

УДК 539.3

Распределение напряжений по пластине при нелинейных колебаниях

И. Д. Бреславский

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Украина

В статье исследовано распределение напряжений в тонкой пластинке при ее нелинейных колебаниях. Учитывались два типа нелинейности – геометрическая и физическая. Физическая нелинейность предполагалась малой, соответствующее уравнение для деформаций решалось методом малого параметра. Перемещения при нелинейных колебаниях раскладывались по собственным формам линейных колебаний. Построены скелетные кривые и исследована устойчивость найденных режимов движений. Приведены картины распределения интенсивности напряжений в пластинке при колебаниях.

Ключевые слова: *пластины, нелинейные колебания, распределение напряжений.*

В статті досліджено розподіл напружень в тонкій пластині під час нелінійних коливань. Було враховано два типи нелінійності – геометрична та фізична. Фізична нелінійність вважалася малою, відповідне рівняння для деформацій розв'язувалося методом малого параметра. Переміщення при нелінійних коливаннях розкладалися по власних формах лінійних коливань. Побудовано скелетні криві і досліджено стійкість знайдених режимів руху. Наведено картини розподілу інтенсивності напружень в пластинці під час її коливань.

Ключові слова: *пластины, нелінійні коливання, розподіл напружень.*

In the paper stress distribution in a thin plate is considered. Two types of nonlinearity – geometrical and physical – are taken into account. Physical nonlinearity are assumed to be small and corresponding equation for strain is solved with the small parameter method. Deflections under nonlinear oscillations are represented in the form of linear combination of the eigenforms. The backbone curves are built of free nonlinear vibrations are built. The stability of these vibrations is studied. The patterns of the stress intensity distribution are presented.

Key words: *plates, nonlinear oscillations, stress intensity distribution.*

1. Состояние проблемы и цели работы

Пластины являются один из важнейших типов конструкционных элементов. Часто в процессе эксплуатации они находятся под действием периодических нагрузок, что приводит к их колебаниям. Линейной теории не всегда достаточно точно описывает эти процессы, в связи с этим для описания таких колебаний привлекаются различные нелинейные теории. Наиболее часто в таких задачах используются теории, учитывающие геометрическую нелинейность (нелинейность связи между перемещениями и деформациями) [1]. Физическая нелинейность, т.е. нелинейность связи между деформациями и напряжениями, в задачах колебаний пластин и пологих оболочек встречается гораздо реже.

Среди работ, учитывающих как геометрическую, так и физическую нелинейность следует назвать такие. В. Н. Пастушихиным [2] выведены уравнения колебаний для очень тонких пологих оболочек и исследованы их положения равновесия. В работе [3] предложен метод исследования нелинейной динамики пластин и пологих оболочек, в том числе и с учетом изменения их

температуры. Приведено сравнение данных, полученных с учетом нелинейностей различных типов.

Большая часть работ, в которых анализируется распределение напряжений при колебаниях, посвящены исследованию композитных или толстых пластинок, поэтому в них большее внимание уделяется исследованию распределения напряжений по толщине. Вопросу динамического распределения напряжений по поверхности пластин посвящено немного работ. Так, в [4] посчитано распределение изгибающего и крутящих моментов и сдвигающей силы по пластине при линейных колебаниях. Использовался метод Релея-Ритца с четырьмя различными вариантами базисных функций. В статье [5] исследованы физически нелинейные колебания пластины. Сравнивались результаты, полученные с помощью одномодового и четырехмодового приближений. Отмечено, что амплитудно-частотные характеристики и максимум динамических напряжений для обеих аппроксимаций оказались близки. Ряд работ посвящен распределению напряжений при геометрически нелинейных колебаниях. В работе [6] приведены распределения изгибного напряжения для прямоугольных пластин с двумя опертыми и двумя заземленными краями при колебаниях с большими амплитудами. Приведены данные расчета для линейных и геометрически нелинейных колебаний пластинок с различным отношением длин сторон. Эти исследования в [7] были распространены на пластинки с другими типами краевых условий. В статьях [8-10] исследовано влияние больших амплитуд на первые две нелинейные частоты и формы колебаний заземленных и опертых круговых пластин. В [8] рассматривались чисто изгибные колебания, в [9, 10] анализ расширен на многомодовые колебания, включающие в себя также перемещения в плоскости. Сделан вывод о том, что распределение напряжений даже с учетом только геометрической нелинейности существенно отличается от предсказываемого линейной теорией. Отмечено, что нелинейные частоты, полученные с помощью одномодового приближения, достаточно близки к частотам, полученным с учетом большего количества собственных форм (разность одномодового и многомодового приближения при колебаниях с амплитудой равной трем толщинам составляло менее 2%). Также весьма точно получены мембранные напряжения. Единственным недостатком одномодового приближения указано то, что с его помощью нельзя описать некоторое изменение формы колебаний при больших амплитудах.

Таким образом, в настоящее время не существует работ, посвященных практически важной задаче исследования распределения напряжений по пластинке при ее физически и геометрически нелинейных колебаниях. Данная работа призвана частично заполнить этот пробел.

2. Математическая постановка задачи и метод решения

Рассмотрим задачу об упругих колебаниях тонкой пластинки с большими амплитудами. Будем считать, что выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява [1]. Для описания динамики пластинки воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода.

Кинетическая энергия пластинки имеет вид [1]:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_A (\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) AB d\alpha d\beta,$$

где α, β – ортогональные координаты на срединной поверхности; A, B – параметры Ляме; h – толщина пластины; ρ – плотность материала пластины.

Потенциальная энергия упругой деформации пластинки имеет вид [1]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^z + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^z + \sigma_{12} \varepsilon_{12}^z) AB d\alpha d\beta dz, \quad (1)$$

где σ_{11}, σ_{22} – нормальные напряжения; σ_{12} – касательное напряжение; $\varepsilon_{11}^z, \varepsilon_{22}^z, \varepsilon_{12}^z$ – компоненты тензора деформаций поверхности, параллельной срединной поверхности и отдаленной от нее на расстояние z ;

Воспользуемся следующими физическими соотношениями [11, 12]:

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-2\nu} K(\varepsilon_0) \varepsilon_0 + \frac{E}{1+\nu} \Gamma(\psi^2) (\varepsilon_{ii}^z - \varepsilon_0), \quad i=1,2,3 \quad (2)$$

где ε_0 – средняя деформация, ψ^2 – квадрат интенсивности деформации сдвига.

$K(\varepsilon_0)$ – функция удлинения, $\Gamma(\psi^2)$ – функция сдвига. Как известно [11, 12] для многих материалов объемная деформация следует закону Гука в широком диапазоне деформаций, поэтому в дальнейшем будем считать $K(\varepsilon_0) \equiv 1$. Функцию сдвига представим в виде $\Gamma(\psi^2) = 1 - A\psi^2$ [12], где положительная константа A определяется свойствами материала, причем слагаемое $A\psi^2$ мало по сравнению с единицей.

Полагая $\sigma_{33} = 0$, из (2) при $i=3$ получаем уравнение для нахождения ε_{33}^z :

$$\frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_0 + \frac{E}{1+\nu} (1 - A\psi^2) (\varepsilon_{33}^z - \varepsilon_0) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) является кубическим относительно ε_{33}^z , поэтому возможно получить его точные решения с помощью формул Кардано. Из трех полученных корней только один будет отвечать физическим требованиям: ε_{33}^z будет равно нулю при $\varepsilon_{11}^z = \varepsilon_{22}^z = \varepsilon_{12}^z = 0$. Однако явное выражение через радикалы для этого корня будет весьма сложным, что затруднит дальнейшие аналитические преобразования. Поэтому в данной работе уравнение (3) решалось приближенным методом, который дает решение в более удобной форме.

Поскольку рассматриваются материалы с малой физической нелинейностью, введем в рассмотрение малый параметр λ . Тогда (3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_0 + \frac{E}{1+\nu} (1 - \lambda \bar{A} \psi^2) (\varepsilon_{33}^z - \varepsilon_0) = 0, \quad (4)$$

где $\bar{A} = \frac{A}{\lambda}$.

Разложим ε_{33}^z по параметру λ : $\varepsilon_{33}^z = \varepsilon^{(0)} + \lambda \varepsilon^{(1)} + \lambda^2 \varepsilon^{(2)} + \dots$ и введем это представление в (4). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получаем последовательность линейных алгебраических уравнений относительно $\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots$. Решая эти уравнения, находим ε_{33}^z с необходимой точностью. Эти выражения являются полиномами относительно $\varepsilon_{11}^z, \varepsilon_{22}^z, \varepsilon_{12}^z$ и поэтому удобны для преобразований.

Компоненты деформации выражаются через перемещения следующим образом [1, 13]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^z &= \varepsilon_{11} - z\chi_1, \quad \varepsilon_{22}^z = \varepsilon_{22} - z\chi_2, \quad \varepsilon_{12}^z = \varepsilon_{12} - 2z\kappa, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\omega_1^2; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\omega_2^2; \quad \varepsilon_{12} = \gamma + \omega_1\omega_2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{u_\alpha}{A} + \frac{A_\beta}{AB}v; \quad \varepsilon_2 = \frac{v_\beta}{B} + \frac{B_\alpha}{AB}u; \quad \gamma = \frac{B}{A}\left(\frac{v}{B}\right)_\alpha + \frac{A}{B}\left(\frac{u}{A}\right)_\beta;$$

$$\chi_1 = -\frac{(\omega_1)_\alpha}{A} - \frac{A_\beta}{AB}\omega_2; \quad \chi_2 = -\frac{(\omega_2)_\beta}{B} - \frac{B_\alpha}{AB}\omega_1; \quad (6)$$

$$\kappa = -\frac{(\omega_1)_\beta}{B} + \frac{B_\alpha}{AB}\omega_2 = -\frac{(\omega_2)_\alpha}{A} + \frac{A_\beta}{AB}\omega_1; \quad \omega_1 = -\frac{w_\alpha}{A}; \quad \omega_2 = -\frac{w_\beta}{B};$$

где $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ – компоненты мембранной деформации срединной поверхности; χ_1, χ_2, κ – компоненты изгибных деформаций срединной поверхности; ω_1, ω_2 – углы вращения элемента вокруг векторов, касательных к линиям α и β .

Для некоторых простых типов пластин выражения для линейных собственных форм и частот известны, для более сложных они могут быть найдены, например, с помощью метода Релея-Ритца [1, 14].

Предположим, что линейные собственные формы и частоты рассматриваемой пластинки известны. Перемещения оболочки при нелинейных колебаниях разложим по собственным формам линейных колебаний:

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t) W_i(\alpha, \beta), \quad (7)$$

$$u(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_{i+N}(t) U_i(\alpha, \beta), \quad v(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_{i+2N}(t) V_i(\alpha, \beta),$$

где $W_i(\alpha, \beta), U_i(\alpha, \beta), V_i(\alpha, \beta), i=1, \dots, N$ – собственные формы колебаний w, u, v , отвечающие собственным частотам, входящим в исследуемый частотный диапазон.

Подставим (7) в функционал $L = T - \Pi$ и запишем уравнения Лагранжа второго рода. После введения безразмерных координат по формулам

$$\tau = \Omega_1 t, \quad \xi_i(\tau) = \frac{\varphi_i(t)}{h}; \quad i = 1, \dots, 3N.$$

эта система принимает вид:

$$\ddot{\xi}_k = -\bar{\Omega}_k^2 \xi_k - \sum_{i,j,g=1}^N l_{kijg} \xi_i \xi_j \xi_g - \sum_{i,j,g,l,m=1}^N l_{kijglm} \xi_i \xi_j \xi_g \xi_l \xi_m - \dots, \quad k = 1, \dots, 3N, \quad (8)$$

где $\bar{\Omega}_k = \frac{\Omega_k}{\Omega_1}$ – безразмерные собственные частоты.

Колебания, описываемые системой вида (8) могут исследоваться с помощью различных известных методов – например, методом гармонического баланса, методом многих масштабов, а также с помощью нелинейных нормальных форм [1]. Устойчивость движения исследовалась с помощью расчета мультипликаторов [15].

После того, как решения системы (8) найдены в виде $\xi_k = \xi_k(\tau)$ можно переходить к анализу распределения напряжений при колебаниях. В данной работе анализировалось распределение интенсивности напряжений в пластине при ее нелинейных колебаниях. Для тонких пластин интенсивность напряжений может быть вычислена по следующей формуле [11]:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 6\sigma_{12}^2} \quad (9)$$

3. Пример расчета

Исследуем распределения напряжений при нелинейных колебаниях в тонкой прямоугольной пластинке. Воспользуемся прямоугольной системой координат. Пластинка занимает область $\{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$. Предполагается, что пластинка неподвижно оперта по всему контуру:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{n}^2} = u = v = 0, \quad (x, y) \in \partial A, \quad (10)$$

где u, v, w – перемещения в направлениях x, y, z соответственно; ∂A – граница пластинки; \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе.

Геометрические параметры пластинки таковы: $a = 1$ м, $b = 1.2$ м, $h = 0.01$ м. Материал пластинки – среднеуглеродистая сталь с параметрами: $E = 2.17 \cdot 10^{11}$ Па, $A = 6.24 \cdot 10^5$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $\nu = 0.3$.

Как известно [14], для прямоугольной пластики выражения для собственных форм изгибных колебаний имеют вид $\sin\left(\frac{m_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi y}{b}\right)$, а собственные формы для колебаний в плоскости являются линейными комбинациями выражений такого вида.

В данной работе мы исследуем изгибные нелинейные колебания пластинки с частотами, близкими к первой собственной частоте $\Omega_{11} = 267.16$ рад/с.

3.1. Исследование геометрически нелинейных колебаний

Для начала исследовались колебания системы с учетом только геометрической нелинейности. Для этого в уравнении (3) принималось $K(\varepsilon_0) \equiv 1$, $\Gamma(\psi^2) \equiv 1$ и $\varepsilon_{33}^z = \varepsilon^{(0)}$. В разложении (7) для w учитывалась первая собственная форма. Для u , v учитывались по две первые собственные формы, т.к. соответствующие им частоты (17366.1 и 18881 рад/с) близки и в связи с этим в системе возможно появление внутреннего резонанса. Однако дальнейшие преобразования показали, что для прямоугольной неподвижно опертой пластинки существует режим чисто изгибных колебаний. С математической точки зрения это обосновано тем, что собственные формы колебаний по u , v являются линейной комбинацией синусов, поэтому после взятия интеграла (1) и дифференцирования по обобщенной координате в последних $2N$ уравнениях системы (8) обобщенные координаты ξ_i , $i=1, \dots, N$, отвечающие изгибным колебаниям присутствуют только умноженными на обобщенные координаты ξ_i , $i=N+1, \dots, 3N$, отвечающие перемещениям в плоскости. В данном частном случае для геометрически нелинейных колебаний подстановка $\xi_i = 0$, $i=N+1, \dots, 3N$ превращает последние $2N$ уравнений (8) в тождества. Именно такой режим чисто изгибных колебаний и исследовался в данной работе.

Дискретная модель системы исследовалась с помощью метода гармонического баланса [14]. В ходе расчетов было установлено, что решение уравнения с достаточной степенью точности аппроксимируется выражением

$$\xi_1(\tau) \approx C_1 \cos(\Omega\tau) + C_3 \cos(3\Omega\tau) + C_5 \cos(5\Omega\tau) + C_7 \cos(7\Omega\tau). \quad (11)$$

Скелетная кривая приведена на рис. 1. Колебания в исследуемом частотном диапазоне являются устойчивыми.

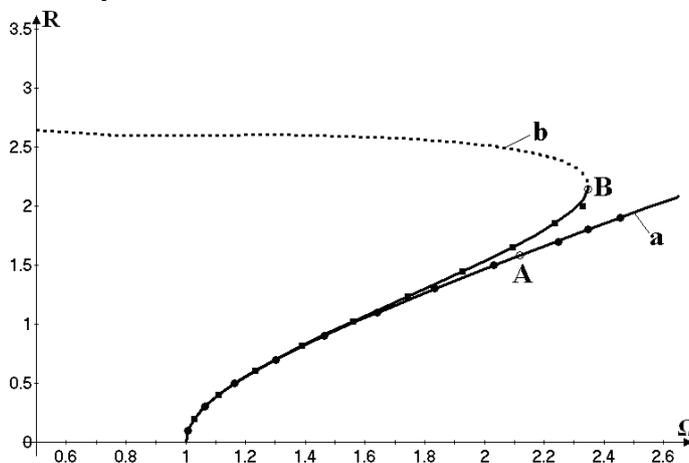


Рис. 1. Скелетные кривые, полученные с учетом: а) геометрической нелинейности; б) физической нелинейности. Точками отмечены результаты численного эксперимента.

Для системы с физической нелинейностью использовалось приближение

$$\varepsilon_{33}^z \approx \varepsilon^{(0)} + \alpha\varepsilon^{(1)}.$$

3.2. Исследование физически и геометрически нелинейных колебаний

Для физически и геометрически нелинейного случая также исследовался режим чисто изгибных колебаний. Исследование в этом случае проводилось с учетом различных приближений для ε_{33}^z . Скелетные кривые, полученные методом гармонического баланса с использованием представления решения (11), приведены на рис. 2. Неустойчивые колебания отмечены пунктирной линией. Как можно видеть, кривые, полученные с помощью первого и второго приближения для ε_{33}^z практически совпадают, в то время как кривая, полученная с помощью нулевого приближения позволяет предсказать поведение системы лишь качественно.

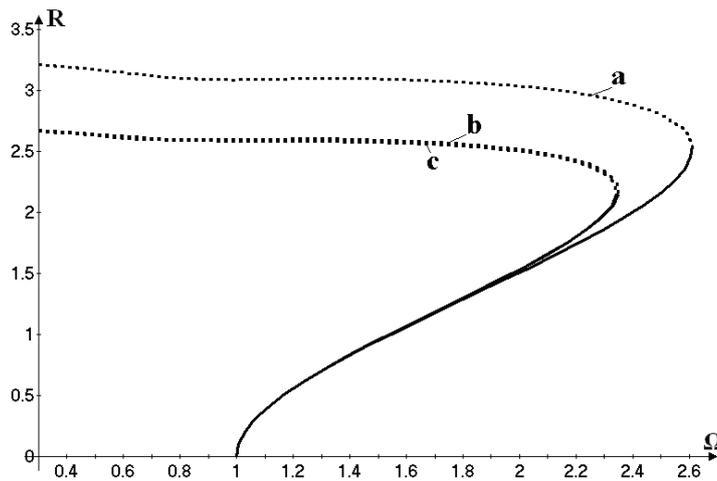


Рис. 2. Скелетные кривые физически и геометрически нелинейных колебаний пластины, полученные при различных приближениях решения уравнения (4).

$$a. - \varepsilon_{33}^z \approx \varepsilon^{(0)}; \quad b. - \varepsilon_{33}^z \approx \varepsilon^{(0)} + \alpha \varepsilon^{(1)}; \quad c. - \varepsilon_{33}^z \approx \varepsilon^{(0)} + \alpha \varepsilon^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon^{(2)}.$$

На рис. 1 приведены скелетные кривые, полученные при учете только геометрической нелинейности, а также с учетом нелинейностей обоих типов вместе. По оси ординат отложен размах колебаний $R = 0.5 (\max[\xi_1(\tau)] - \min[\xi_1(\tau)])$. Как можно видеть из этого рисунка, при малых амплитудах учет физической нелинейности не вносит заметного вклада в картину колебаний. Это ожидаемый результат, т.к. при очень малых деформациях материал следует закону Гука, т.е. является физически линейным. Однако с дальнейшим ростом амплитуд, как только деформации превышают предел пропорциональности, отклонения становятся заметными. Более того, поведение кривой изменяется качественно. Из жесткой скелетная кривая превращается в мягкую и движение теряют устойчивость. Как следует из анализа мультипликаторов, в точке В (рис. 1) происходит седло-узловая бифуркация.

3.3. Исследование распределения напряжений нелинейных колебаниях

При исследовании напряжений наибольший интерес представляют зоны, где напряжения достигают максимума. Поэтому в данной работе находился максимум функции от четырех аргументов $\sigma_i = \sigma_i(x, y, z, \tau)$, где σ_i задается формулой (9) с подставленными в нее (2, 5-7, 11). Несмотря на то, что распределение интенсивности напряжений по толщине носит нелинейный характер, максимума она достигает на поверхностях пластины. Более того, из-за симметричности исследуемого режима колебаний на поверхностях пластинки $z = \pm 0.5h$ картина распределения напряжений будет одинаковой, только со смещением по времени.

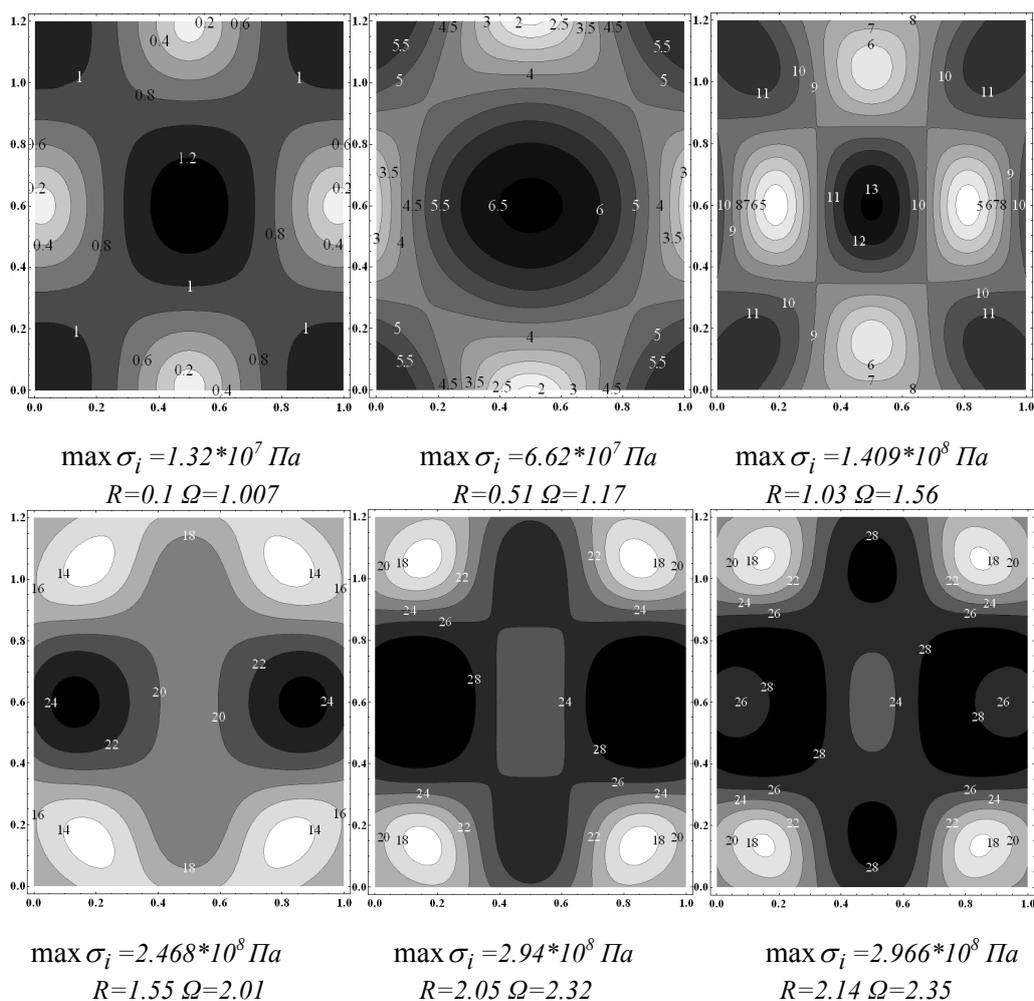


Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений по поверхности пластинки в момент, когда интенсивность напряжений достигает максимума. На линиях уровня отмечены значения $10^{-7} \sigma_i$.

На рис. 3 приводятся картины распределения σ_i по поверхности пластины в момент времени, в который σ_i достигает максимального значения, т.е. графики функции $\sigma_i = \sigma_i(x, y, 0.5h, \tau_{\max})$. Приведены распределения интенсивности напряжений для различных амплитуд колебаний с учетом обоих типов нелинейностей. Для ε_{33}^z использовалось первое приближение $\varepsilon_{33}^z \approx \varepsilon^{(0)} + \alpha\varepsilon^{(1)}$.

При малых амплитудах колебаний распределение напряжений весьма близко к линейному, однако при росте амплитуд колебаний распределение σ_i существенно меняется. Этот эффект не предсказывается линейной теорией, т.к. по ней от амплитуды колебаний зависит только абсолютное значение напряжений, распределение же не меняется.

Здесь надо отметить, что для модели с физической и геометрической нелинейностью при всех устойчивых колебаниях напряжения не достигают предела текучести, равного для данной стали 316 МПа. Однако в случае, если учтена только геометрическая нелинейность, то в точке А (рис. 1) предел текучести достигается. То есть в этом случае только геометрически нелинейная теория дает качественно неверные результаты.

4. Выводы по результатам исследования

В статье приведен метод исследования нелинейных колебаний пластин с учетом геометрической и физической нелинейностей. Проанализировано распределение интенсивности напряжений при нелинейных колебаниях. На основе изучения колебаний тонкой прямоугольной изотропной опертой пластины сделаны следующие выводы:

1. При малой физической нелинейности с помощью метода разложения по малому параметру можно получить решение уравнение для деформаций по толщине в удобном для аналитических преобразований виде.

2. Для точного учета физической нелинейности недостаточно использования выражения для деформаций по толщине, полученного с помощью линейной теории.

3. В области действия линейной упругости (закона Гука) геометрически нелинейная модель для динамического поведения и распределения интенсивности напряжений дает решения с достаточной точностью. Учет физической нелинейности необходим лишь при превышении предела пропорциональности.

4. При колебаниях, описываемых нелинейной теорией, в отличие от линейного случая, от амплитуды колебаний зависит не только величина интенсивности напряжений, но и картина их распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / M. Amabili. – New York: Cambridge University Press, 2008. – 374 p.
2. Пастушихин В.Н. Свободные колебания нелинейно упругих оболочек / В.Н. Пастушихин // Прикладная механика. –1971. – Т. 7, № 3. – С. 16-20.

3. Awrejcewicz J. Nonlinear coupled problems in dynamics of shells / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko // *International Journal of Engineering Science*. – 2003. – 41. – P. 587-607.
4. Wang C.M. Obtaining Accurate Modal Stress-Resultants in Freely Vibrating Plates that Model VLFS / C.M. Wang, Y.C. Wang, E. Watanabe, T. Utsunomiya, Y. Xiang // *Proceedings of the Eleventh (2001) International Offshore and Polar Engineering Conference*. – P. 272-278.
5. Пастушихин В.Н. Колебания пластин из нелинейного не вполне упругого материала / В.Н. Пастушихин // *Прикладная механика*. –1973. – Т. 9, № 7. – С. 128-131.
6. El Bikri K. Geometrically non-linear free vibrations of clamped simply supported rectangular plates. Part I: the effects of large vibration amplitudes on the fundamental mode shape / K. El Bikri, R. Benamar, M. Bennouna // *Computers and Structures*. – 2003. – 81. – P. 2029-2043.
7. Beidouri Z. Geometrically non-linear transverse vibrations of C-S-S-S and C-S-C-S rectangular plates / Z. Beidouri, R. Benamar, M. El Kadiri // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2006. – 41. – P. 57-77.
8. Haterbouch M. The effects of large vibration amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates. Part I: iterative and explicit analytical solution for non-linear transverse vibrations / M. Haterbouch, R. Benamar // *Journal of Sound and Vibration*. – 2003. – 265. – P. 123-154.
9. Haterbouch M. The effects of large vibration amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates. Part II: iterative and explicit analytical solution for non-linear coupled transverse and in-plane vibrations / M. Haterbouch, R. Benamar // *Journal of Sound and Vibration*. – 2004. – 277. – P. 1-30.
10. Haterbouch M. Geometrically nonlinear free vibrations of simply supported isotropic thin circular plates / M. Haterbouch, R. Benamar // *Journal of Sound and Vibration*. – 2005. – 280. – P. 903-924.
11. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 777 с.
12. Цурпал И.А. Основные уравнения теории тонких пологих оболочек с учетом физической нелинейности / И.А. Цурпал, И.А. Шульга // *Прикладная механика*. –1965. – Т. 1, № 12. – С. 15-21.
13. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 344 с.
14. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
15. Якубович В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1972. – 718 с.