

УДК 537.874.4

Метод повышения эффективности компьютерных расчетов в задачах с кусочно- координатными границами

Г. И. Загинайлов, С. С. Яременко

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Предложен улучшенный вариант одного из самых популярных методов решения многих задач радиофизики, электроники и механики в областях с кусочно-координатными границами - метода частичных областей. Показано, что он обеспечивает повышение устойчивости и точности численных расчетов при одинаковых затратах компьютерного времени.

Ключевые слова: метод частичных областей, численные расчеты, кусочно-координатные границы, гиротрон.

Запропоновано покращений варіант одного з найпопулярніших методів розв'язку завдань радіофізики, електроніки і механіки в областях складної форми – метода часткових областей. Показано що він призводить до підвищення стійкості та точності чисельних розрахунків при однакових затратах комп'ютерного часу.

Ключові слова: метод часткових областей, чисельні розрахунки, області складної форми, гіротрон.

The improved variant of one of the most popular method of solution of numerous problems of radio-physics, electronics and mechanics – the modal matching method is suggested. It is shown that it provides increasing stability and accuracy of numerical results at the same expenses of computer time.

Key words: modal matching method, numerical results, areas of the complicated form, gyrotron.

1. Введение

Многие задачи касающихся расчетов электромагнитных полей в сложных резонаторах, конечных и бесконечных периодических структурах, волноводах сложных сечений, а также касающиеся распространения звука в мембранах и акустических волноводах, сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных в областях с кусочно-координатными границами. Под областями с кусочно-координатными границами понимаются области, которые можно разбить на области с координатными границами, имеющие общие границы. В этом случае для удовлетворения граничных условий искомые функции представляются в виде рядов по собственным функциям частичных областей, однако возникает необходимость "сшивания" полей на общей границе различных областей. Во многих случаях общая граница прилегает к острым ребрам, вблизи которых, как известно, поля либо их производные имеют интегрируемые особенности, что существенно затрудняет компьютерные расчеты, приводя к медленной сходимости рядов и ряду других трудностей, т.к. собственные функции по которым раскладываются поля, как правило, не имеют особенностей на границе раздела. Некоторые методы для решения подобных задач можно найти в [1]. Наиболее простым и распространенным из них является так называемый метод сшивания [2]. В соответствии с ним коэффициенты разложения в одной из областей исключаются с помощью граничных условий, и задача сводится к бесконечной системе линейных

алгебраических уравнений (БСЛАУ) относительно коэффициентов разложения в другой области. Полученная БСЛАУ обычно решается методом редукции. Однако полученные таким образом результаты сходятся медленно и неравномерно, вследствие особенности полей на границах раздела областей и их отсутствия в функциях, по которым выполняется разложение. Кроме того коэффициенты БСЛАУ представляют собой бесконечные суммы, что существенно осложняет решение задач. Также, в каждом конкретном случае могут возникать и другие неудобства, вызванные тем, что коэффициенты БСЛАУ представлены в виде бесконечных сумм, которые необходимо вычислять. Ниже предлагается метод улучшения расчета бесконечных сумм, через которые выражаются коэффициенты БСЛАУ. Он заключается в том, что основной вклад, который дают бесконечные ряды можно найти в аналитическом виде путем точного суммирования бесконечных рядов. Затем это можно использовать для ускорения расчетов остаточных членов. В некоторых конкретных случаях бесконечные ряды можно просуммировать точно, а в некоторых остаточными членами можно пренебречь. Таким образом, можно достичь существенной экономии компьютерных расчетов и увеличения их эффективности и качества. Это оказывается особенно важным в случаях, когда расчет полей является составной частью более сложных задач, когда его необходимо выполнить с максимальной эффективностью. Один из таких конкретных примеров рассматривается ниже.

2. Конкретный численный пример

Предлагаемый метод повышения компьютерных расчетов целесообразно рассмотреть на конкретном примере, т.к. ключевые моменты этого метода остаются неизменными и во всех других конкретных случаях. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу расчета электромагнитных полей в поперечном сечении резонатора коаксиального гиротрона (см. Рис. 1). Она является составной частью задачи расчета полей во всем резонаторе коаксиального гиротрона, которая в свою очередь является составной частью задачи компьютерного моделирования работы коаксиального гиротрона. Коаксиальные гиротроны представляют собой источники мощного миллиметрового излучения и являются основными кандидатами на использование для нагрева плазмы и генерации токов увлечения в установках управляемого термоядерного синтеза с магнитным удержанием, в частности в проекте ИТЕР [3]. Резонатор коаксиального гиротрона представляет собой секцию плавно неоднородного коаксиального волновода с поперечным сечением, изображенным на Рис.1. Вследствие малой нерегулярности поперечная структура электромагнитного поля в любом поперечном сечении резонатора практически совпадает с поперечной структурой полей бесконечного волновода, который имеет то же самое поперечное сечение [4]. Для нахождения полей в коаксиальном резонаторе проводится дискретизация по продольной координате. Для каждого дискретного значения продольной координаты имеется свое поперечное сечение. Обычно необходимое количество точек дискретизации около 600-700. Для каждой из них проводится расчет поперечной структуры полей. Т.к. резонатор коаксиального гиротрона является многомодовым и необходимо учитывать конкуренцию мод. Расчеты проводятся

для каждой из конкурирующих мод, количество которых может достигать нескольких десятков [5].

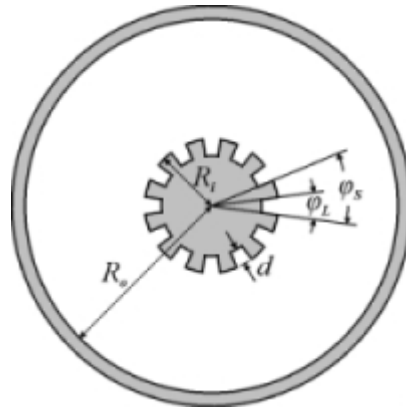


Рис.1. Геометрия поперечного сечения коаксиального гиротрона.

Полученные данные для каждой моды и каждого поперечного сечения затем используются в нелинейной системе уравнений гиротрона для моделирования сценария конкуренции мод, который определяет максимальный КПД и выходную мощность коаксиального гиротрона. Таким образом, для компьютерного моделирования одного варианта геометрии поля в поперечных сечениях необходимо рассчитывать около 600000 раз. Максимально возможная простота и эффективность расчета поперечной структуры полей являются весьма актуальными и во многом определяют эффективность, качество и универсальность компьютерного кода.

В соответствии с вышеизложенным, структура электромагнитного поля любой собственной моды ТЕ поляризации в каждом поперечном сечении коаксиального гиротрона описывается магнитной мембранной функцией бесконечного регулярного волновода с тем же сечением, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца с граничным условием Неймана на контуре, ограничивающем поперечное сечение:

$$(\Delta_{\perp} + \chi^2)\psi = 0 \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0 \quad (2)$$

где χ - нормированное поперечное волновое число, Δ_{\perp} - поперечный оператор Лапласа (обычно в цилиндрических координатах), Σ - контур поперечного сечения, $\partial/\partial n$ означает производную по нормали к контуру Σ .

Все компоненты электромагнитного поля выражаются через мембранную функцию и ее производные. К решению такого же уравнения сводятся некоторые задачи о распространении акустической волн.

К настоящему времени математические свойства задачи (1)-(2) исследованы достаточно подробно. Известно, что она имеет нетривиальные решения только при некоторых значениях параметра χ^2 , которые образуют счетную возрастающую последовательность вещественных чисел. Однако конкретные

компьютерные расчеты задачи (1)-(2) могут быть сопряжены со значительными вычислительными трудностями и трудностями программирования. Различные методы решения данной задачи для гиротрона с гофрированным внутренним проводником можно найти в [6-9]. Метод сшивания в этом случае применяется следующим образом (см. также [10]).

В области $R_i < r < R_0$ вследствие азимутальной периодичности в соответствии с теоремой Флоке мембранная функция может быть представлена в виде ряда по пространственным гармоникам:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n f_n(r) e^{ik_n \varphi} \quad (3)$$

где $k_n = m + nN$, m - азимутальный индекс моды, N - количество канавок на внутреннем проводнике, коэффициенты $f_n(r)$ можно найти в [9], r, φ - цилиндрические координаты.

В канавке $R_i - d < r < R_i$, $\varphi \in (-\varphi_L/2, \varphi_L/2)$ мембранная функция может быть представлена рядом Фурье:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n g_n(r) \cos(\xi_n(\varphi + \varphi_L/2)) \quad (4)$$

где $\xi_n = \pi n / \varphi_L$, коэффициенты $g_n(r)$ можно найти также в [9].

Требую непрерывности ψ и ее производной на раскрытые канавки и следуя методике развитой в [10] получим БСЛАУ для коэффициентов пространственных гармоник

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} (\delta_{pq} - D_{pq}) A_p = 0 \quad -\infty < p < \infty \quad (5)$$

где δ_{pq} - символ Кронекера,

$$D_{pq} = \frac{\varphi_L}{2\varphi_S} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta_{j0})} \frac{G_{\xi_j}(\chi/C', \chi/C)}{G_{k_q}(\chi, \chi/C)} \frac{a_p a_q \sin(a_p + \pi j/2) \sin(a_q + \pi j/2)}{(a_p^2 - (\pi j/2)^2)(a_q^2 - (\pi j/2)^2)}, \quad (6)$$

$$G_\nu(a, b) = \frac{J'_\nu(a)Y'_\nu(b) - Y'_\nu(a)J'_\nu(b)}{J'_\nu(a)Y_\nu(b) - Y'_\nu(a)J_\nu(b)}, \quad C = R_0 / R_i, \quad C' = R_0 / (R_i - d),$$

$a_p = k_p \varphi_L / 2$, $J_\nu(x), J'_\nu(x)$ - функция Бесселя порядка ν и ее производная, $Y'_\nu(x), Y_\nu(x)$ - функция Неймана порядка ν и ее производная.

Прямой компьютерный расчет коэффициентов и детерминанта БСЛАУ (5) сопряжен со следующими неудобствами:

1. Коэффициенты A_n спадают медленно ($\sim n^{-2/3}$) при $n \gg 1$, что обусловлено особенностью полей вблизи ребра.
2. Коэффициенты D_{pq} представляют собой бесконечные медленно сходящиеся ряды.
3. Коэффициенты D_{pq} содержат резонансные знаменатели, и если a_p равно или близко к $\pi j / 2$, возникает неопределенность типа $0/0$.

В случае гиротронов уже при $j > 4$ прямое компьютерное вычисление величин $G_{\nu}(a, b)$ не представляется возможным, так как входящие в них функции Бесселя и Неймана становятся слишком большими (более 10^{307}) или малыми (менее 10^{-307}), что находится за пределами компьютерных возможностей.

Вышеупомянутые неудобства могут быть существенно ослаблены, а во многих случаях и полностью преодолены путем аналитического суммирования главных членов ряда в выражении для D_{pq} . Для этого воспользуемся тем, что при $j \gg 1$

$$G_{\xi_j}(\chi/C', \chi/C) \cong \frac{C}{\chi} \xi_j \left(1 - \frac{1}{2} \frac{C^2}{\chi^2} \frac{1}{\xi_j^2} + O\left(\frac{1}{\xi_j^4}\right) \right) \quad (7)$$

Главная часть представления (6) с точностью до произвольного порядка по ξ_j^{-1} может быть просуммирована аналитически. В результате D_{pq} можно представить в виде главного члена представляющего собой комбинацию аналитических функций, для которых есть встроенные программы во многих пакетах плюс быстроходящийся ряд, который дает поправки малого порядка. Во многих практических случаях им можно пренебречь либо учесть в нем лишь несколько первых членов.

В частности, подставляя (7) в (6) и суммируя вклад первого члена разложения в (7) аналитически (формулы для аналитического суммирования можно найти в [11]), получаем следующее представление для D_{pq} :

$$D_{pq} = \frac{2}{\pi \varphi_S} \frac{C}{\chi} \frac{a_p a_q}{G_{k_q}(\chi, \chi/C)} (g_{pq} \cos(a_p - a_q) - h_{pq} \cos(a_p + a_q)) + D'_{pq}, \quad (8)$$

$$\text{где } g_{pq} = \frac{1}{(a_p^2 - a_q^2)} (\psi(2a_q/\pi) + \psi(-2a_q/\pi) - \psi(2a_p/\pi) - \psi(-2a_p/\pi)),$$

$$h_{pq} = \frac{1}{(a_p^2 - a_q^2)} (\beta(2a_p/\pi) + \beta(-2a_p/\pi) - \beta(2a_q/\pi) - \beta(-2a_q/\pi)),$$

$\psi(x)$ - пси-функция, $\beta(x)$ - бета-функция [11], остаточный член D'_{pq} выражается через быстроходящийся ряд:

$$D'_{pq} = \frac{\varphi_L}{2\varphi_S} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta_{j0})} \left(G_{\xi_j}(\chi/C', \chi/C) - \frac{C}{\chi} \xi_j \right) \frac{1}{G_{k_q}(\chi, \chi/C)} \times \\ \times \frac{a_p a_q \sin(a_p + \pi j/2) \sin(a_q + \pi j/2)}{(a_p^2 - (\pi j/2)^2) (a_q^2 - (\pi j/2)^2)} \quad (9)$$

Вклад второго члена разложения в (7) также может быть просуммирован аналитически, что приведет к еще большей сходимости остаточного члена.

3. Результаты численных расчетов

Для демонстрации преимуществ представления (8) сравнительно с представлением (6) введем дисперсионную функцию

$$F(\chi) = \det(\delta_{pq} - D_{pq}) \quad (10)$$

Корни этой функции являются нормированными поперечными числами собственных мод коаксиального волновода с поперечным сечением, изображенным на рис. 1. Для сравнительных расчетов целесообразно взять параметры сечения соответствующие экспериментальному гиротрону (см. например, [12]). Причем, как известно из предыдущих расчетов [8-10], значения поперечных волновых чисел наиболее чувствительны к погрешностям численных расчетов при параметрах соответствующих входному сечению резонатора гиротрона. В этом случае $R_0 = 28.38$ мм, $R_i = 8.38$ мм, $L = 0.35$ мм, $N = 75$, $\varphi_L = 0.498\varphi_S$, $\varphi_S = 2\pi R_i / N = 0.7$ мм. Обычно $F(\chi)$ вычисляется методом редукции, т.е. бесконечная матрица D_{pq} аппроксимируется конечной, когда $|p|, |q| \leq n_{\max}$, а бесконечная сумма в D_{pq} также аппроксимируется конечной, так что $j \leq m_{\max}$. При номинальном значении глубины гофрировки ($d = 0.44$ мм) для рабочей моды $TE_{34,19}$ значения χ вычисленные с использованием (6) и (8) близки, начиная с малых значений m_{\max} и n_{\max} , и преимущество изложенного метода незначительное, которое выражается лишь в равномерной и более устойчивой сходимости значения χ к определенному пределу при увеличении m_{\max} и n_{\max} . Однако, большое значение для оптимизации дизайна гиротронного резонатора имеет также зависимость χ от d в широком интервале значений d . Поэтому ниже приведем результаты для значений d как меньших, так и больших номинального. Результаты сравнительного численного анализа для $d = 0.23$ мм приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

(m_{\max}, n_{\max})	Обычный метод сшивания	Улучшенный метод сшивания	Метод сингулярного интегрального уравнения [8]
5, 5	105.2527	105.4088	105.3945
10, 5	105.2524	105.4047	
10, 10	105.2530	105.4043	
20, 10	105.2527	105.4025	

Комментируя полученные результаты, отметим, что улучшенный предложенным образом метод сшивания дает значения χ более близкие к полученному методом сингулярного интегрального уравнения, которое является очень точным ($\sim 10^{-6}$) и строго учитывает все пространственные и фурье гармоники. Кроме того значения χ равномерно сходятся с увеличением m_{\max} и

n_{\max} . В тоже время обычный метод сшивания дает менее точные результаты, причем их сходимость не является равномерной при увеличении количества учтенных пространственных и фурье гармоник (m_{\max} и n_{\max}).

Во многом аналогичные результаты можно получить и для более глубокой гофрировки. Таблица 2 иллюстрирует результаты для $d = 0.6$ мм. Результаты для таких значений d представляют повышенный интерес т.к. при этих параметрах реализуется режим аномального затухания во внутреннем проводнике (затухание на гофрированной поверхности существенно меньше затухания на гладкой поверхности). Впервые этот эффект для гиротронов был обнаружен в [12].

Таблица 2.

(m_{\max}, n_{\max})	Обычный метод сшивания	Улучшенный метод сшивания	Метод сингулярного интегрального уравнения [8]
5, 5	105.2255	105.2077	105.1987
10, 5	105.2252	105.2071	
10, 10	105.2255	105.2071	
20, 10	105.2253	105.2068	

Как и в предыдущем случае, улучшенный метод сшивания дает более точные результаты, обеспечивая равномерную сходимость, в тоже время обычный метод сшивания этого не обеспечивает. Обнаруженная погрешность в рассмотренных случаях (особенно для $d = 0.23$) является недопустимо большой и может существенно повлиять на выбор оптимальных параметров резонатора коаксиального гиротрона. Более того, для других (паразитных) мод, которые более чувствительны к геометрии внутреннего проводника и которые следует учитывать при моделировании процессов конкуренции мод, она может быть еще большей.

4. Заключение

Предложен способ повышения эффективности компьютерной реализации одного из самых простых, распространенных, однако не всегда устойчивого метода, применяемого для решения задач с кусочно-координатной границей в радиофизике, электронике, механике и т.д. - метода сшивания (или метода частичных областей). Показано, что матричные элементы БСЛАУ, получающейся в результате применения этого метода, могут быть аналитически просуммированы в старших порядках, что существенно повышает его эффективность и устойчивость. Полученные результаты могут быть использованы во многих задачах радиофизики, электроники и механики, которые требуют компьютерной реализации с максимально возможной эффективностью.

В рассмотренном частном случае показано, что при использовании метода редукции для решения БСЛАУ (5) корни дисперсионная функции (10), являющиеся нормированными поперечными волновыми числами сходятся

неравномерно. Применение усовершенствованного подхода основанного на представлении (8) для коэффициентов БСЛАУ приводит к стабилизации численных расчетов и уменьшению погрешности связанной с редуцией БСЛАУ (5). Тем не менее, следует отметить, что предложенный метод приводит к преимуществам не всегда, поэтому его использование предпочтительно в тех случаях, когда прямая редуция БСЛАУ не дает требуемой точности либо сопряжена с медленной сходимостью численных результатов.

Авторы благодарны проф. кафедры матфизики ММФ ХНУ Ганделю Ю.В. за полезные дискуссии и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов.-М.: Мир, 1974.
2. Collin R.E. Field Theory of Guided Waves. - New York: McGraw-Hill, 1960.- ch.11.
3. Hogge J.-P., Goodman T.P., Alberti S., et al. First experimental results from the European Union 2-MW coaxial cavity ITER gyrotron prototype//Fusion Science and Technology. – 2009. - v. 55, Feb. -p. 204-212.
4. Каценеленбаум Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. – М.: Изд. АН СССР, 1961.- 214 с.
5. Beringer M. H., Kern S., Liu Y., and Thumm M. Towards a 4 MW 170 GHz coaxial gyrotron resonator design // in Proc. IRMMW-TG, 2008.- p. 1-2.
6. С.Т. Iatrou, S. Kern, and A.B. Pavelyev. Coaxial cavities with corrugated inner conductor for gyrotrons // IEEE Trans.-1996. - v. MTT-44, Jan. - p. 56-64.
7. J.-Y. Raguin and K. Schuenemann. Analysis of gyrotron coaxial cavities with corrugated inner conductor based on the method of moments //in Proc. Int. Conf. Electronics and Radiophysics of Ultra-High Frequencies. -1999. - p. 403-409.
8. Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Стешенко С.А. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов // ЖТФ. – 2004. - т. 74, № 7.- с.81-89.
9. Zaginaylov G. I., and Kern S. Simplified Analytic Model for Improved Field Calculation inside the Coaxial Gyrotron Cavity//European Microwave Week. - Paris, France, 2010, accepted.
10. Ioanidis Z.C., Dumbrajs O., and Tigelis I.O. Eigenvalues and Ohmic losses in coaxial gyrotron cavity. IEEE Trans., Plasma Sci. -2006- vol. 34, # 4. - p. 1516-1522.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды, Т.1. Элементарные функции. - М.: Физматлит, 2-е изд., 2002. – 632 с.
12. В.Piosczyk, G. Dammertz, O. Dumbrajs et al., “A 2 MW, 170 GHz coaxial cavity gyrotron”, IEEE Trans., Plasma Sci., vol. 32, no. 3, pp. 413-417, Jun.,2004.
13. G. I. Zaginaylov, N. N. Tkachuk, V. I. Shcherbinin, and K. Schuenemann, “Rigorous Calculation of Energy Losses in Cavity of ITER Relevant Coaxial Gyrotron”, in Proc. of 35th EuMW. - Paris, France, 2005. - pp.1107-1110.