

УДК 514.17: 519.1

## Спільне застосування неперервних та дискретних представлень фігур у задачах пошуку оптимального розкрою

А. І. Зінченко, А. К. Приварников

*Запорізький національний університет, Україна*

У статті розглядається два способи опису фігур в задачах оптимального розкрою: безперервний і дискретний. Пропонується спосіб переходу від одного опису до іншого. Отримані результати використовуються для вирішення питань про роздільність фігур і знаходження кроку штампування при регулярному однорядному прямому штампуванні однотипних деталей з прямокутного листа.

**Ключові слова:** *Оптимальний розкрій, код фігури, (0,1)-матриця, роздільні фігури, крок штампування.*

В статье рассматривается два способа описания фигур в задачах оптимального раскроя: непрерывный и дискретный. Предлагается способ перехода от одного описания к другому. Полученные результаты используются для решения вопросов о разделимости фигур и нахождения шага штамповки при регулярной однорядной прямой штамповке однотипных деталей в листе.

**Ключевые слова:** *оптимальный раскрой, код фигуры, (0,1)-матрица, разделяющиеся фигуры, шаг штамповки.*

This article deals with two ways of the description of the figures in an optimal cut out problem: continuous and discrete. The method of transition from one description to another has been proposed. The obtained results are used to decide the issue of the separability of the figures and the finding of the stamping step with the regular single-row straight stamping of the same type parts in the sheet

**Key words:** *Optimal cutting, code figure, (0,1)-matrix, separable figures, step stamping.*

### 1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Одним з основних шляхів зниження витрат листового прокату на автомобільних, комбайнових, тракторних заводах є вдосконалення технологічних процесів розкрою. При цьому найбільш істотне значення для зниження витрат має етап пошуку оптимального розташування плоских деталей у прямокутних листах або рулонах.

Для машинобудівних заводів з великими обсягами штампувальних робіт інтерес становлять такі види штампування, у яких деталі в листах розташовуються регулярно: для цих видів штампування вдається забезпечити високу продуктивність штампувальних верстатів, оскільки не витрачається час на переустановлення штампа. Таким чином, задача знаходження оптимальних варіантів розкрою, які дозволяють найбільш економно використовувати матеріал, є актуальною, і її розв'язання може дати суттєвий економічний ефект.

### 2. Аналіз публікацій

В Україні є декілька наукових шкіл, які займаються проблемами оптимального розкрою, серед яких найбільш відомі колективи з Харкова (засновниками якої є академік НАН України Володимир Логвинович Рвачов та член-кореспондент НАН України Юрій Григорович Стоян) [1-3] та Донецька (школа д.т.н., проф. Юрія Олександровича Скобцова) [4-6]. Із зарубіжних вчених відмітимо російський колектив учених під керівництвом д.т.н., проф.

Еліти Олександрівни Мухачової (м. Уфа) [7,8], а також італійських науковців А. Lodi, S. Martello, D. Vigo, P. Toth (м. Болонья) [9].

Існує інтернаціональна наукова група ESICUP, яка спеціалізується по задачах розкрою, висвітлюючи свою діяльність на сайті [10]. Команду, яка налічує понад 500 науковців, очолюють проф. G. Waescher і проф. H. Dycckhoff. На сайті організації наведено бібліографічний покажчик, який містить більше ніж 600 наукових праць членів цієї групи.

Перспективним напрямком розв'язання задачі пошуку оптимальних варіантів регулярного оптимального однорядного та багаторядного розкрою в листах, рулонах та площинах шляхом її зведення до пошуку максимуму функції, яка визначає кількість деталей у заданій області, залежно від кута повороту фігур на листі. Такий підхід був запропонований О.В. Зенкіним та А.К. Приварниковим [11]. Подальший розвиток цей підхід знайшов у роботах авторів цієї статті [12,13].

### 3. Невирішені проблеми та цілі роботи

При пошуку оптимального регулярного розташування плоских фігур на прямокутному листі потрібно розрізняти роздільні та нероздільні фігури. Фігуру будемо називати нероздільною в заданому напрямку, якщо при паралельному зсуві цієї фігури існує таке її положення, при якому вихідна та зсунута фігури не мають спільних точок за умови, що величина зсуву менша за довжину фігури в заданому напрямку (довжина фігури – довжина найдовшого відрізка, паралельного заданому напрямку, кінці якого лежать на контурі заданої фігури). У іншому випадку фігуру будемо називати роздільною в заданому напрямку. На рис.1 зображено відповідно фігури, які є нероздільними в напрямку осі  $Ox$ , роздільними в напрямку осі  $Ox$  та фігуру, яка є роздільною в будь-якому напрямку.

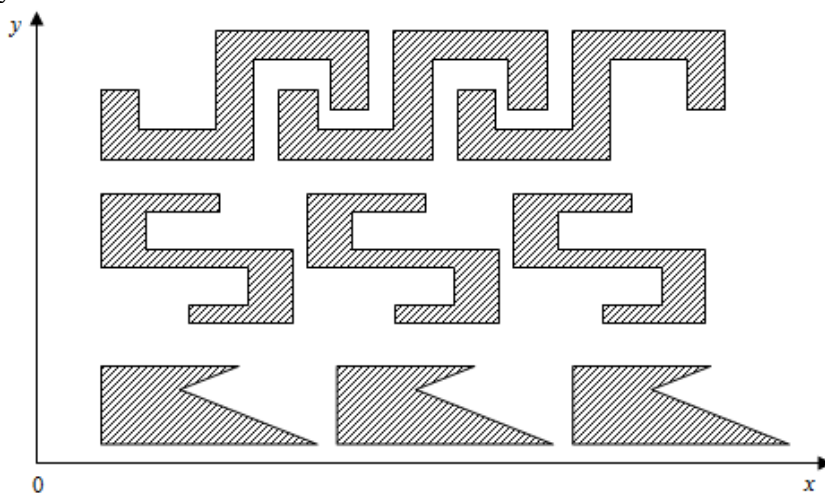


Рис. 1. Приклади нероздільних та роздільних фігур

Зазвичай контур фігури складається з відрізків прямих та дуг кіл. Його можна кодувати послідовністю дійсних чисел [13]. У доступній авторам літературі відсутні описання методів, які дозволяють визначити роздільність фігури за її

кодом. Ціль цієї статті полягає у створенні алгоритму визначення роздільності фігури за її кодом.

#### 4. Кодування контуру фігури

На координатній площині задана геометрична фігура, замкнутий контур якої складається з відрізків прямих і дуг кіл (елементів контуру). Позначимо через  $n$  кількість елементів контуру фігури. Вважається, що фігура віднесена до правої декартової системи координат  $Oxy$ . Елементи будемо нумерувати, рухаючись уздовж контуру фігури проти ходу годинникової стрілки. Кодом фігури є послідовність з  $3n$  чисел ( $i$ -та трійка чисел є кодом  $i$ -го елемента контуру). Якщо елемент контуру є відрізком прямої, то відповідна трійка чисел має вигляд  $(0, X, Y)$ , де  $0$  – ознака відрізка прямої, а точка  $(X, Y)$  є початковою точкою відрізка. Якщо ж елемент контуру є дугою кола, то трійка має вигляд  $(\omega, X, Y)$ , де  $R = |\omega|$  – радіус кола. Знак  $\omega$  має такий сенс: «+» відповідає опуклій дузі, «-» відповідає угнутій дузі кола. Точка  $(X, Y)$  є початковою точкою дуги кола. Будемо вважати, що всі дуги контуру задовольняють такій умові: центральні кути, на які вони спираються, не перевищують  $180^\circ$ . Якщо дуга не задовольняє цій умові, то її потрібно замінити двома дугами. Оскільки контур фігури є замкнутим, то кінцева точка  $n$ -го елемента контуру збігається з початковою точкою першого елемента контуру. Як приклад, наведемо код контуру фігури, зображеної на рис. 2:  $(0, 0, 0; -3, 5, 0; 0, 8, 3; 0, 8, 0; 0, 10, 0; 0, 10, 5; 2, 2, 5; 0, 0, 3)$ .

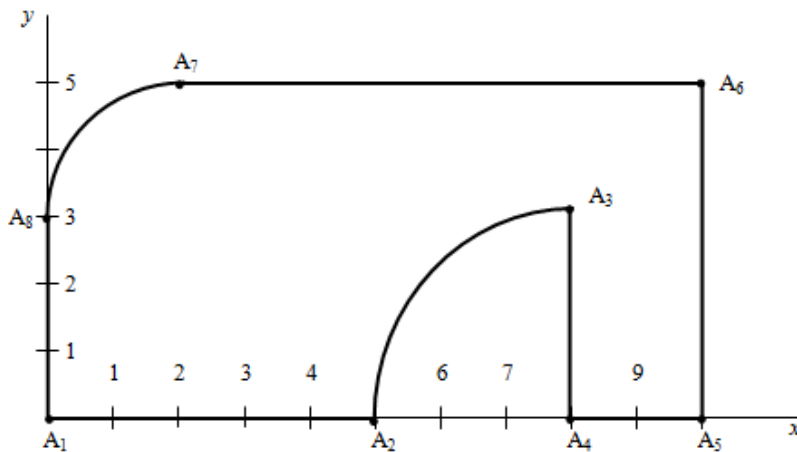


Рис. 2. Приклад коду контуру фігури

#### 5. Дискретне представлення фігури за її неперервним кодом

Для того, щоб з'ясувати питання про роздільність фігури в напрямку штампування, будемо використовувати представлення фігури у вигляді  $(0,1)$  матриці.

Якщо фігура задана своїм кодом, то знайдемо найменшу абсцису і найменшу ординату її вершин  $x_{\min}$  та  $y_{\min}$ . Позначимо через  $R_{\max}$  максимальний радіус опуклих дуг, які входять до контуру фігури. Для того, щоб обчислити цю величину за заданим кодом фігури, потрібно знайти максимальний елемент

серед членів послідовності коду, які мають номери  $3k-2$ ,  $k=1, \dots, n$ . Наприклад, якщо контур фігури є замкненою ламаною, то  $R_{\max} = 0$ . Перенесемо задану фігуру паралельно на вектор  $(R_{\max} - x_{\min}, R_{\max} - y_{\min})$ . Перенесена фігура повністю лежатиме в першому квадранті, а, отже, усі координати точок, які їй належать, будуть невід'ємними.

Після цього проведемо прямі, паралельні осям координат. Відстань між занумерованими сусідніми паралельними прямими дорівнює  $e$ .

Рівняння  $k$ -ї вертикальної (горизонтальної) прямої має вигляд  $x = ke$  ( $y = ke$ ). Позначимо через  $F_{ij}$  квадрат зі сторонами, які лежать на прямих  $x = (i-1)e$ ,  $x = ie$ ,  $y = (j-1)e$ ,  $y = je$ .

Положення заданої фігури опишемо матрицею  $M$ , яка має  $\left[ \frac{y_{\max} + R_{\max}}{e} \right] + 1$  рядків та  $\left[ \frac{x_{\max} + R_{\max}}{e} \right] + 1$  стовпчиків (тут  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ ). Елемент  $m_{ij}$  покладемо рівним одиниці, якщо квадрат  $F_{ij}$  містить точки перенесеної фігури, і рівним нулю в протилежному випадку. Для зручності будемо вважати, що рядки матриці нумеруються знизу вгору, тобто нижній рядок матриці має номер один. Зауважимо, що при зменшенні величини  $e$  зростає точність моделі, але і об'єм обчислень.

Опишемо спосіб побудови матриці  $M$  за кодом вихідної фігури, перенесеної у перший квадрант. Спочатку розглянемо випадок, коли елемент контуру  $A_m A_{m+1}$  є відрізком прямої. Знайдемо його довжину

$$l = \sqrt{(x_{m+1} - x_m)^2 + (y_{m+1} - y_m)^2}.$$

Запишемо параметричне рівняння цього елемента:

$$\begin{cases} x = x(t) = x_m + t \frac{(x_{m+1} - x_m)}{l}, \\ y = y(t) = y_m + t \frac{(y_{m+1} - y_m)}{l} \end{cases} \quad t \in [0, l].$$

Тепер послідовно будемо покладати

$$t = t_k = ke, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{l}{e} \right]$$

і обчислювати координати відповідних точок  $(x(t_k), y(t_k))$  відрізка. Якщо точка  $(x(t_k), y(t_k))$  потрапляє у квадрат  $F_{ij}$ , то елементу  $M_{ij}$  присвоїмо значення 1 (для

визначення  $i$  та  $j$  скористаємося формулами  $(i = \left[ \frac{x(t_k)}{e} \right], j = \left[ \frac{y(t_k)}{e} \right])$ .

Розглянемо тепер елемент контуру  $A_k A_{k+1}$ , який є дугою з параметром  $\omega$ . Його центр  $C$  має координати:

$$x_C = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \text{sign}(\omega) \frac{\sqrt{\omega^2 - (x_d - x_k)^2 - (y_d - y_k)^2}}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}} (y_k - y_{k+1})$$

$$y_C = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} + \text{sign}(\omega) \frac{\sqrt{\omega^2 - (x_d - x_k)^2 - (y_d - y_k)^2}}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}} (x_{k+1} - x_k).$$

$$\text{Тут } x_d = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, y_d = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}.$$

Центральний кут  $\alpha$ , який відповідає цій дузі:

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}}{2|\omega|}.$$

Довжина дуги  $l = \alpha|\omega|$ . Натуральні параметричні рівняння цієї дуги:

$$\begin{cases} x(t) = x_C + |\omega| \cos\left(\phi_0 + t \cdot \frac{1}{\omega}\right), \\ y(t) = y_C + |\omega| \sin\left(\phi_0 + t \cdot \frac{1}{\omega}\right). \end{cases} \quad t \in [0, l].$$

Тепер послідовно будемо покладати  $t = t_k = ke$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{l}{e}\right]$  і

обчислювати координати відповідних точок  $(x(t_k), y(t_k))$  дуги. Якщо точка  $(x(t_k), y(t_k))$  потрапляє у квадрат  $F_{ij}$ , то елементу  $M_{ij}$  присвоюємо значення 1 (для визначення  $i$  та  $j$  користуємось формулами  $(i = \left[\frac{x(t_k)}{e}\right], j = \left[\frac{y(t_k)}{e}\right])$ ).

Після виконання описаних процедур отримаємо  $(0,1)$  матрицю, яка описує контур заданої фігури. Тепер оберемо будь-яку точку в середині фігури, знайдемо квадрат  $F_{ij}$ , якому вона належить, і покладемо  $M_{ij} = 2$ . Далі перебираємо по черзі всі елементи матриці, які дорівнюють нулю. Ті з них, які мають сусідні елементи, що дорівнюють двійкам, також покладемо рівними двійкам. Цей процес повторюємо до тих пір, поки на черговій ітерації всі елементи матриці залишаться незмінними. Після цього всі двійки змінюємо на одиниці і отримуємо шукану  $(0,1)$  матрицю  $M$  заданої фігури.

Далі зручно зробити таке перетворення. Знайдемо той одиничний елемент матриці, який має найменший номер стовпчика (нехай цей номер дорівнює  $r_{\min}$ ) і той одиничний елемент матриці, який має найменший номер рядка ( $l_{\min}$ ). Вилучимо перші  $r_{\min} - 1$  стовпчиків матриці і перші  $l_{\min} - 1$  строк матриці. У результаті отримаємо матрицю, яка описує задану фігуру в такому положенні, коли вона торкається координатних осей, знаходячись в першому квадранті.

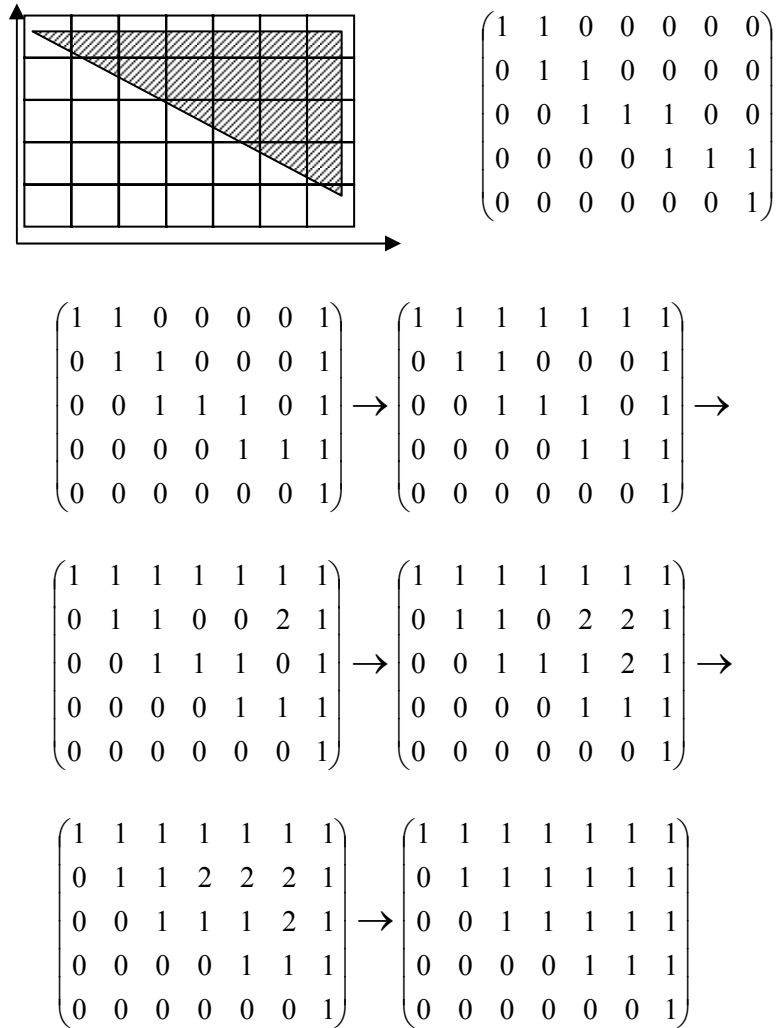


Рис.3. Побудова матриці фігури

На рис. 3 показано фігуру та процес побудови її матриці.

### 6. Визначення роздільності фігур у заданому напрямку та кроку штамповки

Для обчислення довжини фігури, заданої своєю (0,1) матрицею  $M$  в напрямку осі  $Ox$ , потрібно виконати такі дії:

Для кожного горизонтального рядку з номером  $j$  знайти найправіший  $M_{ji}$  та найлівіший  $M_{jk}$  одиничний елементи.

Обчислити  $f_j = (i - k + 1)$ .

Обчислити величину  $f = \max_j f_j$ .

Знайти довжину фігури за формулою  $\beta = e \cdot f$ .

Поряд з матрицею  $M$  розглянемо матрицю  $\tilde{M}$ , яка отримана дописуванням до матриці  $M$  справа нульової матриці такого ж розміру, як і матриця  $M$ , а також матрицю  $\tilde{M}_k$ , яка отримана з матриці  $\tilde{M}$  дописуванням зліва  $k$  нульових стовпчиків і відкиданням справа  $k$  нульових стовпчиків (очевидно, що матриці  $\tilde{M}$  та  $\tilde{M}_k$  однакового розміру).

Знайдемо суму матриць  $\tilde{M} + \tilde{M}_1$ . Якщо хоча б один з елементів цієї суми дорівнює 2, то це означатиме, що фігура, зсунута в напрямку осі  $Ox$  на відстань  $e$ , буде мати спільні точки з фігурою у вихідному положенні. У цьому випадку знаходимо суму матриць  $\tilde{M} + \tilde{M}_2$  і здійснюємо перевірку на наявність двійок. Продовжуємо цей процес до тих пір, доки не знайдемо таке мінімальне значення  $k$ , при якому сума матриць  $\tilde{M} + \tilde{M}_k$  буде  $(0,1)$  матрицею.

Нижче, на рисунку 4, наведені фігура у вихідному положенні, а також зсунуті фігури на  $1e$ ,  $5e$ ,  $10e$  та  $17e$ .

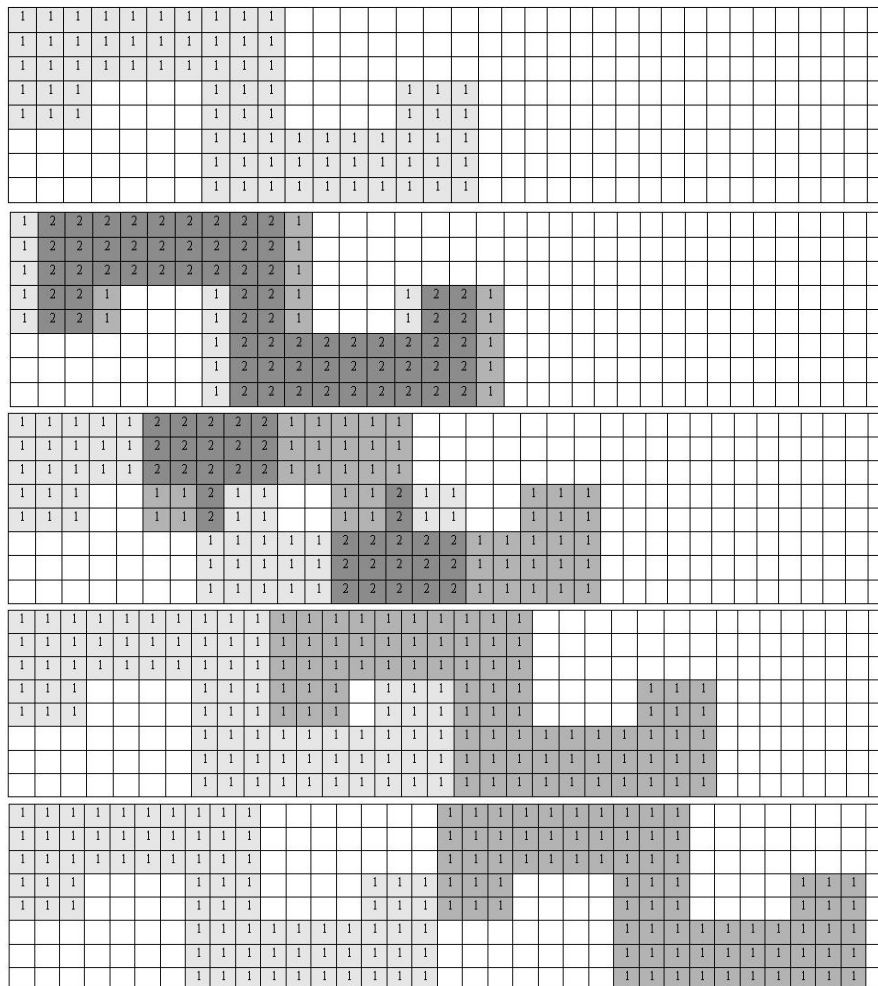


Рис. 4. Приклад фігури у вихідному положенні та її зсувів

Якщо знайдене  $k$  дорівнює  $f$ , то це означатиме, що задана фігура є роздільною в напрямку осі  $Ox$ . Якщо ж  $k < f$ , то це означатиме, що фігура є нероздільною. У цьому випадку отриманий крок штамповки буде дорівнювати  $k \cdot e$ . У розглянутому прикладі  $k = 10$ , а  $f = 17$ , отже, фігура не є роздільною в напрямку осі  $Ox$ .

### 7. Висновки та перспективи подальших досліджень

Таким чином, при пошуку оптимального регулярного розташування однакових фігур у прямокутному листі корисно одночасно використовувати як неперервне представлення фігури (за допомогою описання їх контурів відрізками прямих та кривих), так і її дискретне представлення (за допомогою  $(0,1)$  матриць). У статті запропоновано спосіб визначення дискретного представлення фігури по її неперервному представленню. Це застосується для визначення кроку штампування в заданому напрямку.

У подальшому представляє інтерес розв'язання оберненої задачі, тобто знаходження коду контуру фігури по її представленню у вигляді  $(0,1)$  матриці.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Рвачев. В.Л. Алгоритм решения задачи оптимального раскроя с круговыми выкройками при наличии ограничений на расстояния между парами выкроек/ В.Л.Рвачев, Ю. Г. Стоян// Кибернетика. - 1965.-№ 3.- С. 77-83.
2. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов/ Стоян Ю.Г. – К.: Наук. думка, 1975. - 347 с.
3. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов/ Ю.Г.Стоян, Н.И. Гиль. – К.: Наук. думка, 1976. - 247с
4. Скобцов Ю.А. Эволюционный подход к решению задачи раскроя листа гильотинным резом/ Ю.А.Скобцов, А.М. Фонотов // Наук. праці Донецького національного тех. ун-ту. Серія: Обчислювальна техніка та автоматика. - Донецьк: ДонНТУ. - 2003. – Вип. 64. – С. 248-259.
5. Скобцов Ю.А. Решение задачи раскроя на основе генетического программирования/ Ю.А.Скобцов, А.М. Фонотов // Вестник Херсонского государственного тех. ун-та – Херсон. - 2003. - № 2(18). – С. 137-142.
6. Скобцов Ю. А. К вопросу о применении метаэвристик в решении задач рационального раскроя и упаковки / Ю. А. Скобцов, В. Н. Балабанов// Вісник Хмельницького національного ун-ту. - 2008. — Т. 1, № 4. — С. 205—217.
7. Мухачева Э.А. Рациональный раскрой промышленных материалов Применение АСУ/ Мухачева Э.А. – М: Машиностроение, 1984. - 176 с., ил.
8. Мухачева Э.А. Модифицированный метод ветвей и границ: алгоритм и численный эксперимент для задачи одномерного раскроя/ Э.А. Мухачева, В.М. Картак // Информационные технологии. – 2000. – № 9. – С. 15-22.
9. Andrea Lodi. Recent advances on two-dimensional bin packing problems / Andrea Lodi, Silvano Martello, Daniele Vigo // Discrete Applied Mathematics archive. – 2002. Vol. 123 , Issue 1-3. – P. 379 – 396.



10. Европейская рабочая группа по вопросам раскроя и упаковки ESICUP.- Режим доступа до журн.:<http://paginas.fe.up.pt/~esicup/>
11. Зенкин О.В. Некоторые алгоритмы оптимального раскроя листового проката/ О.В.Зенкин, А.К. Приварников // Труды мех.-мат. факультета по заказам промышленности.- Днепропетровск: ДГУ. – 1971. – № 1. – С. 226-233.
12. Зинченко А.И. Алгоритм регулярного размещения однотипных фигур в прямоугольном листе/ А.И. Зинченко, А.К. Приварников // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фіз.-мат. науки.– 2006. - №1. - С 34-38.
13. Зінченко А.І. Алгоритм зустрічного штампування фігурних деталей у прямокутному листі/ А.І.Зінченко, А.К. Приварников // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фіз.-мат. науки.– 2008. -№1. - С.79-83.

---

Надійшла у першій редакції 27.01.2010, в останній - 07.03.2010.

© А. І. Зінченко, А. К. Приварников, 2010