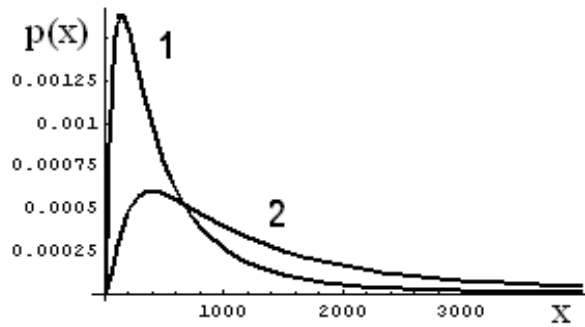


Рис. 2. Плотности логарифмически нормальных распределений, $F[\eta_2] > F[\eta_1]$.

В данной работе предложен подход, который основан на функциональном преобразовании ФГШ. Предложенное преобразование сохраняет долгосрочную зависимость случайного процесса и переводит его в самоподобный процесс с тяжелыми хвостами. В качестве случайного процесса, порождающего модельные реализации с заданными характеристиками самоподобия и тяжестью хвостов, предложено использовать следующее функциональное преобразование ФГШ:

$$Y(\tau) = b \cdot \text{Exp}[k \cdot X(\tau)], \quad (4.4)$$

где $X(\tau)$ – ряд приращений ФБД с заданным параметром H на интервале времени τ ; b, k – параметры, регулирующие тяжесть хвостов распределения.

Приращения ФБШ $X(\tau)$ имеют нормальное распределение $X \cong N(0, \sigma^2(\tau))$, с дисперсией $\sigma^2(\tau) = \sigma_0^2 \tau^{2H}$, где σ_0 – коэффициент диффузии. В этом случае $Y(\tau)$ имеет логарифмически нормальное распределение.

В работе доказано следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $X(\tau)$ – ряд приращений ФБД с параметром самоподобия H на интервале времени τ . Случайный процесс, являющийся экспонентой ФГШ, $Y(\tau) = \text{Exp}[X(\tau)]$ представляет собой самоподобный случайный процесс в узком смысле с тем же параметром Херста H , что и исходный ФГШ.

Доказательство. Для доказательства самоподобия в узком смысле нам необходимо показать, что выполняется свойство $Y(\tau) \doteq a^{-H} Y(a\tau)$, то есть что процессы $Y(\tau)$ и $a^{-H} Y(a\tau)$ имеют одинаковые одномерные функции распределения:

$$P(Y(\tau) < y) = P(a^{-H} Y(a\tau) < y). \quad (4.5)$$

Исходя из плотности распределения (4.2), левая часть выражения (4.5) равна:

$$P(Y(\tau) < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\tau^H}} \cdot \int_0^{\ln y} \text{Exp}\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2\tau^{2H}}\right] dz.$$

Правая часть выражения (4.5) равна:

$$\begin{aligned}
 P(a^{-H}Y(a\tau) < y) &= P(Y(a\tau) < a^H y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(a\tau)^H} \cdot \int_0^{\ln a^H y} \text{Exp}\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2(a\tau)^{2H}}\right] dz = \\
 &= \begin{cases} z = ua^H \\ u = za^{-H} \\ dz = a^H du \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a^H \tau^H} \cdot \int_0^{\ln y} \text{Exp}\left[\frac{-(ua^H)^2}{2\sigma^2 a^{2H} \tau^{2H}}\right] \cdot a^H du = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\tau^H} \int_0^{\ln y} \text{Exp}\left[\frac{-u^2}{2\sigma^2\tau^{2H}}\right] du.
 \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Числовые характеристики случайного процесса $Y(\tau) = b \cdot \text{Exp}[k \cdot X(\tau)]$, учитывая выражения (4.2, 4.3), имеют вид:

$$\begin{cases} M[Y(\tau)] = b \cdot \text{Exp}\left[\frac{1}{2}k^2\sigma^2(\tau)\right], \\ D[Y(\tau)] = b^2 \cdot \text{Exp}[k^2\sigma^2(\tau)] \left(\text{Exp}[k^2\sigma^2(\tau)] - 1\right); \end{cases} \quad (4.6)$$

или, используя величину индекса дисперсии $F[Y(\tau)]$:

$$\begin{cases} M[Y(\tau)] = b \cdot \text{Exp}\left[\frac{1}{2}k^2\sigma^2(\tau)\right], \\ F[Y(\tau)] = b \cdot \text{Exp}\left[\frac{1}{2}k^2\sigma^2(\tau)\right] \left(\text{Exp}[k^2\sigma^2(\tau)] - 1\right). \end{cases} \quad (4.7)$$

Решая систему алгебраических уравнений (4.7) относительно неизвестных b и k , получаем:

$$b = \frac{M[Y(\tau)]}{\sqrt{\frac{F[Y(\tau)] + M[Y(\tau)]}{M[Y(\tau)]}}}, \quad k = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{F[Y(\tau)] + M[Y(\tau)]}{M[Y(\tau)]}\right)}}{\sigma(\tau)}. \quad (4.8)$$

где $\sigma^2(\tau)$ – дисперсия ряда ФГШ $X(\tau)$.

При генерации ФБД методом Фосса величина $\sigma^2(\tau) = \sigma_0^2 \tau^{2H}$ представляет собой дисперсию разности случайных величин n -го поколения и зависит от длины моделируемого временного ряда и показателя Херста. Из соотношения (4.1), учитывая, что начальная дисперсия $\sigma_0^2 = 1$ и число точек первого поколения равно 3, получаем

$$\sigma^2(\tau) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2H(n-3)}, \quad \tau = 2^n. \quad (4.9)$$

Таким образом, в работе предложена математическая модель самоподобного случайного процесса $Y(t)$, стационарного в широком смысле и принимающего неотрицательные значения. Входными параметрами модели являются: степень самоподобия процесса (показатель Херста H); количественная мера тяжести хвоста распределения вероятностей (параметр $F(Y) = \frac{D[Y]}{M[Y]}$); математическое ожидание процесса $M[Y]$ и длина реализации τ .

5. Алгоритм моделирования реализаций

Алгоритм моделирования реализаций может быть сведен к следующей процедуре.

1. Для процесса $Y(t)$, обладающего свойствами самоподобия, находим оценки его характеристик по реализации длиной τ : математического ожидания

$$\bar{Y} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} Y(t), \quad \text{индекса дисперсии} \quad \tilde{F} = \frac{\frac{1}{\tau-1} \sum_{t=1}^{\tau} (Y(t) - \bar{Y})^2}{\bar{Y}} \quad \text{и параметра}$$

самоподобия \tilde{H} , который определяется одним из методов нахождения показателя Херста.

2. Строим реализацию фрактального гауссовского шума $X(\tau)$ на интервале длиной τ с заданным показателем $H = \tilde{H}$ и соответствующей дисперсией $\sigma^2(\tau)$;

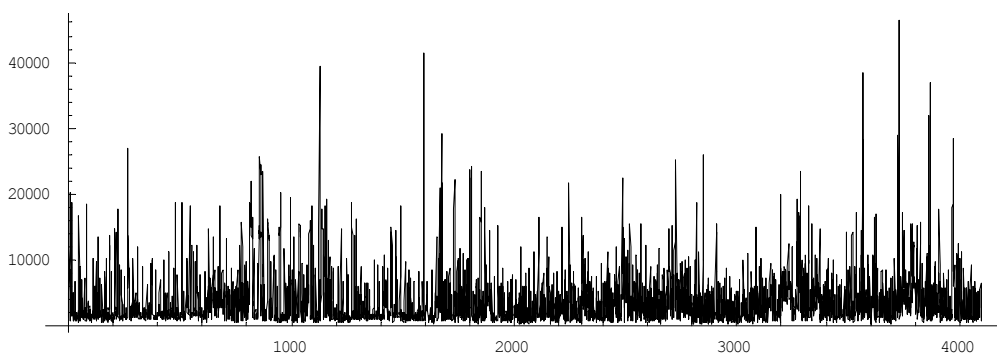
3. Значения параметров b и k находим по формулам (4.8):

$$b = \frac{\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\tilde{F} + \bar{Y}}{\bar{Y}}}}, \quad k = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{\tilde{F} + \bar{Y}}{\bar{Y}}\right)}}{\sigma(\tau)} \quad (5.1)$$

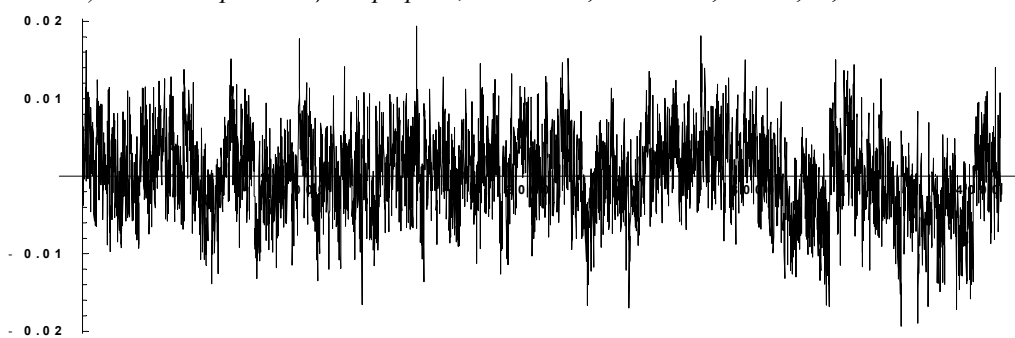
4. По формуле (4.4) преобразованием ряда ФГШ $X(\tau)$ получаем требуемую модельную реализацию процесса.

Продemonстрируем применение данной модели для построения реализаций сетевого компьютерного трафика. Многочисленные исследования процессов в сети Интернет показали, что статистические характеристики трафика обладают свойством самоподобия [5, 6, 11]. Самоподобный трафик имеет особую структуру, сохраняющуюся на многих масштабах – в реализации всегда присутствует некоторое количество очень больших выбросов при относительно небольшом среднем уровне трафика. Эти выбросы вызывают значительные задержки и потери пакетов. Традиционный анализ очередей, в основе которого лежит предположение о пуассоновском потоке, не может предсказывать производительность системы для самоподобного трафика, поэтому основным инструментом исследования и прогнозирования становится имитационное моделирование. Для проведения статистического моделирования, которое позволит рассчитать наиболее оптимальные параметры сети, необходима модель входного самоподобного информационного потока.

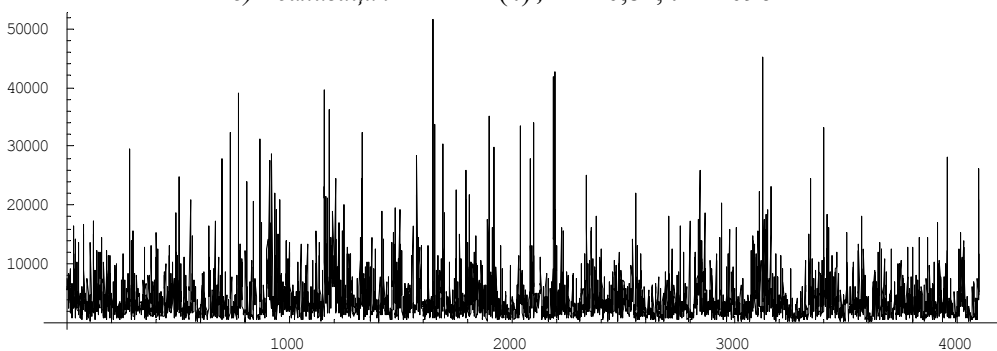
По реализации трафика длиной $\tau = 4096$, представленной на рис. 3а, находим оценки его математического ожидания $\bar{Y} = 3950$, индекса дисперсии $\tilde{F} = 4578$ и показателя Херста $\tilde{H} = 0,84$. Строим реализацию фрактального гауссовского шума $X(\tau)$ на интервале длиной τ с заданным показателем $H = \tilde{H}$ и соответствующим средним квадратическим отклонением $\sigma(\tau) = 0,0053$ (рис. 3б). В соответствии с формулами (5.1) находим значения параметров $b = 2688$ и $k = 543$. Преобразованием $Y(\tau) = b \cdot \text{Exp}[k \cdot X(\tau)]$ временной реализации ФГШ $X(\tau)$ получаем требуемую модельную реализацию процесса.



а) Исходная реализация трафика, $\bar{Y} = 3950$, $\tilde{F} = 4578$, $\tilde{H} = 0,84$, $\tau = 4096$



б) Реализация ФГШ $X(\tau)$, $H = 0,84$, $\tau = 4096$



в) Модельная реализация трафика, $Y(\tau) = b \cdot \text{Exp}[k \cdot X(\tau)]$, $b = 2688$, $k = 543$

Рис. 3. Построение модельной реализации

Адекватность моделей сетевого трафика была проверена путем имитационного моделирования, выполненного в сетевом симуляторе OPNET, которое показало, что модельные реализации приводят к таким же средним значениям потерь, временных задержек, длин очередей в буферах и других характеристик, которые образуются при прохождении по сети реального трафика [16].

6. Выводы по результатам исследования

В работе предложена математическая модель самоподобного стохастического процесса, являющаяся экспоненциальным преобразованием фрактального броуновского движения и учитывающая как степень самоподобия, так и тяжесть хвоста распределения временных реализаций процесса. Для моделирования применяется достаточно простой математический аппарат, позволяющий без участия экспертов по реальному временному ряду построить адекватный модельный ряд. Представленная математическая модель может быть использована для моделирования и анализа технических, экономических и других систем, обладающих свойствами самоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. Шредер М. Фракталы, хаос и степенные ряды. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005, 528 стр.
3. Федер Е. Фракталы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
4. Clegg R.G. A practical guide to measuring the hurst parameter // Computing science technical report. – 2005. – № CS-TR-916. – P. 125-138.
5. Шелухин О.И., Осин А.В., Смольский С.М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения // Под ред. О.И. Шелухина. М.: Физматлит, 2003. – 368 с.
6. Ryu B.K. Fractal network traffic: from understanding to implications // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 2001. – № 9(5). – P. 634-649.
7. Karasaridis A., Hatzinakos D. Network heavy traffic modeling using α -stable self-similar process // IEEE Transaction on Communications. – 2001. – № 7(49). – P. 1203-1214.
8. K. Torre, D. Delignières, and L. Lemoine. Detection of long-range dependence and estimation of fractal exponents through ARFIMA modelling. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 60(1):85-106, 2007.
9. Norros I. On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1995. – № 13(6). – P. 953-962.
10. Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., and Wilson D.V. On the self-similar nature of ethernet traffic // IEEE/ACM Transactions of Networking, 2(1), 1994. – P. 1-15.
11. Crovella M., Taqqu M., Bestavros A. Heavy-Tailed Probability Distribution in World Wide Web // A practical Guide to Heavy Tails: Statistical techniques and Application, 1998.

12. Cox D. R. Long-range dependence // A review in statistics : an appraisal proceedings 50-th anniversary conference, 3-5 oct. 1984 – Iowa, 1984. – № 2. – P. 55-74.
13. Beran J. Statistical methods for data with long-range dependence // Statistical Science. – 1992. – № 7(4). – P. 404-416.
14. Kantelhardt W. Fractal and Multifractal Time Series. – 2008: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.
15. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах, М.: Постмаркет, 2000. – 264 с.
16. Карпухин А. В., Кириченко Л.О., Радивилова Т.А. Исследование продуктивности сети и возникновения перегрузки при самоподобной нагрузке с помощью OPNET Modeler // Современные информационные и электронные технологии: 9-я междунар. науч.-практич. конф., 19-23 мая 2007 г.: труды конф. – Одесса, 2008. – С. 102.

Надійшла у першій редакції 07.04.2010, в останній - 10.04.2010.

© Ж. В. Дейнеко, А. А. Замула, Л. О. Кириченко, Т. А. Радивилова, 2010