

УДК 532.542:004.942

Моделювання ламінарного потоку в еліптичному каналі з легкопроникною шорсткістю

О. М. Бердник

Київський національний авіаційний університет, Україна

Побудовано математичну модель взаємодії ламінарного потоку в'язкої нестисливої рідини в еліптичному каналі з елементами легкопроникної шорсткості (ЛПШ), що знаходяться на стінках. Проведено чисельні експерименти поведінки потоку в залежності від параметрів ЛПШ для лінійного випадку. Прямим порівнянням перевірено відому залежність для гідравлічного опору еліптичного каналу.

Ключові слова: еліптичний канал, метод скінченних елементів, шорсткість, чисельний розв'язок, комп'ютерний експеримент.

Построена математическая модель взаимодействия ламинарного потока вязкой несжимаемой жидкости в эллиптическом канале с элементами легкопроницаемой шероховатости (ЛПШ). Проведены численные эксперименты поведения потока в зависимости от параметров ЛПШ для линейного случая. Прямым сравнением проверена известная зависимость для гидравлического напряжения эллиптического канала.

Ключевые слова: эллиптический канал, метод конечных элементов, шероховатость, численное решение, компьютерный эксперимент.

Mathematical model was built for laminar flow of viscous (filmy) stream of incondensable liquid along channel elliptical sections with an easily penetrable roughness (EPR) near walls. were investigated numerically of the behavior of the flow (stream; duct) depending on parameters of EPR. The results are discussed compared with the results obtained by other methods.

Key words: elliptical channel, finite element method, roughness, numerical solution, computer-based experiment.

1. Постановка проблеми в загальному вигляді та її актуальність

Канали не кругового перетину досить розповсюджені в теплотехніці та пристроях механічного очищення технологічних рідин. Актуальність проблеми в теоретичному плані зумовлена складністю гідродинамічних процесів, що відбуваються всередині каналів із шорсткістю на стінках. Саме адекватний опис течії рідини в умовах, що розглядаються, є вагомим вкладом для обґрунтування технічних рішень з удосконалення конструкції пристроїв фільтрування чи з інтенсифікації конвективного обміну в таких каналах.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми, виділення невирішених питань

Моделюванню потоків в'язкої рідини для випадку плоского каналу з перешкодами на стінках присвячені роботи [1-5], а для випадку призматичного каналу – [6-8]. При цьому всі автори розглядали перешкоди механічної структури. Щодо каналів з легкопроникною шорсткістю (ЛПШ) [2], нормальний перетин яких має форму еліпса, то таких відомостей в літературі не знайдено.

Хоча справедливо буде ввідзначити працю [9], де розв'язана подібна задача в осесиметричній постановці. Важливість розгляду випадку еліптичного каналу з

ЛПШ обумовлена потребою визначення залежності фундаментальних властивостей течій в таких каналах (характеристик переходу від ламінарного до турбулентного режимів, стійкості вихорів, їх еволюції та біфуркації) від параметрів ЛПШ.

«ЛПШ» – це термін, який підкреслює схожість з широко відомим та близьким за властивостями поняттям «шорсткість», вказує на відмінність від нього («проникність») та на особливості умов, за яких це поняття є справедливим («легко-») [2].

3. Мета роботи

Мета статті – побудова математичної моделі, що описує потік в'язкої нестисливої рідини в еліптичному каналі з ЛПШ, та розробка алгоритму розв'язку поставленої задачі.

4. Вихідні положення

Нехай ламінарний потік в'язкої нестисливої рідини направлений вздовж осі еліптичного каналу з ЛПШ однорідної механічної структури (рис. 1), причому h – висота шару перешкод, $n = \text{const}$ (м^{-3}) – концентрація перешкод в одиниці об'єму. Вісь Ox є власною віссю каналу, вздовж якої направлений потік, а Oy , Oz – відповідно, горизонтальна та вертикальна осі нормального перетину. Виділимо деякий об'єм рідини довжиною l і розглянемо його ізольовано від навколишнього рідкого середовища. Потік є ізотермічним: $\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Обмежимося випадком повністю стабілізованої течії: $p' = \Delta p / l = \text{const}$. Це дозволить зменшити розмірність задачі та спростити обчислення. Крім того, аналіз гідродинамічно стабілізованих потоків має суттєву практичну значимість.

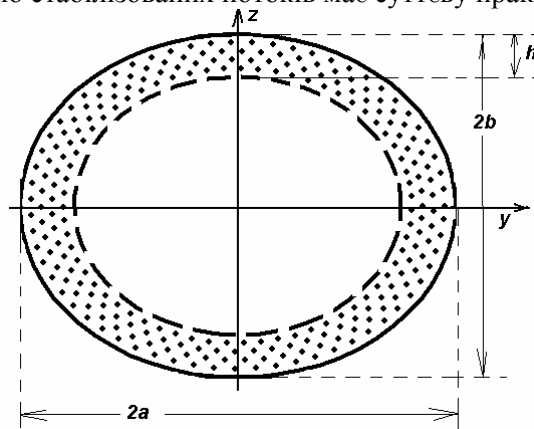


Рис. 1. Схема еліптичного каналу з ЛПШ

Зауважимо, що для випадку еліптичного каналу без ЛПШ відоме [10] рівняння руху на основі спрощених рівнянь Нав'є-Стокса:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = -p'. \quad (4.1)$$

5. Математична постановка задачі

При русі нестисливої рідини всередині ЛППШ одночасно відбуваються два процеси: її гальмування елементами шорсткості та її прискорення за рахунок надходження кінетичної енергії від потоку за областю ЛППШ. Враховуючи припущення про однорідність легкопроникної шорсткості, можна говорити і про рівномірний розподіл локальних сил опору [11], які діють з боку кожної перешкоди. В силу складності потоку, сформованого ЛППШ, введемо в рівняння (4.1) силу f^* (H/m^3), що дорівнює відношенню суми таких локальних сил до об'єму даного фрагмента еліптичного циліндра. Причому, з огляду на ламінарний режим течії, для $Re < 10^6$ варто взяти лінійний закон. Очевидно, що f^* буде розривною функцією, яка враховує як величину сил з боку одиничних перешкод так і концентрацію перешкод:

$$f^*(y, z, U) = \begin{cases} 0, & (y, z) \in \text{ЛППШ} \\ -k\rho nU, & (y, z) \notin \text{ЛППШ} \end{cases} \quad (5.1)$$

де k – емпіричний коефіцієнт (m^3/c).

Таким чином, взаємодію потоку в'язкої рідини з елементами легкопроникної шорсткості в еліптичному каналі можна описати рівнянням:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = -p' + f^* \quad (5.2)$$

доповненим умовою прилипання:

$$U(y, z) = 0 \text{ при } \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (5.3)$$

При $a/b = 1$ таку задачу, але в одновимірній постановці, вже було розглянуто раніше [9].

Для знаходження параметрів, що визначатимуть поле повздовжньої швидкості, корисно представити (5.1)–(5.3) в безрозмірному вигляді. Зокрема, в якості характерних масштабів обрано діаметр D (який би співпадав із значенням діаметра круглого каналу, коли $a = b$) та швидкість W , що є максимальною швидкістю на осі круглої з таким же діаметром труби без ЛППШ:

$$D = 2ab \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \quad W = \frac{D^2 p'}{16\mu} \quad (5.4)$$

В безрозмірних змінних (ознакою безрозмірності є риска)

$$\bar{y} = \frac{y}{D}, \quad \bar{z} = \frac{z}{D}, \quad \bar{U} = \frac{U}{W} \quad (5.5)$$

досліджувана задача набуде вигляду:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{z}^2} \right) = -16 - A\bar{U}, \quad \bar{U}(\bar{y}, \bar{z}) = 0 \text{ при } \bar{y}^2/\bar{a}^2 + \bar{z}^2/\bar{b}^2 = 1, \quad (5.6)$$

$$\text{де } A = \begin{cases} 0, & \bar{h} = 0 \\ \frac{knD^2}{\nu}, & \bar{h} > 0 \end{cases} \text{ та } \bar{h} = \frac{h}{D} - \text{безрозмірні щільність та висота ЛПШ};$$

ν – кінематична в'язкість;

$$\bar{a} = \frac{a}{D}, \bar{b} = \frac{b}{D} - \text{велика та мала півосі безрозмірного еліпса.}$$

6. Обчислювальний експеримент: обґрунтування алгоритму та реалізація

З математичної точки зору розрахунок поля безрозмірної повздовжньої швидкості подібний до розв'язку задачі теплопровідності зі сталою швидкістю генерації тепла:

$$-\operatorname{div}(c \cdot \operatorname{grad} U) + a \cdot U = f. \quad (6.1)$$

Тому для побудови чисельного розв'язку задачі (5.6), яка легко може бути перетворена до виду (6.1) з виконанням умови Діріхле $U = 0$ на границі еліптичної області, використано пакет прикладних програм MATLAB, а саме Partial Differential Equations (PDE) Toolbox, що призначений для розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних. Пакетом підтримується дискретизація на трикутній нерівномірній сітці, а рішення задач базуються на алгоритмах методу скінченних елементів (МСЕ). Варто зауважити, що математичною основою МСЕ є метод Гальоркіна та варіаційний метод Рітца. Прогрес у МСЕ останніх років полягає в побудові наборів базисних функцій, що володіють достатньою гладкістю.

Алгоритм пошуку чисельного розв'язку полягав в реалізації наступних кроків:

1. засобами графічного інтерфейсу PDE Toolbox побудовано безрозмірну еліптичну область (еліпс, що відповідає розмірному з півосями $a = 2$, $b = 1$);
2. визначена гранична умова Діріхле $U = 0$ на границі області;
3. автоматично вибрана адаптивна сітка (проведена триангуляція – розбиття еліпса на трикутники, кожний з яких є носієм своєї базисної функції);
4. здійснена постановка задачі з використанням синтаксису MATLAB (для $h = 0.3$, $A = 100$);
5. візуалізовано чисельний розв'язок (рис.2).

В ході виконання комп'ютерного експерименту до уваги було взято відмінність позначень у статті (y, z) та позначень в PDE Toolbox (x, y) . Параметри рівняння (6.1) визначені як $c=1$, $f=16$ відповідно до (5.6). Щодо коефіцієнта a – то тут виникла певна складність, оскільки він мав бути змінним $a=a(x, y)$. Вирішити цю проблему вдалося шляхом поєднання операцій між арифметичними та булевими змінними [13]. Саме на вказаній концепції була створена спеціальна m -функція:

$$\begin{aligned} \text{function } a &= \text{EPR} + \text{ellips}(x, y, a, b, h, A) \\ D &= 2 * a * b * \text{sqrt}(2 / (a.^2 + b.^2)) \end{aligned}$$

$$a = A - A * (\text{abs}(x) < (a-h)/D) * (\text{abs}(y) < (b-h)/(a-h) * \text{sqrt}((a-h).^2/D.^2 - x.^2)).$$

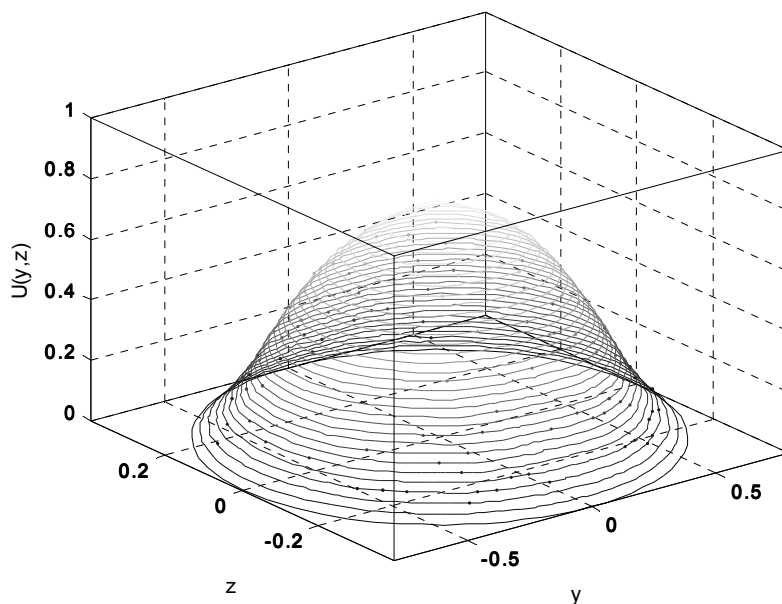


Рис.2. Схема потоку в еліптичному каналі з ЛПШ ($h=0.3$, $A=300$)

7. Аналіз результатів

Отримане поле безрозмірної швидкості демонструє передбачувану симетрію (рис.3). Спостерігається зміна профілю безрозмірної швидкості потоку в каналі ($a=2$, $b=1$) з ЛПШ ($h=0.3$) порівняно з випадком відсутності ЛПШ ($A=0$). Зокрема, розподіли швидкості, побудовані для осьових перетинів потоку площинами $z=0$ (а) та $y=0$ (б) значно деформуються під дією елементів легкопроникної шорсткості. Спостерігається суттєве гальмування потоку елементами ЛПШ (біля стінок), а при зростанні щільності A його швидкість прямує до нуля.

Перевірку результатів здійснено шляхом тестових розрахунків.

Відношення безрозмірних значень максимальної швидкості на осі еліптичного каналу до середньої (при тих же вихідних даних та $A=0$) становило $\bar{U}_{\max} / \bar{U}_{\text{ср}} = 2,1791$, що дуже добре узгоджується з даними [10].

Для розрахунку падіння тиску в каналі було використано загальновідому в гідравліці формулу Дарсі-Вейсбаха:

$$p' = \frac{\lambda}{D} \frac{\rho U_{\text{ср}}^2}{2} \quad (7.1)$$

Відокремлено в (7.1) число Рейнольдса за осередненою (розмірною) швидкістю:

$$p' = \lambda \frac{DU_{\text{ср}}}{\nu} \frac{U_{\text{ср}} \rho \nu}{2D^2} = \lambda \text{Re} \frac{U_{\text{ср}} \mu}{2D^2}. \quad (7.2)$$

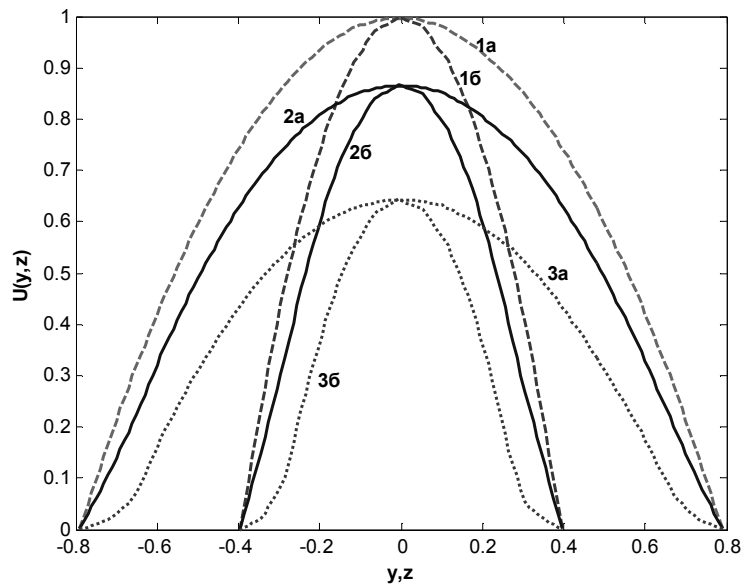


Рис.3. Залежність профілю безрозмірної швидкості в перетині площинами $z=0$ (а) та $y=0$ (б) від щільності ЛПШ ($h=0.3$): 1 – $A=0$; 2 – $A=100$; 3 – $A=1000$

А потім, враховуючи прийнятий масштаб швидкості (5.4), отримано формулу для теоретичного обчислення коефіцієнту гідравлічного опору:

$$\lambda Re = \frac{32}{\bar{U}_{cp}}. \quad (7.3)$$

Виходячи з постановки задачі, середня (безрозмірна) швидкість \bar{U}_{cp} в (7.3) залежить від відповідних розмірів еліпса, висоти та щільності ЛПШ. На практиці ж вона знайдена із співвідношення:

$$\bar{U}_{cp} = \frac{\sum_i U_i F_i}{\sum_i F_i}. \quad (7.4)$$

Для реалізації (7.4) в робочий простір MATLAB експортується з PDE Toolbox масив U_i та всі вихідні дані триангуляції. Потім в командному вікні введено команди:

```
>> [K,F]=asmpde(b,p,e,t,c,a,f); Area=sum(F); Q=sum(u.*F); Us=Q/Area, LambdaRe=32/Us
```

Варто зауважити, що точність регулюється розмірами триангуляційної сітки (команда Refine Mesh).

Графік залежності $\lambda Re = \varphi(a, b, h, A)$ представлено на рис. 4. Зокрема, можна бачити, що всі криві виходять практично з однієї точки: $A=0$, $\lambda Re=64.4201$. Тобто для будь-якого h гідравлічний опір λRe прагне до значення 64, якщо $A \rightarrow 0$. Таке узгодження із граничним випадком відсутності ЛПШ [10] є

підтвердженням коректності запропонованої математичної моделі потоку в еліптичному каналі з ЛПШ.

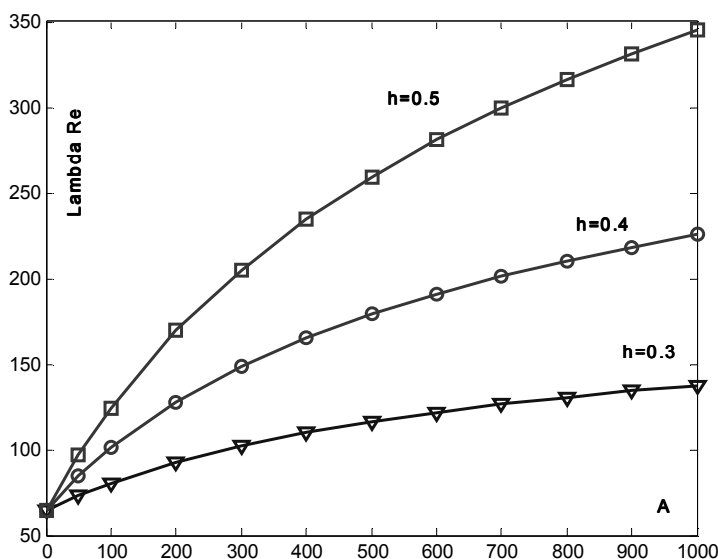


Рис.4. Залежність гідравлічного опору від параметрів ЛПШ ($a=2$, $b=1$)

8. Висновки

Таким чином, побудовано математичну модель (5.1) – (5.3), що була покладена в основу комп'ютерного моделювання ламінарного потоку в'язкої нестисливої рідини в еліптичному каналі з ЛПШ на стінках. Запропоновано чисельний алгоритм розв'язку поставленої задачі, який дав можливість візуалізувати результат (рис.2). Перевірено (рис.3,4), що у граничному випадку відсутності ЛПШ розв'язок зводиться до відомої задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lee D. K. Image singularity system to represent two circular cylinders of different diameter. ASME J. of Fluids Engineering, 2000, Vol.122, No. 12, P.715-719.
2. Гаєв Є.О. Моделі легкопроникної шорсткості для задач гідромеханіки і теплофізики: дис. д-ра техн. наук: 01.02.05 – К.: ІГМ НАН України, 2000. – 345 с.
3. Чурбанов А.Г., Горбачевский А.Я. Численное исследование конвективного течения вязкой жидкости с препятствием квадратного сечения на стенке канала // Математическое моделирование. – 2002. – т.14, № 8. – С. 84-90.
4. Федоровська М.В. Чисельний аналіз розвитку течії рідини у каналі з оберненою сходинкою, що заповнена пористим середовищем. // Вісник донецького ун-ту, Сер. А: Природничі науки. – 2002. – вип. 1. – С. 190–194.

5. Flow and Transport Processes with Complex Obstructions: Applications to Cities, Vegetative Canopies, and Industry / Ye.A. Gayev and J.C.R. Hunt editors: NATO Science Series, Springer Publ. – 2006. – V. 236. – 350 p.
6. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах: Пер. с англ. Е. В Калабина; под ред. Г. Г. Янькова. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 312 с.
7. Павловський В.Г. Особливості гідродинаміки і теплообміну в не круглих каналах. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2006. – 104 с.
8. Nooman K. Heat and fluid flow in a rectangular microchannel filled with a porous medium. // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2008. – 51, № 25 – 26. – P. 5804-5810.
9. Є.О.Гаєв, О.М.Бердник Одновимірна ламінарна течія через круглу трубу з легкопроникною шорсткістю // Промислова гідравліка і пневматика – 2008. – №4(22) – С.34-38.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987.– 840 с
11. Гаєв Е.А., Никитин И.К. Гидродинамика потока при наличии легкопроницаемой шероховатости. Ламінарній режим. // Гидромеханика – 1982. Вып.45. – С.65-73.
12. Partial differential equations (Рівняння в частинних похідних). – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.mathworks.com/products/pde/>
13. Гаєв Є.О. Нестеренко Б.М. Універсальний математичний пакет MatLab і типові задачі обчислювальної математики: Навч.посібник. – К.: НАУ, 2004. – 176 с.