УДК 536.24

Вариационно-структурный метод моделирования конвективного теплообмена при ламинарном течении в трубах неканонического сечения

Д. А. Котульский
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

В статье излагаются результаты по совместному применению метода Ритца, структурного метода и интерполяционных полиномов Ньютона к решению краевых задач гидродинамики и конвективного теплообмена для труб сложного поперечного сечения. Определена функциональная зависимость числа Нуссельта от геометрического параметра β двойной трубы квадратного сечения.

Ключевые слова: *конвективный теплообмен, ламинарное течение, вариационно-структурный метод.*

У статті викладаються результати, які отримані при спільному застосуванні методу Ритца, структурного методу та інтерполяційних поліномів Ньютона щодо вирішення крайових завдань гідродинаміки й конвективного теплообміну для труб складного поперечного перерізу. Визначено функціональну залежність числа Нуссельта від геометричного параметра β подвійної труби квадратного перерізу.

Ключові слова: *конвективный теплообмін, ламінарна течія, варіаційно-структурний метод.*

In the article the results, which were obtained by means of combined using of Ritz method, structural method and interpolational Newton polynomials for solving boundary-value problems of hydrodynamics and convective heat transfer for pipes with the complicated cross-section, are given. The functional dependence of Nusselt number from the geometrical parameter β of a double pipe with the square cross-section, was determined.

Key words: *convective heat transfer, laminar flow, variation-stractural method.*

Общая постановка задачи

В постановке задач теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах и каналах, как и в работах [1, 2], принимаем следующие допущения:

– течение жидкости и процесс теплообмена стационарны;

– имеется предвключенный участок гидродинамической стабилизации, на котором ламинарное течение жидкости стабилизируется;

– во входной части канала $z \le 0$ температура жидкости одинакова по сечению и равна T_0;

– жидкость несжимаема, физические свойства жидкости постоянны;

– в активной зоне канала $z \le 0$ теплоноситель имеет внутренние источники тепла, локальная мощность которых равна $q(x, y, z)$;

– теплопроводность среды в направлении течения жидкости мала по сравнению с более значительным переносом тепла конвекцией.

По данным работы [1] для газов и неметаллических жидкостей последнее допущение всегда выполняется, но оно может не выполняться для жидких металлов. Тогда, согласно [1, 2], расчет температурного поля в трубе или канале сводится к решению уравнения

$$w_z(x,y)\frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \frac{q(x,y,z)}{c\gamma} \tag{1}$$

при

$$T(x,y,z)\big|_{z\le 0} = T_0 \tag{2}$$

и определенных граничных условиях на поверхности трубы или канала.

Здесь функция $w_z(x,y)$ определяет поле скоростей в потоке жидкости. Для уравнения (1) рассмотрим следующие граничные условия:

$$L_k T(x,y,z)\big|_{S_k} = f(z)\varphi_k(x,y), \tag{3}$$

где L_k – дифференциальные операторы заданного порядка по переменным x,y;

$\varphi_k(x,y)$ – заданные функции;

$S = \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$ – боковая поверхность трубы или канала.

Краевые условия (3) в частных случаях могут иметь одну из форм

$$T\big|_{S_k} = f(z)\varphi_k(x,y), \qquad \frac{\partial T}{\partial \nu}\bigg|_{S_k} = \beta(z)\psi_k(x,y),$$

а в некоторых случаях возможно их сочетание с условиями третьего рода на различных участках поверхности S.

Рассмотрим случай развитого ламинарного течения и теплопередачи в двойной трубе квадратного сечения (рис. 1). Рассмотрим область тепловой стабилизации ($\frac{\partial T}{\partial z} = const$).

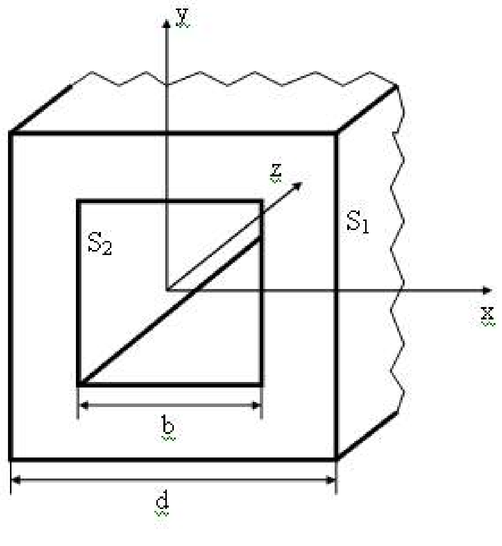

Рис. 1 – Двойная труба квадратного сечения

Для функций

$$w_z^* = -\frac{w_z}{\frac{d^2}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}}, \; T^* = -\frac{T - T_2}{\frac{d^4}{a\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}}$$

в безразмерных координатах $x_1 = xd^{-1}$, $y_1 = yd^{-1}$ задачи для функций T^* и w_z^* приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y_1^2} = w_z^*, \tag{4}$$

$$T\big|_{\Gamma_1} = u_1^*, \; T^*\big|_{\Gamma 2} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 w_z^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_z^*}{\partial y_1^2} = -1, \tag{6}$$

$$w_z^*\big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0. \tag{7}$$

Структурная схема решения

Если $T_i = B(\Phi_i)$ есть структуры решения, точно учитывающие краевые условия первого, второго или третьего рода на различных участках S_i $(i = 1,2,...,m)$ поверхности S трубы сложного сечения, то структуру решения задачи (1)-(3) точно удовлетворяющую всем заданным граничным условиям построим в виде [3, 4]

$$T = \left(\sum_{i=1}^{m} B_i(\Phi_i)\omega_i^{-2}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\omega_i^{-2}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Заметим, что неопределенные функции Φ_i, входящие в структуру решения (8), можно представить различными полиномами и относить их к различным системам координат. Это открывает дополнительные возможности с точки зрения повышения эффективности аппроксимации искомого решения задачи.

Решения краевых задач (4)-(7) представим в виде

$$w_z^* = \sum_{i+j=0}^{n} B_{ij}\omega\varphi_{ij},$$

$$T^* = \frac{\omega_2 T_1^*}{\omega_1 + \omega_2} + \sum_{i+j=0}^{n} C_{ij}\omega\varphi_{ij}, \tag{9}$$

где $\varphi_{ij} = P_{2i}(2x_1)P_{2j}(2y_1)\left[P_{2i}(2x_1) + P_{2i}(2y_1)\right]$;

$\omega_1 = \left(x_1^2 - 0.25\right)\left(y_1^2 - 0.25\right), \quad \omega = \omega_1 \cdot \omega_2$;

$$\omega_2 = \left(x_1^2 - \frac{\beta^2}{4}\right) + \left(y_1^2 - \frac{\beta^2}{4}\right) + \sqrt{\left(x_1^2 - \frac{\beta^2}{4}\right)^2 + \left(y_1^2 - \frac{\beta^2}{4}\right)^2};$$

$P_s(t)$ – полиномы Чебышева.

Коэффициенты B_{ij} определяются из системы уравнений

$$\sum_{\substack{i+j=0\\ i,j>0}}^{n} B_{ij} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_1}\frac{\partial X_{ks}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{ij}}{\partial y_1}\frac{\partial X_{ks}}{\partial y_1} \right] dx_1 dy_1 = \int_{\Omega} X_{ks} dx_1 dy_1 \ ,$$

а C_{ij} из системы вида

$$\sum_{i+j=0}^{n} C_{ij} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_1}\frac{\partial X_{ks}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{ij}}{\partial y_1}\frac{\partial X_{ks}}{\partial y_1} \right] dxdy = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}\frac{\partial X_{ks}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1}\frac{\partial X_{ks}}{\partial y_1} \right] dxdy \ ,$$

где $\Phi_0 = \omega_2 u_1^* (\omega_1 + \omega_2)^{-1}$.

Число Нуссельта рассчитывается по формуле

$$\overline{Nu} = \left(1 - \beta^2\right) \int_{\Omega} w_z^* d\Omega \left[\int_{\Omega} u^* d\Omega \right]^{-1} .$$

Определение параметрической зависимости числа Нуссельта от параметра β в вычислительном эксперименте

Чтобы определить параметрическую зависимость числа Нуссельта от параметра β, определим параметрическую зависимость коэффициентов C_{ij} структуры решения (9) от β с помощью интерполяционных формул Ньютона.

$$C_{ij}(\beta) = C_{ij}^{(0)} + gC_{ij}^{(0)} + \frac{g(g-1)}{2!}\Delta^2 C_{ij}^{(0)} + \frac{g(g-1)(g-2)}{3!}\Delta^3 C_{ij}^{(0)} + \\ + \frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{4!}\Delta^4 C_{ij}^{(0)} + \frac{g(g-1)(g-2)(g-3)(g-4)}{5!}\Delta^5 C_{ij}^{(0)}, \quad (10)$$

$$C_{ij}(\beta) = C_{ij}^{(5)} + gC_{ij}^{(4)} + \frac{g(g+1)}{2!}\Delta^2 C_{ij}^{(3)} + \frac{g(g+1)(g+2)}{3!}\Delta^3 C_{ij}^{(2)} + \\ + \frac{g(g+1)(g+2)(g+3)}{4!}\Delta^4 C_{ij}^{(1)} + \frac{g(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)}{5!}\Delta^5 C_{ij}^{(0)}, \quad (11)$$

Первая формула (10) используется для β меньших среднего значения ($\beta_{cp} = (0.25 + 0.5) \cdot 0.5 = 0.375$) принятого диапазона ($\beta_0 = 0.25 \ldots 0.5$), $g = \dfrac{\beta - \beta_0}{h}$ ($\beta_0 = 0.25$), $h = 0.05$. Вторая формула (11) используется для $\beta \geq 0.375$, $g = \dfrac{\beta - \beta_5}{h}$ ($\beta_5 = 0.5$) [3].

На рис.2 приведена зависимость числа Нуссельта от параметра β (сплошная линия – вычислительный эксперимент, квадратики – результаты по данным работы [5].

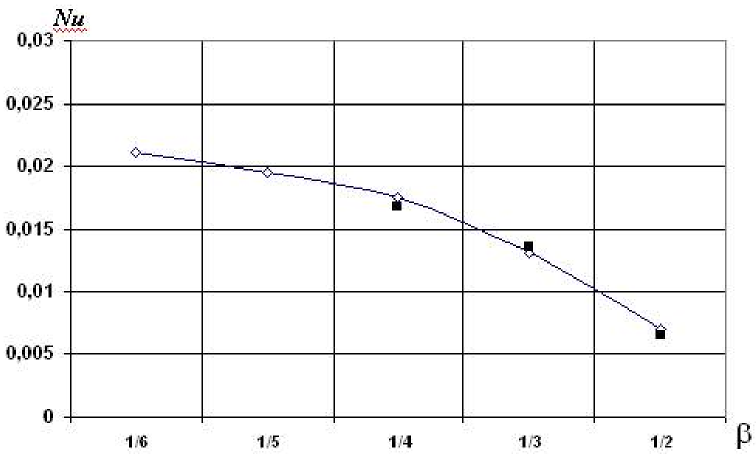

Рис. 2 – График зависимости числа Нуссельта от параметра β

Выводы

Предложенный аналитический подход к математическому моделированию конвективного теплообмена для труб сложного поперечного сечения и подход к определению параметрической зависимости числа Нуссельта от геометрического параметра β поперечного сечения трубы дают новые качественные возможности исследования конвективного теплообмена при проектировании теплообменных систем по конструктивным элементам «труба в трубе», что позволяет впервые на базе пораметрической зависимости числа Нуссельта от β определять оптимальное значение β с целью получения приемлемого числа Нуссельта

ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия, 1967. – 412 с.
2. Петухов Б.С. Теплообмен в ядерных энергетических установках /Б.С. Петухов, Л. Г. Генин, С. А. Ковалев. – М.: Атомиздат, 1974. – 367 с.
3. Слесаренко А.П. R-функции и вариационные методы в моделировании конвективного теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах неканонического поперечного сечения / А. П. Слесаренко, Д. А. Котульский // Проблемы машиностроения. – 2001.– Т. 4, №3-4.– С. 72 – 79.
4. Слесаренко А.П. Регионально-аналитический и проекционно-разностный методы в математическом моделировании, оптимизации и управлении процессами теплопередачи // Тепломассообмен-ММФ-92: Докл. II Минского междунар. форума (Беларусь, Минск, май 1992). – Минск: ИТМО АН Беларуси, 1992. – Т.9. – С. 154-157.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 150 с.

Надійшла 12.03.2010.

© Д. А. Котульский, 2010