

УДК 519.713; 519.711;53+517.958:535.4

Численное моделирование дифракции электромагнитного поля на открытых резонаторах специальной формы

С. В. Жученко, В. А. Щербина

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Предлагается краткое описание алгоритма численного моделирования трехмерной дифракции электромагнитных полей на идеально проводящих гофрированных осе симметричных резонаторах конечных размеров. Результаты некоторых вычислительных экспериментов получены с помощью компьютера, который реализует эту модель. Эти результаты сравниваются с результатами, полученными ранее теми же авторами в случае осе симметричных электромагнитных полей.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, численное решение, компьютерный эксперимент, задача дифракции.

Пропонується короткий опис алгоритму чисельного моделювання тривимірної дифракції електромагнітних полів на ідеально провідних гофрованих осе симетричних резонаторах кінцевих розмірів. Результати деяких обчислювальних експериментів отримані за допомогою комп'ютера, який реалізує цю модель. Ці результати порівнюються з результатами, отриманими раніше тими ж авторами в разі осе симетричних електромагнітних полів.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, численное решение, компьютерный эксперимент, задача дифракции.

Proposed a short description of the algorithm of numerical simulation of three-dimensional diffraction of electromagnetic fields on perfectly conducting corrugated axially symmetric cavity of finite size. The results of some computational experiments obtained by using a PC that implements this model. These results are compared with results obtained earlier by the same authors in the case of axially symmetric field.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, численное решение, компьютерный эксперимент, задача дифракции.

1. Постановка задачи и методы её решения для осе симметричных резонаторов

Поверхность осесимметричного резонатора конечной длины получается в результате вращения вокруг оси z кривых а), б), что изображены на рис. 1.

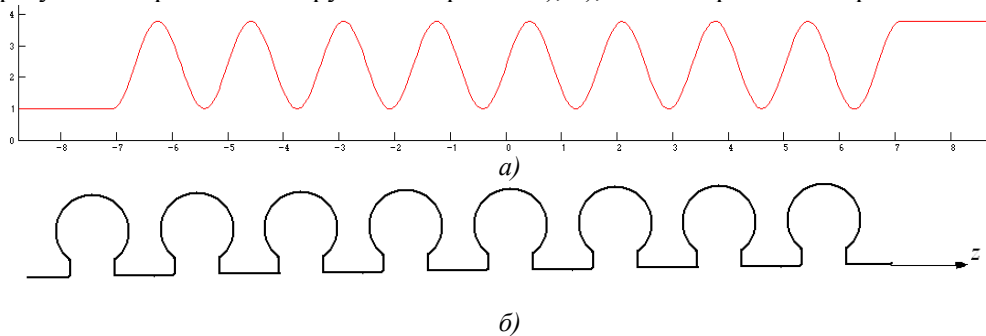


Рис. 1. Варианты кривых образующих поверхность резонатора

Линии главных кривизн – меридианы и параллели. Координаты на поверхности S резонатора: вдоль параллели это φ – угол вращения образующей вокруг оси z, а вдоль меридиана - для образующих типа а) это координата z, а типа б) это s – длина дуги (универсальна).

Параметризация поверхности: а) $\bar{x} = \bar{x}(\varphi, z) = \hat{x}(\varphi, z) + z\bar{e}_3$, $\hat{x} = r(z)\bar{e}(\varphi)$,

б) $\bar{x} = \bar{x}(\varphi, s) = \hat{x}(\varphi, s) + z(s)\bar{e}_3$, $\hat{x} = r(s)\bar{e}(\varphi)$.

Здесь $\bar{e}(\varphi) = \cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi \bar{e}_2$.

Касательное поле \bar{j} на S:

а) $\bar{j}(\varphi, z) = u(\varphi, z)\bar{\tau}_1(\varphi) + v(\varphi, z)\bar{\tau}_2(\varphi, z)$,

где $\bar{\tau}_1(\varphi) = \bar{e}'(\varphi)$, $\bar{\tau}_2(\varphi, z) = \frac{\hat{x}'_z + \bar{e}_3}{\sqrt{1 + |\hat{x}'_z|^2}}$,

$\bar{n}(x) = \bar{e}'(\varphi) \times \bar{\tau}_2(\varphi, z)$,

б) $\bar{j}(\varphi, s) = u(\varphi, s)\bar{\tau}_1(\varphi) + v(\varphi, s)\bar{\tau}_2(\varphi, s)$,

где $\bar{\tau}_1(\varphi) = \bar{e}'(\varphi)$, $\bar{\tau}_2(\varphi, s) = \frac{\hat{x}'_z + \bar{e}_3}{\sqrt{1 + |\hat{x}'_z|^2}}$, $\bar{n}(x) = \bar{e}'(\varphi) \times \bar{\tau}_2(\varphi, s)$.

Параметрическое представление для рассеянного экраном S поля.

$$\bar{E}_1(\bar{x}) = \nabla \times \int_S \left[\bar{j}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{n}(\bar{y})} - K \bar{j}(\bar{y}) \right] \frac{e^{ip|\bar{x}-\bar{y}|}}{|\bar{x}-\bar{y}|} ds_y,$$

$$K \bar{j}(\bar{y}) = k_1(\bar{y})(\bar{j}(\bar{y}), \bar{\tau}_1(\bar{y}))\bar{\tau}_1(\bar{y}) + k_2(\bar{y})(\bar{j}(\bar{y}), \bar{\tau}_2(\bar{y}))\bar{\tau}_2(\bar{y}).$$

Граничное уравнение.

Полное поле представляется в виде $\bar{E}(\bar{x}) = \bar{E}_0(\bar{x}) + \bar{E}_1(\bar{x})$, где $\bar{E}_0(\bar{x})$ – удовлетворяющее условию излучения поле, порождённое локальным

источником (или плоская волна) в R^3 , т.е. $\bar{E}_0(\bar{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int f(\bar{y}) \frac{e^{ip|\bar{x}-\bar{y}|}}{|\bar{x}-\bar{y}|} d^3\bar{y}$

(или $\bar{E}_0(\bar{x}) = q e^{i(\bar{p}, \bar{x})}$). На идеально проводящем экране $\bar{n}(\bar{x}) \times \bar{E}(\bar{x}) = 0$, что даёт для неизвестного поля $\bar{j}(\bar{y})$, $\bar{y} \in S$ уравнение вида [1]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{n}(\bar{x}) \times \left[\nabla \times \oint_S \left\{ \bar{j}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{n}(\bar{y})} - K \bar{j}(\bar{y}) \right\} \frac{e^{ip|\bar{x}_\varepsilon - \bar{y}|}}{|\bar{x}_\varepsilon - \bar{y}|} ds_y \right] = \bar{E}_0(\bar{x}) \times \bar{n}(\bar{x}), \quad (1)$$

где $\bar{x}_\varepsilon = \bar{x} + \varepsilon \bar{n}(\bar{x})$, $\bar{x} \in S$.

Вид $\bar{J}(\bar{y}) = \bar{j}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{n}(\bar{y})} - K \bar{j}(\bar{y})$ обеспечивает существование $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ слева

любого гладкого поля $\bar{j}(\bar{y})$, не зависящего от знака ε . Если от векторной записи граничного уравнения (1) перейти к системе двух уравнений для пары $u(\bar{y})$ и $v(\bar{y})$, то естественно касательная к S поля в левой и правой части (1)

разложить по базису $\bar{\tau}_1(\bar{x})$ и $\bar{\tau}_2(\bar{x})$. После несложных преобразований (1) переходит в систему

$$\left(\bar{\tau}_m(\bar{x}), \int_S \bar{n}(\bar{x}) \times \left[\bar{J}(\bar{y}) \times \nabla_x \frac{e^{ip|\bar{x}-\bar{y}|}}{|\bar{x}-\bar{y}|} \right] ds_y \right) = (\bar{n}(\bar{x}) \times \bar{E}_0(\bar{x}), \bar{\tau}_m(\bar{x})), \quad m=1,2 \quad (2)$$

или

$$\oint_S (\bar{J}(\bar{y}), \bar{\tau}_m(\bar{x})) \frac{\partial}{\partial n(\bar{x})} \frac{e^{ip|\bar{x}-\bar{y}|}}{|\bar{x}-\bar{y}|} ds_y - \oint_S (\bar{J}(\bar{y}), \bar{n}(\bar{x})) \frac{\partial}{\partial \tau_m(\bar{x})} \frac{e^{ip|\bar{x}-\bar{y}|}}{|\bar{x}-\bar{y}|} ds_y = f_m(\bar{x}) \quad (2')$$

Здесь \oint понимается в смысле предела по $\varepsilon \rightarrow 0$, как это записано в (1).

Поскольку S – поверхность вращения, то естественно искомые функции $u(\bar{y})$, $v(\bar{y})$ разложить в ряды Фурье по переменной φ . Можно показать, что в этом случае система (2') превратится в бесконечную цепочку независимых систем для пар функций от z (случай а) или s (случай б):

$\begin{pmatrix} u_q \\ v_q \end{pmatrix}$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ вида

$$\begin{pmatrix} K_{11}^q & K_{12}^q \\ K_{21}^q & K_{22}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_q \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_q^1(z) \\ f_q^2(z) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для численного моделирования решений системы (2') сведение её к системе (3) даёт важное преимущество, поскольку искомые функции u_q, v_q зависят от одной переменной z (или s).

Для $q = 0$ уравнение (3) имеет особенно простой вид

$$\begin{pmatrix} K_{11}^0 & 0 \\ 0 & K_{22}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^1(z) \\ f_0^2(z) \end{pmatrix}$$

или даёт пару уравнений

$$\begin{aligned} K_{11}^0 u_0 &= f_0^1(z) \\ K_{22}^0 v_0 &= f_0^2(z) \end{aligned}$$

Как нетрудно убедиться, каждое из этих уравнений описывает один из двух возможных вариантов осесимметричного намагничивания поверхности S полем источника $\bar{E}_0(\bar{x})$:

вдоль параллелей, когда $v_0 \equiv 0$ и

вдоль меридианов, когда $u_0 \equiv 0$.

С точки зрения технических приложений численное моделирование решений уравнения $K_{11}^0 u_0 = f_0^1(z)$ представляет особый интерес, поскольку такой резонатор позволяет генерировать электромагнитные поля с частотой в несколько гигагерц.

Резонансные свойства открытого резонатора

Пусть $\Omega \subset R^3$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Если на $\partial\Omega$ взять открытое множество Σ с гладким краем и рассмотреть в качестве S идеально проводящий экран, совпадающий с $\partial\Omega \setminus \Sigma$, то, как показывает эксперимент и соображения физического порядка, рассеянное на S электромагнитное поле $E_1(x) = \nabla \times \int_S j(y) \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} dS_y$, порождённое падающим на S полем $E_0(x)$, обладает резонансными свойствами.

Мощность потока энергии для поля $E_1(x)$ на бесконечности даётся выражением

$$N(p) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left(\operatorname{Re} S(x), \frac{x}{R} \right) d\sigma_x,$$

где $S(x) = \frac{1}{2} \frac{C}{4\pi} E_1(x) \times H_1^*(x)$ – вектор Пойнтинга.

После простой выкладки получаем:

$$N(p) = \frac{C}{8\pi} p^2 \int_{|q|=1} dS_q \int_S \int_S e^{i(q \cdot z - y)} (q \times j(y), q \times j(z)) ds_y ds_z.$$

Проведенные численные эксперименты для резонаторов типа а), б) показали, что $N(p)$ – мощность излучения в дальней зоне как функция от p имеет ряд локальных максимумов. Положение их на полуоси $p > 0$ быстро стабилизируется, когда число гофр (периодически повторяющихся изменений формы меридиана) возрастает, всё более точно совпадая со спектром частот аналогично гофрированного волновода бесконечной длины.

Исследования в данном направлении только начались и в дальнейшем будут продолжены.

2. Результаты вычислительных экспериментов

В настоящем исследовании численно моделировался осесимметричный резонатор конечной длины с поверхностью полученной вращением кривой типа а), которая изображена на рис. 1. Для оценки достоверности получаемых при этом результатов они сравнивались с аналогичными результатами, полученными с использованием программы ЭВМ полученной авторами ранее при решении осесимметричной задачи. Проводилось исследование спектральной мощности данного открытого резонатора на нулевой гармонике, используя трёхмерную и осесимметричную программы ЭВМ. На рис. 2 представлен график распределения спектральной мощности отражённой волны резонатора с 8-ю гофрами в интервале частот $0.1 \div 25$ ГГц для нулевой гармонике в случае трёхмерной задачи, а на рис. 3 график аналогичной функции для такого же резонатора, но полученного с помощью программы моделирующей осесимметричное решение. В обоих экспериментах положение всех резонансов совпадает с большой точностью.

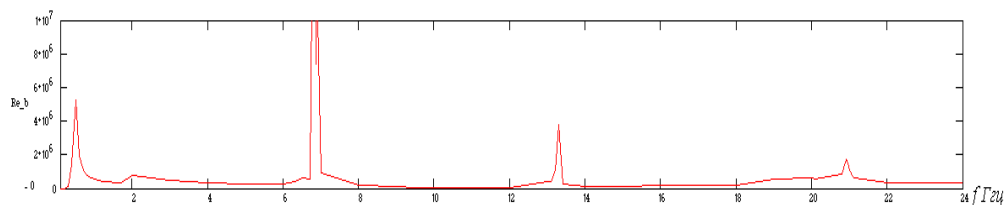


Рис. 2. График распределения спектральной мощности открытого резонатора с 8-ю гофрами на нулевой гармонике для трёхмерной задачи

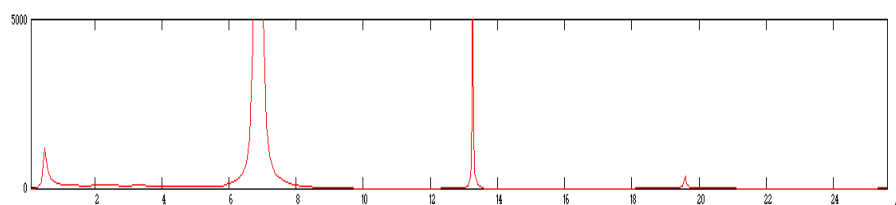


Рис. 3. График распределения спектральной мощности открытого резонатора с 8-ю гофрами для осе симметричной задачи

На рис. 4 представлены реальная и мнимая составляющие решения для не резонансной частоты на нулевой гармонике в случае трёхмерной задачи, а на рис. 5 решение на той же частоте для осе симметричной задачи. Известно, что решение этой задачи для резонатора, у которого образующая вращается вокруг отрезка $z \in [-l, l]$, представимо в виде $j(z) = \sqrt{l^2 - z^2} j_1(z)$. Сравнивая эти решения следует учесть, что на рис. 4 изображена функция $j_1(z)$, а на рис. 5 – функция $j(z)$. Различная длина графиков вдоль оси абсцисс объясняется тем, что в случае трёхмерной задачи использовалась неравномерная Чебышевская сеть дискретных точек вдоль оси z , а в осесимметричной задаче применялась равномерная сеть дискретных точек вдоль образующей (как это предполагается делать в случае образующей показанной на рис. 1б).

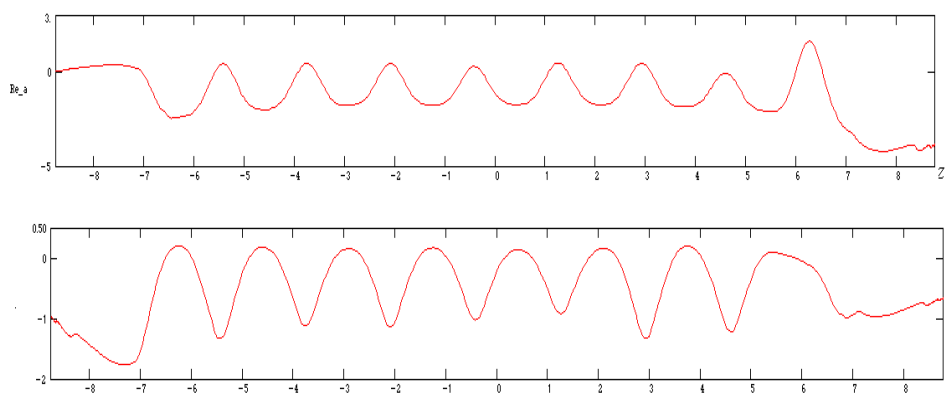


Рис. 4. Графики функции решения для резонатора с 8-ю гофрами на не резонансной частоте $f=6$ ГГц в случае трёхмерной задачи

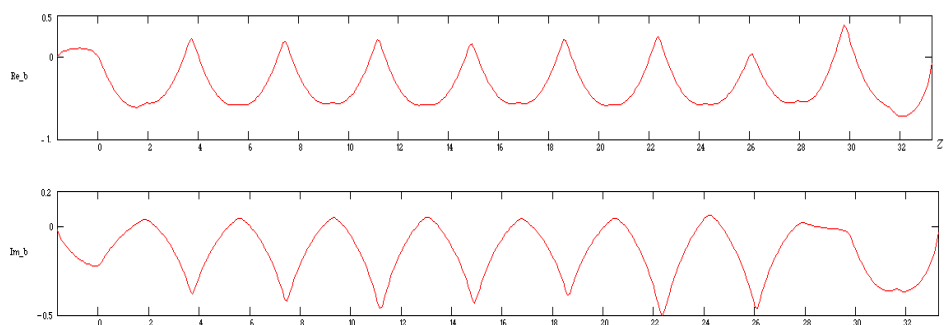


Рис. 5. Графики функции решения для резонатора с 8-ю гофрами на не резонансной частоте $f=6$ ГГц в случае осесимметричной задачи

На рис. 6 и 7 изображены графики решений для тех же задач только на основной резонансной частоте $f = 6.87$ ГГц. Положение этой резонансной частоты в обеих задачах совпадают с большой точностью. Такая же резонансная частота имеет место и для резонатора с 50 гофрами. Графики осесимметричного решения в этом случае приведены на рис. 8. К сожалению, получить такое же решение для случая трёхмерной задачи с использованием неравномерной сети дискретных точек не реально. Поэтому в дальнейшем предполагается перейти на равномерную сеть и в этой задаче. Совпадение резонансных частот для резонаторов с 8 и 50 гофрами, говорит о том, что такая же резонансная частота будет и у бесконечного резонатора, а решение полученное для резонатора с 50 гофрами хорошо моделирует решение в резонаторе бесконечном. Заметим, что у такого же резонатора с 4-мя гофрами резонансная частота равна $f = 6.8345$ ГГц. Графики решения для трёхмерной задачи показаны на рис. 10.

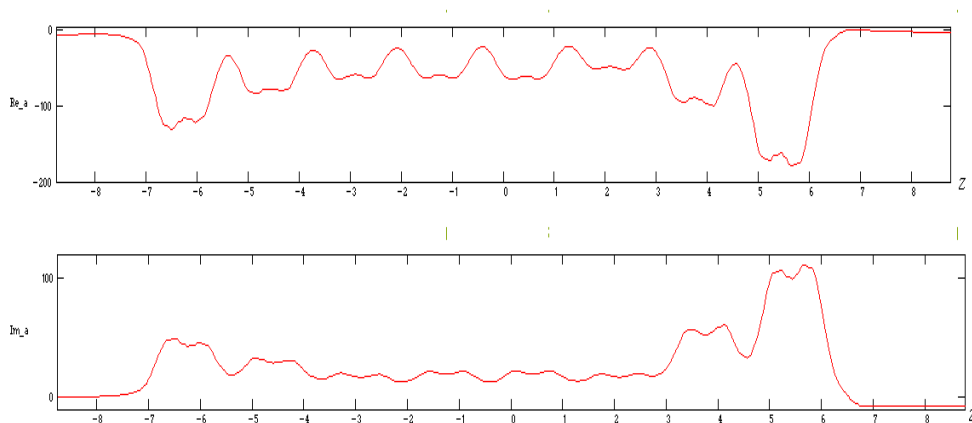


Рис. 6. Графики функции решения для резонатора с 8-ю гофрами на резонансной частоте $f=6.87$ ГГц в случае трёхмерной задачи

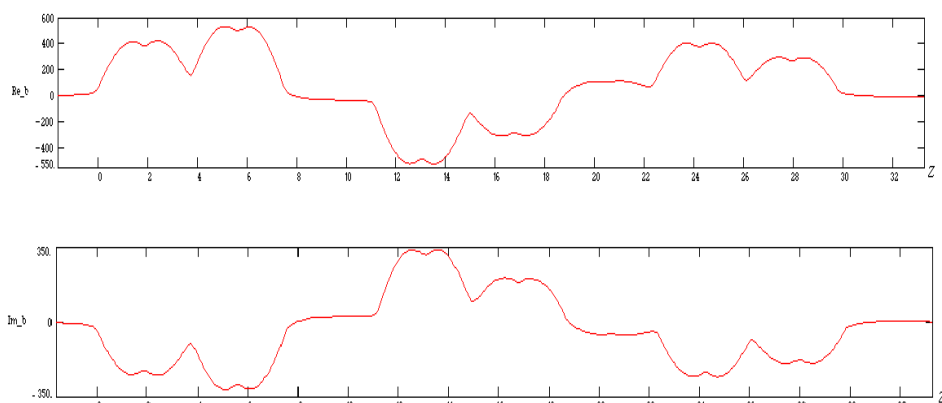


Рис. 7. Графики функции решения для резонатора с 8-ю гофрами на резонансной частоте $f=6.87$ Гц в случае осесимметричной задачи

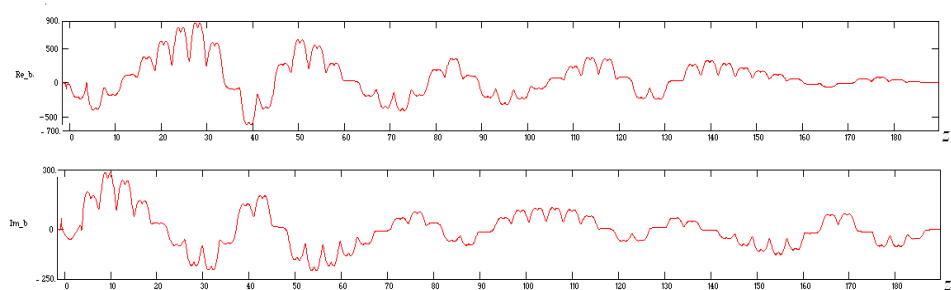


Рис. 8. Графики функции решения для резонатора с 50-ю гофрами на резонансной частоте $f=6.87$ Гц в случае осесимметричной задачи

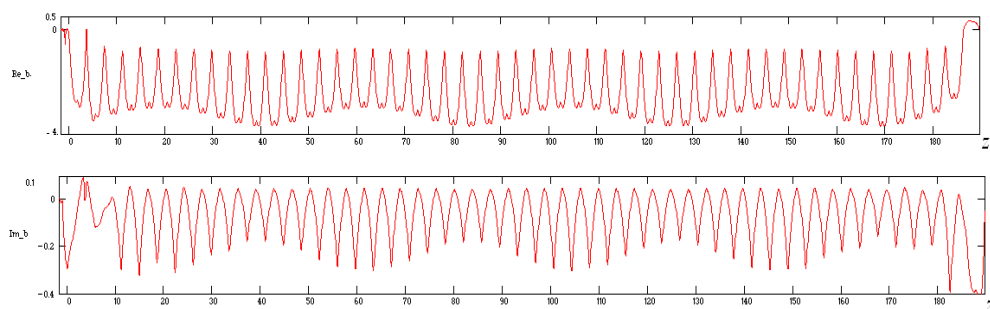


Рис. 9. Графики функции решения для резонатора с 50-ю гофрами на не резонансной частоте $f=6.7$ Гц в случае осесимметричной задачи

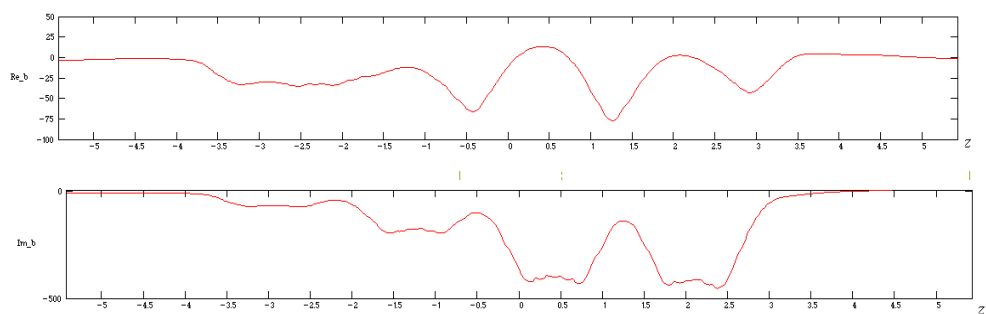


Рис. 10. Графики функции решения для резонатора с 4-мя гофрами на резонансной частоте $f=6.8345$ ГГц в случае трёхмерной задачи

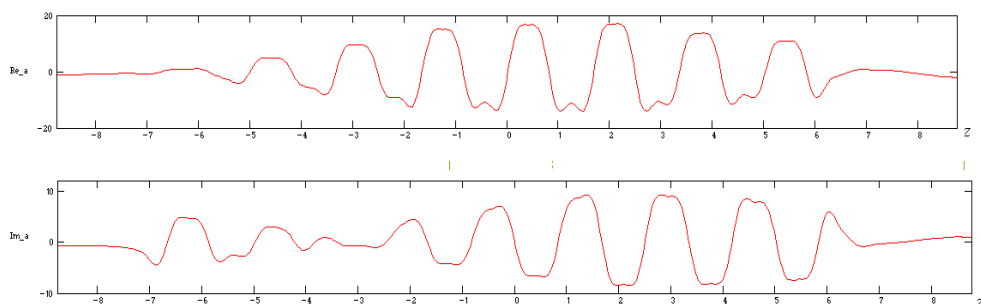


Рис. 11. Графики функции решения для резонатора с 8-ю гофрами на резонансной частоте $f=13.3$ ГГц в случае трёхмерной задачи

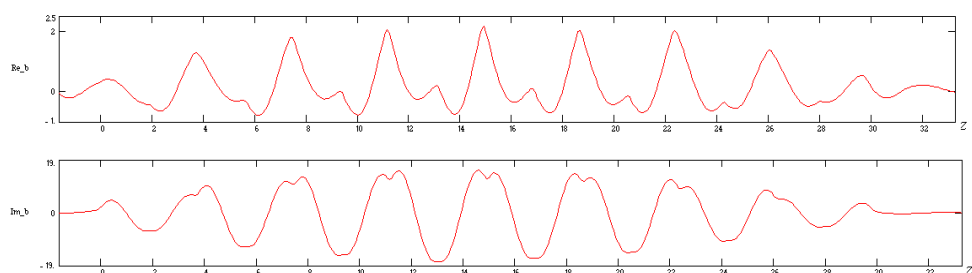


Рис. 12. Графики функции решения для резонатора с 8-ю гофрами на резонансной частоте $f=13.244$ ГГц в случае осесимметричной задачи

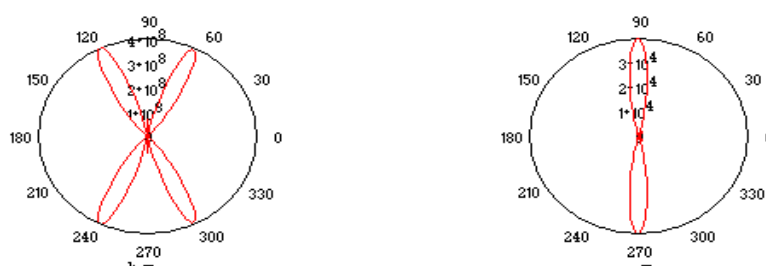


Рис. 13. Круговые графики распределения мощности излучения в дальней зоне для резонатора с 8-ю гофрами для частот 6.87 и 6.7 ГГц, соответственно в случае осесимметричной задачи

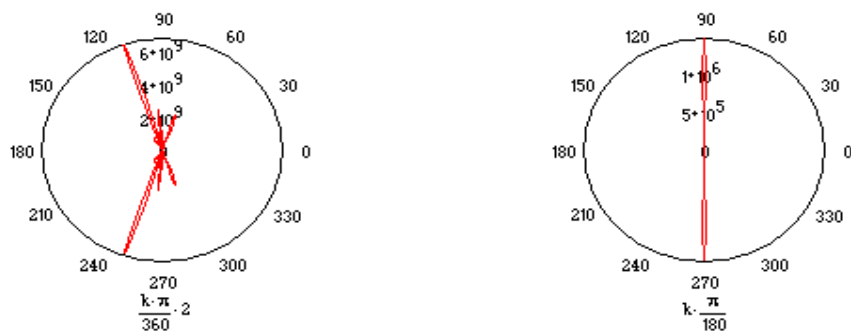


Рис.14. Круговые графики распределения мощности излучения в дальней зоне для резонатора с 50-ю гофрами для частот 6.87 и 6.7 ГГц, соответственно в случае осесимметричной задачи

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербина В.А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в \mathcal{R}^3 // Электромагнитные явления. – 1998. – Т.1, №4. –С.1-4.

Надійшла у першій редакції 25.05.2009, в останній - 18.01.2010.

© С. В. Жученко, В. А. Щербина, 2010