УДК 537.8 : 539.124

Моделирование электрического заряда, спина, массы и магнитного момента лептонов в классической электродинамике

М. Ф. Бессмертный, А. И. Болтоносов
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье рассматриваются уравнения классической электродинамики на новой структуре: двухстороннем пространстве – времени (ДПВ). Обе метрики на ДПВ – дефинитные. Зеркальной симметрии отвечает «закон сохранения»: разбиение континуума событий на пространство и время. Нарушение симметрии между правым и левым приводит к возникновению зарядов и токов. Построена точечная модель заряженных лептонов (электрона, мюона и таона). Масса и спин частиц в модели имеют электромагнитное происхождение.

Ключевые слова: *электрон, электромагнитная масса, спин, нарушение симметрии.*

В статі розглядаються рівняння класичної електродинаміки на новій структурі: двобічному просторі – часі (ДПЧ). Обидва метричні тензори на ДПЧ – позитивно визначені. Показано, що дзеркальній симетрії відповідає «закон збереження»: розподіл континууму подій на простір та час. Порушення симетрії між правим та лівим призводить до виникнення електричних зарядів та струмів. Збудовано точкову модель заряджених лептонів (електрону, мюону та таону). Маса та спін часток в моделі мають електромагнітне походження.

Ключові слова: *електрон, електромагнітна маса, спін, порушення симетрії.*

In the paper we consider the equations of the classical electrodynamics on a new structure: two-sided space-time (TSST). Both metrics are definite on TSST. “Conservation law” (fragmentation of space of events to space and time) corresponds to the mirror symmetry. Breaking of symmetry between the left and the right causes the origin of charges and currents. Also a point model of a charged leptons (electron, heavy electron and taon) is built. Mass and spin of particles in the model both have electromagnetic origin.

Key words: *electron, electromagnetic mass, spin, breaking of symmetry*

1. Введение

В классических теориях непрерывным группам симметрий пространства – времени (ПВ) отвечают законы сохранения. Дискретные симметрии остаются, при этом, в стороне [1-3]. В то же время, *ориентируемость* ПВ предполагает наличие двухэлементной группы симметрий ПВ – зеркальной группы. Роль этой группы в структуре ПВ исследована, по нашему мнению, недостаточно.

В представлениях о ПВ большую роль сыграла электродинамика. На рубеже 19-го и 20-го веков предпринимались попытки на основе электродинамики строить модели микрообъектов. Наиболее известные из них: электронная теория Лоренца, абсолютно жесткий электрон Абрагама, теория Борна-Инфельда, теория потенциалов Ми [4-6]. Но отождествить электрон с электромагнитным полем не удавалось. Причин для этого – несколько: а) элементарный заряд в релятивистской теории с необходимостью должен быть точечным объектом [2], а энергия поля точечного заряда оказывается бесконечной; б) если энергия точечного заряда в теории конечна, то, обычно, не выполняется соотношение $E = mc^2$; в) в классических моделях не удавалось смоделировать спин частицы.

Однородные уравнения Максвелла симметричны относительно магнитных и электрических полей. Заряды нарушают симметрию. Восстановление симметрии введением магнитных зарядов (монополей) не подтверждается экспериментом.

Поэтому сохранение наибольшего количества симметрий возможно на одном пути: рассматривать *только однородные уравнения*. Заряды в электродинамике должны появляться за счет специфических свойств ПВ. Кроме того, структура ПВ в микро масштабе может (и должна!) отличаться от стандартной, обеспечивая *точечность* электрона и пространственную ориентацию спина.

Целью статьи является построение классической, чисто электромагнитной модели заряженного лептона (электрона, мюона, τ - частицы). Для этого приходится видоизменить представления об *электромагнитной структуре* ПВ. Сначала мы определим понятие двухстороннего пространства – времени (ДПВ), и, далее, рассмотрим решения уравнений электродинамики на ДПВ, моделирующие заряженные лептоны.

2. Двухсторонняя дефинитная метрическая структура

Пусть $\mathbf{A}$ - 4 – мерное аффинное пространство. N - точка из $\mathbf{A}$. Тогда $N = N_0 + x^i(N)\, e_i$, где: N_0 - фиксированная точка; $\{e_i\}_{i=0}^{3}$ - базис в линейном пространстве $\mathbf{R}^4$. Рассмотрим на $\mathbf{A}$ две системы координат (карты):

$$K_r = \{\mathbf{A};\ x_r^0 = x^0(N),\quad x_r^1 = x^1(N)\ ,\dots,\quad x_r^3 = x^3(N)\}; \tag{2.1}$$

$$K_l = \{\mathrm{A};\ x_l^0 = x^0(N),\ x_l^1 = -x^1(N)\ ,\dots,\ x_l^3 = -x^3(N)\}. \tag{2.2}$$

Пусть A_r (A_l) - полный ориентированный атлас [3] на $\mathbf{A}$, содержащий карту $K_r\,(K_l)$, и состоящий из всех карт, C^∞ - согласованных между собой. $A_0 = A_r \cup A_l$ - полный неориентированный атлас на $\mathbf{A}$. Тогда на $\mathbf{A}$, как на базе, можно рассматривать следующие C^∞ - дифференцируемые [3] многообразия:

а) ориентированные многообразия:

$$\mathbf{M}_l = \{\mathbf{A}; A_l\} \text{ - \textit{левое пространство} на } \mathbf{A}; \tag{2.3}$$

$$\mathbf{M}_r = \{\mathbf{A}; A_r\} \text{ - \textit{правое пространство} на } \mathbf{A}; \tag{2.4}$$

б) неориентированное многообразие

$$\mathbf{M}_0 = \{\mathbf{A}; A_0\} \text{ - \textit{пространство наблюдения} на } \mathbf{A}. \tag{2.5}$$

В каждой точке N многообразий $\mathbf{M}_r$ и $\mathbf{M}_l$, в касательных пространствах [3], фиксируем базисы: базис в $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_r$ (через ∂_{x^i} обозначена производная по x^i)

$$\{\partial_{x_r^0}\Big|_N,\ \partial_{x_r^1}\Big|_N\ ,\dots,\ \partial_{x_r^3}\Big|_N\}, \tag{2.6}$$

соответствует карте K_r; а базис в $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_l$

$$\{\partial_{x_l^0}\Big|_N,\ -\partial_{x_l^1}\Big|_N,\dots,-\partial_{x_l^3}\Big|_N\}, \tag{2.7}$$

соответствует карте K_l. Базисы (2.6) и (2.7), как базисы в $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_0$, совпадают.

Определение 2.1. Будем говорить, что на аффинном 4 – мерном пространстве

$\mathbf{A}$ задана *двухсторонняя дефинитная метрическая структура* (ДДМС), если:

а) на $\mathbf{A}$ построены левое $\mathbf{M}_l$ (2.3) и правое $\mathbf{M}_r$ (2.4) пространства;

б) в касательных пространствах выбрана ориентация: базис (2.6) в $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_r$ считается, по определению, положительно, а базис (2.7) в $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_l$ - отрицательно ориентированными;

в) в каждой точке N задана *зеркальная пара*, то есть линейные отображения J_1, J_2 касательных пространств, определяемые в базисах (2.6) и (2.7) матрицами

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{pmatrix} : \mathbf{T}_N\mathbf{M}_l \to \mathbf{T}_N\mathbf{M}_r\,, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} : \mathbf{T}_N\mathbf{M}_l \to \mathbf{T}_N\mathbf{M}_r; \qquad (2.8)$$

г) на $\mathbf{M}_l$ и $\mathbf{M}_r$ заданы положительно определенные метрические тензоры $g_l = \{ g_{ik}^{(l)} \}$ и $g_r = \{ g_{ik}^{(r)} \}$, согласованные с зеркальной парой (в), то есть такие, что операторы $Z_l = J_2^{-1} J_1 : \mathbf{T}_N\mathbf{M}_l \to \mathbf{T}_N\mathbf{M}_l$, $Z_r = J_2 J_1^{-1} : \mathbf{T}_N\mathbf{M}_r \to \mathbf{T}_N\mathbf{M}_r$ являются изометрическими операторами для метрик g_l и g_r.

Изометрией ДДМС будем называть линейное в каждой точке N отображение $P(N) : \mathbf{T}_N\mathbf{M}_l \to \mathbf{T}_N\mathbf{M}_r$, такое, что: а) $P^* g_r\, P = g_l$, то есть $P(N)$ - изометрия; б) образ $\{Pe_0, \ldots, Pe_3\}$ каждой положительно ориентированной четверки векторов $\{e_0, \ldots, e_3\}$ из $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_l$ положительно ориентирован в $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_r$; в) $Z_r P(N) = P(N)\, Z_l$ (согласование с зеркальной парой).

Изометрия $P^*(N) : \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_r \to \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_l$ определена на 1 – формах. На k - формы действие изометрии распространим как внешнюю степень P^*: $\overset{k}{\wedge} P^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = P^*(dx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge P^*(dx^{i_k})$. Нетрудно проверить, что изометрия P^* на ДДМС и операторы Ходжа [2,3] τ_r и τ_l на правом и левом пространствах согласованы, что позволяет ввести на ДДМС операцию, обобщающую действие оператора Ходжа:

Определение 2.2. Пусть ω есть k - форма на $\mathbf{M}_r$. $(4 - k)$ - форму $\tau\omega$ на $\mathbf{M}_l$

$$\tau\omega \;=\; \tau_l(\overset{k}{\wedge} P^*)\,\omega \;=\; -(\overset{4\text{-}k}{\wedge} P^*)\,\tau_r\,\omega \qquad (2.9)$$

будем называть *изометрическим дополнением* формы ω на ДДМС.

Анализ показывает, что среди всех изометрий данной ДДМС существует единственная *каноническая* изометрия P_0, такая что:

$$P_0 = G^{-1} J_1\, H, \qquad (2.10)$$

где $G^* G = g_r$, $H^* H = g_l$ - блочно диагональные (блоки соответствуют блокам матрицы J_1) факторизации метрических тензоров, такие что $G^* H > 0$.

Отметим, что разность $P_0(N) - J_1$ «измеряет» отклонение ДДМС от *зеркально симметричной* структуры, для которой $g_r \equiv g_l$.

3. Двухстороннее пространство – время

Имеется естественное соответствие между точками пространств $\mathbf{M}_l, \mathbf{M}_r$ и $\mathbf{M}_0$, так как они построены на одной и той же базе. Для «переноса» метрик ДДМС на пространство наблюдения $\mathbf{M}_0$ определим изоморфные вложения

$$\varphi : \mathbf{T}_N\mathbf{M}_0 \to \mathbf{T}_N\mathbf{M}_r; \qquad \psi : \mathbf{T}_N\mathbf{M}_0 \to \mathbf{T}_N\mathbf{M}_l, \tag{3.1}$$

касательных пространств. Выбором базиса в $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_0$ можно добиться, чтобы матрица одного из вложений, скажем φ, была единичной. Пусть (2.6) – такой базис. Рассмотрим билинейные формы $B(x,y) = \xi_y(x)$ на $\mathbf{T}_N\mathbf{M}_0$ $(x, y \in \mathbf{T}_N\mathbf{M}_0$, $\xi_y \in \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_0)$, определяемые отображениями:

$$\mathbf{T}_N\mathbf{M}_0 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{T}_N\mathbf{M}_r \xrightarrow{g_r = G^*G} \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_r \xrightarrow{P_0^*} \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_l \xrightarrow{\psi^*} \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_0 \tag{3.2}$$

$$\mathbf{T}_N\mathbf{M}_0 \xrightarrow{\psi} \mathbf{T}_N\mathbf{M}_l \xrightarrow{g_l = H^*H} \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_l \xrightarrow{P_0^{*-1}} \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_r \xrightarrow{\varphi^*} \mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_0 \tag{3.3}$$

Отображения (3.2) и (3.3), при произвольных G и H (таких что $G^*H > 0$), только тогда определяют одну и ту же *симметричную* невырожденную билинейную форму $h = \{h_{ik}\}$, когда $\psi = \alpha I$, где α - скалярная функция. Тогда ДДМС индуцирует на пространстве наблюдения ***индефинитную метрику***:

$$h = \alpha(N)\, G^* J_1\, H, \tag{3.4}$$

Метрика (3.4) порождает на $\mathbf{M}_0$ оператор Ходжа τ_0. Для того, чтобы изометрическое дополнение τ (2.9) на ДДМС и оператор Ходжа τ_0 на $\mathbf{M}_0$ были согласованы, потребуем для всех k коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \overset{k}{\wedge}\mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_0 & \xrightarrow{\tau_0} & \overset{4-k}{\wedge}\mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_0 \\ \downarrow & & \uparrow \\ \overset{k}{\wedge}\mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_r & \xrightarrow{\tau} & \overset{4-k}{\wedge}\mathbf{T}_N^*\mathbf{M}_l \end{array}, \tag{3.5}$$

где вертикальными стрелками обозначены внешние степени $\overset{k}{\wedge}\varphi^{*-1}$ и $\overset{4-k}{\wedge}\psi^*$ отображений φ и ψ. Несложный, но громоздкий анализ показывает, что диаграмма (3.5) будет коммутативной тогда и только тогда, когда

$$\alpha(N) = \pm\left(\det g_r / \det g_l\right)^{\frac{1}{8}}. \tag{3.6}$$

Будем рассматривать ДДМС, для которой нарушение зеркальной симметрии носит скалярный характер, то есть каноническая изометрия (2.10) имеет вид

$$P_0 = G^{-1}J_1\, H \equiv \beta(N) J_1, \tag{3.7}$$

где β - скалярная функция точки N. Из (3.7) следует, что $\alpha(N) = \beta^{-1}(N)$.

Определение 3.1. Двухсторонним пространством – временем (ДПВ) $\mathbf{D}$ на $\mathbf{A}$ будем называть совокупность:

а) ДДМС на $\mathbf{A}$ с канонической изометрией вида (3.7);

б) пространство наблюдения $\mathbf{M}_0$ на $\mathbf{A}$, совместно с вложениями (3.1): $\varphi = I$; $\psi = \beta^{-1}(N)I$, обеспечивающими коммутативность диаграммы (3.5).

4. Уравнения электродинамики на ДПВ

Исходим из принципа наименьшего действия на $\mathbf{M}_0$ с метрикой (3.4). Пусть $F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i$ - тензор электромагнитного поля на $\mathbf{M}_0$ (A_i - потенциалы поля, ∇_k - ковариантное дифференцирование [3], согласованное с метрикой h).

В качестве плотности функции Лагранжа выберем функцию

$$L = \sqrt{|\det h|}\, \nu(N)\, F_{ik} F^{ik}, \tag{4.1}$$

где $\nu(N) = \beta^2(N)$ учитывает структуру ДПВ. Стандартным образом, варьируя потенциалы, получим уравнения электродинамики на $\mathbf{M}_0$:

$$\begin{cases} \nabla_i F_{jk} + \nabla_k F_{ij} + \nabla_j F_{ki} = 0, \\ \nabla_k (\nu(N) F^{ik}) = 0, \quad i = 0,1,2,3. \end{cases} \tag{4.2}$$

Основная теорема. На двухстороннем пространстве – времени уравнения электродинамики (4.2) эквивалентны уравнениям

$$\begin{cases} d\, F_r = 0, \\ d\, F_l = 0, \end{cases} \quad F_l = \tau F_r, \tag{4.3}$$

где: $F_r = F_{i_1 i_2} dx_r^{i_1} \wedge dx_r^{i_2}$ - 2 – форма поля на $\mathbf{M}_r$; τ - операция (2.9) изометрического дополнения; F_l - 2 – форма поля на $\mathbf{M}_l$.

Доказательство следует из коммутативности (3.5) и независимости операции d внешнего дифференцирования [3] форм от метрики и ориентации.

Уравнения (4.2) эквивалентны «формально неоднородным» уравнениям

$$\begin{cases} \nabla_i F_{jk} + \nabla_k F_{ij} + \nabla_j F_{ki} = 0, \\ \nabla_k F^{ik} = -F^{in} \nabla_n \ln \nu(N), \quad i = 0,1,2,3. \end{cases} \tag{4.4}$$

Если ДПВ – зеркально симметричное, то есть $\nu(N) \equiv 1$, то $F^{in} \nabla_n \ln \nu(N) \equiv 0$. Тогда ***нарушение зеркальной симметрии ДПВ приводит к появлению на пространстве наблюдения ненулевых зарядов и токов.*** Так как уравнения (4.4) конформно инвариантны, то метрику $h = \alpha(N)\, G^* J_1\, H$, на $\mathbf{M}_0$ можно заменить метрикой $h_0 = G^* J_1\, H$, причем: а) $G^* H$ может быть произвольной, положительно определенной, блочно диагональной матрицей; б) от h_0 электромагнитная структура ДПВ не зависит. Мы предполагаем, что h_0 определяется другими взаимодействиями (возможно гравитационными). В дальнейшем будем считать метрику h_0 метрикой Минковского.

5. Модель заряженных лептонов

В качестве модели заряженного лептона будем рассматривать статическое решение уравнений (4.4). Так как электрическое поле лептона обладает центральной симметрией, то положим $\nu = \nu(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.Тогда, для статического случая, уравнения (4.4), в 3 – векторных обозначениях, примут вид

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{B} = -[\operatorname{grad} \ln \nu, \vec{B}]; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{E} = -(\operatorname{grad} \ln \nu, \vec{E}). \end{cases} \tag{5.1}$$

На функцию $\nu(r)$ наложим ограничения: а) решения $\vec{B}(\vec{r}),\ \vec{E}(\vec{r})$ должны быть всюду конечные и непрерывные; б) энергии электрического и магнитного полей – конечны; в) $\nu(r) \to 1$ при $r \to \infty$ (асимптотика метрики в $\mathbf{M}_0$ на ∞).

Так как лептоны обладают магнитным моментом, то в качестве векторного потенциала для $\vec{B}$ примем, «исправленный» функцией $f(r)$, потенциал диполя:

$$\vec{A}(\vec{r}) = B\lambda f(r)\{-yr^{-3},\ xr^{-3},\ 0\}, \qquad f(r) = \exp(-\lambda^k / kr^k), \tag{5.2}$$

где постоянные B, λ имеют размерности [Нмс/К] и [м], а $k > 0$ - безразмерна.

Пусть $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ - решение (5.1). Тогда, из (5.1), получаем уравнение на $\nu(r)$:

$$(\ln \nu)'(r\, f' - f) = -(r\, f'' - 2f'). \tag{5.3}$$

Решая его, находим $\nu(r)$ и, из уравнений (5.1), электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\nu(r) = \left|1 - \lambda^k / r^k\right|^{-1-2/k} \cdot \exp(\lambda^k / kr^k); \tag{5.4}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \psi(r) E\, r^{-2} \nu^{-1}(r) \cdot \vec{r} / r; \quad \psi(r) \equiv u,\ (r < \lambda); \quad \psi(r) \equiv 1,\ \ (r > \lambda), \tag{5.5}$$

где размерность постоянной E такая же, как и B, а u - безразмерна.

Тензор T^{ik} энергии - импульса поля на $\mathbf{M}_0$ определяется стандартно:

$$T^{ik} = \varepsilon_0 c^2 (-F_{jl} F^{kl} h^{ij} + \frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} h^{ik}), \tag{5.6}$$

где ε_0 - электрическая постоянная, c - скорость света в вакууме; а

$$h_{ik} = \nu^{-\frac{1}{2}}(r)\, diag\{1, -1, -1, -1\}. \tag{5.7}$$

Электрический заряд и магнитный момент поля равны, соответственно

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 c E, \qquad M = M_z = 4\pi\varepsilon_0 c^2 B\lambda. \tag{5.8}$$

Из сохраняющихся токов $T^{ik}\eta_k$, где η_k - компоненты векторов Киллинга метрики (5.7), получим для энергии покоя $\mathbf{E}_0$ и момента импульса (спина) S:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\pi\varepsilon_0 c^2}{\lambda}\left(\frac{1}{2}E^2 J_E + \frac{1}{3}B^2 J_B\right); \qquad S = S_z = \frac{2}{3}\pi\varepsilon_0 c E B J_S, \tag{5.9}$$

$$J_E = 4\lambda \int_0^\infty r^{-2} (\psi\nu)^{-2} dr;\ J_B = 4\lambda^3 \int_0^\infty r^{-2} (f')^2 dr;\ J_S = 4\lambda \int_0^\infty r^{-2} (f - rf')(\psi\nu)^{-1} dr,$$

причем J_E, J_B и J_S есть функции только k и u (от λ не зависят).

Спин поля можно рассматривать как инвариантное вращение, не изменяющее поле. При равномерном движении поля как целого возникает ориентирующий момент импульса, поворачивающий поле, пока вращение не станет инвариантным. Ось поля и его скорость становятся коллинеарными, а энергия – минимальна. В этом и состоит ***эффект пространственной ориентации спина.***

Определим массу поля как коэффициент пропорциональности между импульсом поля и его скоростью. Тогда масса покоя поля

$$m_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\lambda}\left(\frac{2}{3}E^2 J_E + \frac{2}{15}B^2 J_B\right). \qquad (5.10)$$

Определение 5.1. Решение уравнений (5.1) будем называть *физическим*, если для него выполняется соотношение Эйнштейна $\mathbf{E} = mc^2$.

Анализ соотношений (5.9) и (5.10) показывает, что решения $\vec{E}$ и $\vec{B}$ уравнений (5.1) только тогда (по отдельности) физические, когда они нулевые. Так как $J_E, J_B > 0$, то возможны *ненулевые* физические решения. Тогда ***ненулевой электрический заряд с необходимостью должен обладать ненулевым магнитным моментом и спином***, что и имеет место для лептонов.

Физическое решение, моделирующее электрон, характеризуется параметрами

$$E = -4,8032041973 \cdot 10^{-18} \text{ Нмс/К}; \quad B = \pm 3,7247063275 \cdot 10^{-18} \text{ Нмс/К};$$

$$k = 611,72323529; \quad u = -0,83999140195; \quad \lambda = \lambda_e = 2,4927505153 \cdot 10^{-13}\text{ м}.$$

Для мюона и τ - частицы изменяется только параметр λ:

$$\lambda_\mu = 1,205576934 \cdot 10^{-15}\text{ м}; \qquad \lambda_\tau = 7,16800481767 \cdot 10^{-18}\text{ м}.$$

При этом: $J_E = 454,93724132$; $J_B = 630,44654771$; $J_S = 530,14533068$.

Метрика (5.7), как видно из (5.4), обращается в нуль при $r = \lambda$. Сфера $r = \lambda_0$ воспринимается внешним наблюдателем как точка и разбивает пространство наблюдения на две части: «внутренность» и «внешность» лептона. Внешне электрон, мюон и τ - частица выглядят как ***точечные заряженные частицы***, отличающиеся только массами и магнитными моментами. «Внутренность» лептона содержит $\approx 99,1\%$ массы и $\approx 99,2\%$ спина частицы. В области $r > 1,1\lambda$ метрика (5.7) совпадает (с точностью $\approx 10^{-25}$) с метрикой пространства Минковского. Поэтому, при переходе к макро масштабам, выполняется принцип соответствия Бора. В заключение отметим, что было бы интересно рассмотреть на ДПВ обобщение уравнений (4.3) – уравнения Янга – Миллса [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмутцер Э. Симметрии и законы сохранения в физике. – М.: Мир, 1974. – 159 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С. П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 759 с.
4. Тоннела М. – А. Основы электромагнетизма и теории относительности. – М.: Иностранная литература, 1962. – 488 с.
5. Паули В. Теория относительности. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
6. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. – М.: Наука, 1986. – 495 с.

Надійшла - 29.04.2010.