УДК 519.6

К вопросу об описании полусхем средствами модальной логики

А. Г. Житарюк, Г. Н. Жолткевич

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье рассматривается вопрос о возможности представления полусхем как реляционных структур и описания их с помощью языка модальной логики. В работе установлено, что реляционная структура, задающая полусхему, не может быть описана с помощью языка модальной логики с сохранением системы аксиом полусхем.

Ключевые слова: *полусхема, реляционная структура, модальная сигнатура, фрейм, модель, бисимуляция, стандартная трансляция.*

В статі вивчається питання про можливість представлення напівсхем як реляційних структур та описання їх за допомогою мови модальної логіки. В роботі встановлено, що реляційна структура, яка задає напівсхему, не може бути описана засобами мови модальної логіки зі збереженням аксіом напівсхем.

Ключові слова: *напівсхема , реляційна структура, модальна сигнатура, фрейм, модель, бісимуляція, стандартна трансляція.*

The opportunity of a semi-schemes representation as a relational structure and its description by modal language is considered in the paper. Impossibility of a semischema relational structure to modal calculus translating with all semischema axioms satisfiability is proved.

Key words: *semi-scheme, relational structure, modal similarity type, frame, model, bisimulation, standard translation.*

Введение

Для решения задачи моделировании концептуальной структуры предметной области с целью ее последующего анализа в процессе разработки информационной системы в работе [1] авторами была предложена модель логической структуры предметной области, семантика которой определяется в терминах класса объектов, названных авторами полусхемами. Полусхема описывает понятии предметной области и структурные связи между ними и является корректной, если все определенные в ней понятия имеют не менее одного образца. Такая полусхема названа авторами схемой предметной области. Таким образом, схема может рассматриваться как структурно-логическая модель предметной области, поскольку корректно фиксирует только структурные отношения между понятиями.

В работе [2] авторами предложен метод моделирования полусхем средствами реляционных баз данных. В терминах реляционной модели данных сформулированы условия корректности модели и разработаны методы их проверки.

Поскольку полусхема фиксирует только имена понятий предметной области и отношения между ними, ее можно рассматривать как реляционную структуру. Как известно [3], для описания таких структур используется язык мультимодальной логики. В связи с этим возникает вопрос о возможности описания полусхем на языке мультимодальной логики.

1. Описание модальных языков

Модальные языки образуют класс синтаксически простых языков, которые обеспечивают внутреннюю проекцию на реляционных структурах. Их синтаксическая простота обеспечивает их растущую популярность, что привело к их использованию в многочисленных приложениях [5, 6]. Кроме того, модальная логика оказалась удивительно богатой математической структурой.

Под реляционной структурой понимается непустой набор объектов, на котором определено множество отношений. Учитывая широкий характер этого определения, реляционные структуры могут встречаться всюду. Фактически обо всех известных математических структурах можно думать как об реляционных структурах. Кроме того, реляционные структуры играют фундаментальную роль для моделирования во многих других дисциплинах, включая представление знания, компьютерную лингвистику, формальную семантику, информатику, философию и др.

Известно много альтернативных языков для изучения реляционных структур: наиболее известные из них – классические языки первого или второго порядков. В действительности, для каждого модального языка имеются соответствующие классические языки, которые описывают тот же самый класс реляционных структур. Но хотя и модальные и классические языки позволяют рассуждать о реляционных структурах, технически такие рассуждения отличаются.

Модальные языки используют понятие внутренней проекции, тогда как классические языки, с их кванторами и связыванием переменной, – пример использования внешней проекции на реляционных структурах. Несмотря на эту разницу, существует стандартная трансляция любого модального языка в соответствующий ему классический язык. Эта трансляция обеспечивает преобразование модальной модели к классической.

Поскольку, как известно, существует богатый запас важных реляционных структур, которые невозможно описать в рамках языка классической логики первого порядка, возникает необходимость использования языка второго порядка или, как альтернативы, модального языка первого порядка.

2. Цель работы

Целью настоящей работы является выяснение возможности построения описаний полусхем с помощью языка модальной логики – синтаксически простого, но в тоже время мощного инструментального средства для описания и исследования реляционных структур.

3. Обзор основных понятий модальной логики

Определение 1

Модальная сигнатура – это пара $\tau(O,\rho)$, где O не пустое множество и $\rho : O \to \mathbf{N}$. Элементы O называются модальными операторами и обозначаются $\Delta_0, \Delta_1 ...$ Функция ρ устанавливает для каждого модального оператора $\Delta \in O$ арность, показывающую множество аргументов, применимых к Δ.

Определение 2

Пусть τ - модальная сигнатура. τ***-фрейм*** – это кортеж F, содержащий следующие компоненты:

1. не пустое множество миров W ;
2. $\forall n \geq 0$ и $\forall \Delta \in \tau$ – n-арного модального оператора R_Δ является $n+1$-арным отношением.

Если $\rho(\Delta) = 0$ (т.е. Δ – нуль-арный модальный оператор), тогда R_Δ – унарное отношение.

Определим полусхему с помощью модальной логики.

Зададим множество W следующим образом. $W = C \cup R \cup Q$, C - множество имен понятий, R - множество имен ролей, Q - множество имен квалификаторов.

Для описание полусхемы определим следующие ноль-арные модальные операторы: $\Delta_{concept}$, $\Delta_{qualifier}$ и Δ_{role} .

А также определим модальные операторы $\Delta_{tc}(\phi)$, где $\rho(\Delta_{tc}) = 1$ и $\Delta_{cpv}(\phi_1, \phi_2)$, где $\rho(\Delta_{cpv}) = 2$.

Полусхемой назовем τ -фрейм $F(W, R_\Delta)_{\Delta \in \tau}$, где

$\tau = \{\Delta_{concept}, \Delta_{qualifier}, \Delta_{role}, \Delta_{tc}(\Delta_{qualifier}), \Delta_{cpv}(\Delta_{role}, \Delta_{concept})\}$.

$R_{\Delta_{concept}}$ выделяет из всех возможных имен W имена понятий предметной области.

$R_{\Delta_{qualifier}}$ выделяет из всех возможных имен W имена квалификаторов предметной области.

$R_{\Delta_{role}}$ выделяет из всех возможных имен W имена ролей предметной области.

$R_{\Delta_{tc}}$ ставит в соответствие именам понятий предметной области их квалификаторы, т.е.

$$(\forall x, y)\left(R_{\Delta_{tc}} xy \rightarrow R_{\Delta_{concept}} x \wedge R_{\Delta_{qualifier}} y \right)$$

$R_{\Delta_{cpv}}$ ставит в соответствие квалификаторам имена ролей и понятий предметной области, которые они определяют, т.е.

$$(\forall x, y, z)\left(R_{\Delta_{cpv}} xyz \rightarrow R_{\Delta_{qualifier}} x \wedge R_{\Delta_{role}} y \wedge R_{\Delta_{concept}} z \right)$$

Определим модель $M(F, V)$, где F - τ -фрейм $F(W, R_\Delta)_{\Delta \in \tau}$, а V - оценка с доменом $\Phi = \{p, q, r\}$ и областью $P(W)$.

$$V(p) = \{w \in W : w \| {-}\Delta_{concept}\}$$
$$V(r) = \{w \in W : w \| {-}\Delta_{role}\}$$
$$V(q) = \{w \in W : w \| {-}\Delta_{qualifier}\}$$

4. Соответствие модальной логики логике первого порядка.

Для τ - модальной сигнатуры и Φ - множества пропозициональных символов, допустим $L_\tau^1(\Phi)$ - язык первого порядка с равенством, который имеет унарные предикаты $P_0, P_1, \ldots$ соответствующие пропозициональным символам

$p_0, p_1, \ldots$ в Φ, и $(n+1)$-арный реляционный символ R_Δ для каждого n-арного модального оператора $\Delta \in \tau$.

Определение 3

Пусть x – переменная логики первого порядка. Стандартная трансляция ST_x преобразует модальные формулы в формулы первого порядка в $L^1_\tau(\Phi)$ следующим образом:

$$ST_x(p) = Px$$
$$ST_x(\perp) = x \neq x$$
$$ST_x(\neg\phi) = \neg ST_x(\phi)$$
$$ST_x(\phi \vee \psi) = ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi)$$
$$ST_x(\Delta(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = (\exists y_1)\ldots(\exists y_n)(R_\Delta x y_1 \ldots y_n \wedge ST_x(\phi_1) \wedge \ldots \wedge ST_x(\phi_n))$$
$$ST_x(\Diamond\phi) = (\exists y)(Rxy \wedge ST_y(\phi))$$
$$ST_x(\Box\phi) = (\forall y)(Rxy \to ST_y(\phi))$$

Построим соответствие между описанием полусхемы с помощью модальной логики, и описание с помощью логики первого порядка.

Множество миров W – множество имен.

$$ST_x(\Delta_{concept}) = R_{\Delta_{concept}} x = C(x)$$
$$ST_x(\Delta_{qualifier}) = R_{\Delta_{qualifier}} x = Q(x)$$
$$ST_x(\Delta_{role}) = R_{\Delta_{role}} x = R(x)$$

$$\begin{aligned}
ST_x(\Delta_{tc}(\Delta_{qualifier})) &= (\exists y)(R_{\Delta_{tc}} xy \wedge ST_y(\Delta_{qualifier})) = \\
&= (\exists y)((\forall x, y)(R_{\Delta_{tc}} xy \to R_{\Delta_{concept}} x \wedge R_{\Delta_{qualifier}} y) \wedge Q(y)) = \\
&= (\exists y)((\forall x, y)(R_{\Delta_{tc}} xy \to C(x) \wedge Q(y)) \wedge Q(y)) = \\
&= (\forall x, y)(R_{\Delta_{tc}} xy \to C(x) \wedge Q(y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ST_x(\Delta_{cpv}(\Delta_{role}, \Delta_{concept})) &= (\exists y, z)(R_{\Delta_{cpv}} xyz \wedge ST_y(\Delta_{role}) \wedge ST_z(\Delta_{concept})) = \\
&= (\exists y, z)(R_{\Delta_{cpv}} xyz \wedge R(y) \wedge C(z)) = \\
&= (\exists y, z)(\forall x)\Big((R_{\Delta_{cpv}} xyz \to Q(x) \wedge R(y) \wedge C(z)) \wedge \\
&\qquad \wedge (R(y) \wedge C(z)\Big) = \\
&= (\forall x, y, z)(R_{\Delta_{cpv}} xyz \to Q(x) \wedge R(y) \wedge C(z))
\end{aligned}$$

Для отношения $R_{\Delta_{cpv}} xyz$ определим предикат $D(x, y)$, а для отношения $R_{\Delta_{cpv}}$ – предикат $R(x, y, z)$.

Таким образом, мы описали полусхему с помощью трёх одноместных предикатов $C(x)$, $R(x)$, и $Q(x)$, а также с помощью двуместного предиката $D(x, y)$, такого что $(\forall x, y) D(x, y) \to C(x) \wedge Q(y)$ и трехместного $R(x, y, z)$, такого что $(\forall x, y, z) R(x, y, z) \to Q(x) \wedge R(y) \wedge C(z)$.

Однако, не все реляционные структуру, описанные таким образом, являются полусхемами. Необходимо выполнения ряда условий.

1. Условие однозначности типов имен

$$(\forall x \in W)C(x) \to \neg(R(x) \vee Q(x)) \quad (1)$$

$$(\forall x \in W)R(x) \to \neg(C(x) \vee Q(x)) \quad (2)$$

$$(\forall x \in W)Q(x) \to \neg(C(x) \vee R(x)) \quad (3)$$

2. Условие полноты (каждое имя является либо именем понятия, либо роли, либо именем квалификатора)

$$(\forall x \in W)(C(x) \vee R(x) \vee Q(x)) \quad (4)$$

3. Условие полной определенности квалификаторов

$$(\forall y)(\exists x, q, z) : Q(y) \to D(x, y) \wedge R(y, q, z) \quad (5)$$

4. Условие однозначности ролей

$$(\forall x)(\forall y, q, z)((q \neq z) \wedge \neg(R(x, y, q) \wedge R(x, y, z)) \quad (6)$$

Введем вспомогательный предикат, который будет связывать предикаты $D(x, y)$ и $R(x, y, z)$:

$$T(x, y, z) \equiv C(x) \wedge R(y) \wedge C(z) \wedge (\exists u)(Q(u) \wedge D(x,u) \wedge R(u, y, z))$$

5. Условие однозначности понятий

$$(\forall x, y)(T(x, y, z) \wedge T(x, y, z')) \to (z = z') \quad (7)$$

6. Условие однозначности квалификаторов

$$(\forall x_1, x_2)((\forall y, z)(R(x_1, y, z) \leftrightarrow R(x_2, y, z)) \to (x_1 = x_2)) \quad (8)$$

Условия 1 – 8 описаны с помощью логики первого порядка. Возникает вопрос: можно ли для каждой формулы первого порядка (1 – 8) построить эквивалентную ей модальную формулу? Для ответа на этот вопрос необходимо ввести понятие бисимуляции.

Определение 4

Пусть $M(W, R_\Delta, V)_{\Delta\in\tau}$ и $M'(W', R'_\Delta, V')_{\Delta\in\tau}$ – две модели. Непустое бинарное отношение $Z \subseteq W \times W'$, называется ***бисимуляцией*** между M и M' ($Z : M \leftrightarrow M'$), если выполнены следующие условия:

1. если wZw', тогда w и w' удовлетворяют одним и тем же пропозициональным символам.
2. если wZw' и $R_\Delta wv_1...v_{\rho(\Delta)}$, тогда $\exists v'_1...v'_{\rho(\Delta)} \in W' : R'_\Delta w'v'_1...v'_{\rho(\Delta)}$ и $\forall i(1 \le i \le \rho(\Delta))$ $v_iZv'_i$ (прямое условие)
3. если wZw' и $R'_\Delta w'v'_1...v'_{\rho(\Delta)}$, тогда $\exists v_1...v_{\rho(\Delta)} \in W : R_\Delta wv_1...v_{\rho(\Delta)}$ и $\forall i(1 \le i \le \rho(\Delta))$ $v_iZv'_i$ (обратное условие)

Если формула первого порядка не является инвариантной относительно бисимуляции, тогда не существует эквивалентной ей модальной формулы [3].

Для формул 1 – 5 существуют эквивалентные модальные формулы, т.к. они является инвариантными относительно бисимуляции. А формулы 6 – 8 не являются инвариантными, следовательно, не могут быть выражены с помощью соответствующих формул модальной логики.

5. Основной контрпример

Пусть даны две модели M и $M^{'}$, описывающих две полусхемы, схематически представленные на рис. 1.

a) $M(W, R_{\Delta}, V)_{\Delta\in\tau}$

$W = \{n, n_1, n_2, f, r_1, r_2\}$

$R_{\Delta_{concept}} n$, $R_{\Delta_{concept}} n_1$, $R_{\Delta_{concept}} n_2$

$R_{\Delta_{qualifier}} f$, $R_{\Delta_{role}} r_1$, $R_{\Delta_{role}} r_2$

$R_{\Delta_{tc}} nf$, $R_{\Delta_{cpv}} fr_1 n_1$, $R_{\Delta_{cpv}} fr_2 n_2$

b) $M^{'}(W^{'}, R^{'}_{\Delta}, V^{'})_{\Delta\in\tau}$

$W^{'} = \{k, k_1, k_2, v, r\}$

$R^{'}_{\Delta_{concept}} k$, $R^{'}_{\Delta_{concept}} k_1$, $R^{'}_{\Delta_{concept}} k_2$,

$R^{'}_{\Delta_{qualifier}} v$, $R^{'}_{\Delta_{role}} r$

$R^{'}_{\Delta_{tc}} kv$, $R^{'}_{\Delta_{cpv}} vrk_1$, $R^{'}_{\Delta_{cpv}} vrk_2$

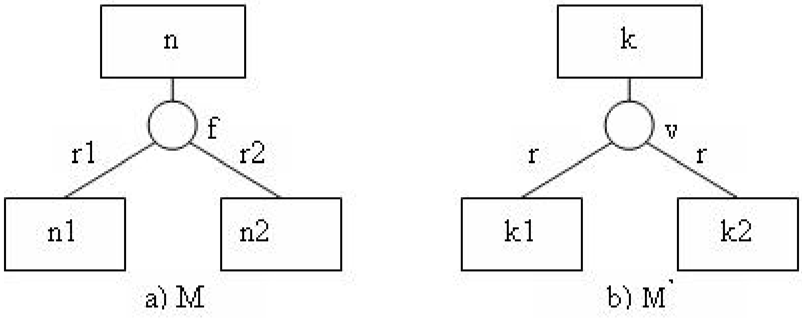

Рис.1. Схематическое представление полусхем контрпримера

Определим $Z = \{(n,k),(f,v),(r_1,r),(r_2,r),(n_1,k_1),(n_2,k_2)\}$

Покажем, что $Z : M \leftrightarrow M^{'}$.

Условие 1 выполняется по построению Z. Покажем выполнение условий 2 и 3.

Возьмем nZk и $R_{\Delta_{tc}} nf$, тогда $\exists v \in W^{'} : R^{'}_{\Delta_{tc}} kv$ и fZv. Выполнение обратного условия очевидно. Для fZv и $R_{\Delta_{cpv}} fr_1 n_1$, тогда $\exists r, k_1 \in W^{'} : R^{'}_{\Delta_{cpv}} vrk_1$ и $r_1 Zr$ и $n_1 Zk_1$. Обратно очевидно. Для fZv и $R_{\Delta_{cpv}} fr_2 n_2$, тогда $\exists r, k_2 \in W^{'} : R^{'}_{\Delta_{cpv}} vrk_2$ и $r_1 Zr$ и $n_2 Zk_2$. Обратно также очевидно. Следовательно, Z является бисимуляцией между M и $M^{'}$. Но, формула (6) истина для $x = n$ в модели M, а в модели $M^{'}$ для $x = k$ нет. Следовательно, формула (6) не инвариантна относительно бисимуляции и не может быть транслирована в соответствующую ей модальную формулу.

Таким образом, верно следующее утверждение: Аксиомы полусхем не могут быть описаны на языке модальной логики.

4. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Таким образом, в статье предложен способ моделирования полусхем как реляционных структур и выяснен вопрос о возможности описания их с помощью языка модальной логики. Поскольку не любая реляционная структура является полусхемой, установлено, что необходимыми и достаточными для этого являются условия (1 – 8). Эти условия сформулированы в статье в виде формул на языке логики первого порядка. Известно, что для любой модальной формулы существует соответствующая ей формула первого порядка, но не каждая формула первого порядка может быть преобразована в соответствующую модальную формулу. Критерий существования обратного преобразования формулируется на основе понятия бисимуляция: модальные формулы и только они инвариантны относительно бисимуляции. В статье показано, что формулы (6 – 8) языка первого порядка, выражающие аксиомы полусхем, не инвариантны относительно бисимуляции. Следовательно, не возможно описать полусхему на языке модальной логики.

Таким образом, модальная логика не является адекватным языком для описания и анализа полусхем. В связи с этим возникает задача поиска адекватных математических формализмов для описания полусхем. Кандидатом на роль такого языка может стать теория категорий, что приводит к необходимости изучения полусхем на категорном языке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жолткевич Г.Н., Семенова Т.В. К проблеме формализации концептуального моделирования информационных систем / Вісник Харк. нац. ун-та. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – № 605(2), 2003. – С. 33 – 42.
2. Жолткевич Г.Н., Семенова Т.В., Федорченко К.А.Представление полусхем предметных областей информационных систем средствами реляционных баз данных / Вісник Харк. нац. ун-та. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – № 629(3), 2004. – С. 11 – 24.
3. Blackburn P., de Rijke M., Venema Y. Modal Logic / CambridgeUniversity Press, 2002. – 552 p.
4. Chagrov A. Zakharjaschev M . Modal Logic / Oxford University Press, 1998. – 624 p.
5. Kroger F. Temporal Logic of Programs / Springer-Verlag, 1987. – 148 p.
6. Тей А., Грибомон П., Луи Ж. Логический подход к искусственному интеллекту / М.:Мир, 1998. – 432 с.

Надійшла у першій редакції 15.03.2010, в останній - 22.03.2010.

© А. Г. Житарюк, Г. Н. Жолткевич, 2010