УДК 519.9

# Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій

О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер
*Українська інженерно-педагогічна академія, Україна*

В статье рассматривается кубатурная формула вычисления 2 D коэффициентов Фурье на классе функций с ограниченными смешанными производными первого или второго порядка с использованием интерлинации функций на системе взаимно-перпендикулярных прямых. Доказывается, что кубатурная формула является оптимальной по порядку точности.

***Ключевые слова:*** *интерлинация, сплайн-интерполяция, сплайн-интерлинация, оптимальная по порядку точности кубатурная формула, 2 D коэффициенты Фурье*

В статті розглядається кубатурна формула обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є на класі функцій з обмеженими мішаними похідними першого або другого порядку з використанням інтерлінації функцій на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Доводиться, що кубатурна формула є оптимальною за порядком точності.

***Ключові слова:*** *інтерлінація, сплайн-інтерполяція, сплайн-інтерлінація, оптимальна за порядком точності кубатура формула, 2 D коефіцієнти Фур'є.*

The paper is devoted to formula of the evaluating of two dimensions of Fourier's coefficients with using spline-interlineation on the class of function with limited derivatives on the lines. This formula is optimal by the order of exactness.

***Key words:*** *Interlineation, spline-interpolation, spline-interlineation, optimal by order of exactness cubature formula, two dimensions of Fourier's coefficients.*

## 1. Загальна постановка задачі та її актуальність

При розв'язанні задач тривимірної комп'ютерної томографії використовується метод, який узагальнює прямий метод Фур'є з двовимірного на тривимірний випадок. В цьому методі шукана функція від трьох змінних представляється у вигляді ряду Фур'є. Вибір методу при розв'язанні задачі наближеного обчислення коефіцієнтів цього ряду пояснюється видом початкових даних. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, значення функції на лініях або площинах. Задача наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно використовувати апарат інтерфлетації функцій [1] на різних класах функцій. Важливим кроком в розв'язанні даної задачі є обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли початкова інформація задається на лініях.

## 2. Дослідження авторів

В цифровій обробці сигналів все частіше розглядається новий сітковий інформаційний оператор-інтерполянт з використанням інтерлінанту [1]. На його основі будуються нові кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації на різних класах функцій [2]. Основною перевагою цих кубатурних формул є на порядок зменшене використання значень підінтегральної функцій порівняно з класичними формулами для досягнення заданої точності.

Важливими результатами авторів є побудова кубатурних формул обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про функцію задана на лініях. В роботі [3] розглядаються оптимальні за порядком точності кубатурні формули на класі функцій з обмеженими мішаними похідними на лініях ректангуляції, в [4] розглядаються кубатурні формули на класі функцій, в якому мішані похідні першого або другого порядку функції двох змінних на лініях дорівнюють одиниці. Однак не доводилась оптимальність за порядком таких кубатурних формул.

### 3. Нерозв'язані проблеми та цілі роботи

На класі дійсних функцій двох змінних, визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що $\left|f^{(p,0)}(x_k,y)\right|\le M$, $\left|f^{(0,p)}(x,y_j)\right|\le M$, $\left|f^{(p,p)}(x,y)\right|\le M$, $p=1,2,$ $x_k=k\Delta,$ $y_j=j\Delta,$ $\Delta=\frac{1}{\ell}$ побудована кубатурна формула наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій (випадок, коли інформація про функцію задана на лініях) [4]. Не було доведено, що така кубатурна формула є оптимальною за порядком точності. Для досягнення цієї мети поставлені наступні задачі. Знайти оцінку похибки наближення кубатурною формулою, а також оцінку похибки інтегрування на класі.

### 4. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій

Розглянемо допоміжні функції, які використовуються для побудови кубатурної формули наближення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних.

$$h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\le x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1\end{cases}\qquad H_{10}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_1}{-\Delta}, & y_0\le y<y_1,\\ 0, & y\ge y_1\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1}\\ \dfrac{x-x_{k-1}}{\Delta}, & x_{k-1}\le x<x_k\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1}\end{cases}\qquad k=\overline{1,\ell-1};$$

$$H_{1j}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_{j-1}\\ \dfrac{y-y_{j-1}}{\Delta}, & y_{j-1}\le y<y_j\\ \dfrac{y-y_{j+1}}{-\Delta}, & y_j\le y<y_{j+1},\\ 0, & y\ge y_{j+1}\end{cases}\qquad j=\overline{1,\ell-1},$$

$$h_{1\ell}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1}\\ \dfrac{x-x_{\ell-1}}{\Delta}, & x_{\ell-1}\le x<x_\ell,\end{cases}\qquad H_{1\ell}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_{\ell-1}\\ \dfrac{y-y_{\ell-1}}{\Delta}, & y_{\ell-1}\le y<y_\ell,\end{cases}$$

$$x_k=k\Delta,\ y_j=j\Delta,\ \Delta=\frac{1}{\ell};$$

Тоді оператор-інтерлінант

$$Of(x,y)=\sum_{k=0}^{\ell}h_{1k}(x)f(x_k,y)+\sum_{j=0}^{\ell}H_{1j}(y)f(x,y_j)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}f(x_k,y_j)h_{1j}(x)H_{1j}(y),$$

має наступні властивості

$$Of(x_k,y)=f(x_k,y),\quad k=\overline{0,\ell},\quad Of(x,y_j)=f(x,y_j),\quad j=\overline{0,\ell}.$$

Для обчислення інтегралу

$$I_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy$$

пропонується формула, побудована заміною функції $f(x,y)$ оператором інтерлінантом $Of(x,y)$:

$$\Phi_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Of(x,y)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy.$$

Підставимо вираз для оператора-інтерлінанта. Отримаємо кубатурну формулу наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про функцію задана на лініях

$$\Phi_1^2(m,n)=\sum_{k=0}^{\ell}\int_0^1 h_{1k}(x)\sin(2\pi mx)\,dx\int_0^1 f(x_k,y)\sin(2\pi ny)\,dy+$$
$$+\sum_{j=0}^{\ell}\int_0^1 H_{1j}(y)\sin(2\pi ny)\,dy\int_0^1 f(x,y_j)\sin(2\pi mx)\,dx-$$
$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}f(x_k,y_j)\int_0^1 h_{1k}(x)\sin(2\pi mx)\,dx\int_0^1 H_{1j}(y)\sin(2\pi ny)\,dy\ .$$

Покажемо, що дана кубатурна формула є оптимальною за порядком точності.

Теорема 1. Справедлива наступна оцінка похибки наближення $I_1^2(m,n)$ кубатурною формулою $\Phi_1^2(m,n)$:

$$\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right)\le$$

$$\le\frac{4}{[(p+2)!]^2}\Delta^{2p}=\frac{4}{[(p+2)!]^2}\frac{1}{\ell^{2p}}=\frac{2^{2p+2}}{[(p+2)!]^2}\frac{1}{N^{2p}},$$

де $\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(f(x,y)-Of(x,y)\right)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy$.

Доведення. Використовуємо рівності

$$\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(f(x,y)-Of(x,y)\right)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy=$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\left(f(x,y)-Of(x,y)\right)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy=$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}f^{(p,p)}(\xi,\eta)G_1(x,\xi)G_2(y,\eta)\,d\xi d\eta\times$$

$$\times\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy,$$

$$G_1(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_k-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_k<\xi<x,\\[2ex] \dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x<\xi<x_{k+1},\end{cases}$$

$$G_2(y,\eta)=\begin{cases}\dfrac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j}\dfrac{\left(y_j-\eta\right)^{p-1}}{(p-1)!}, & y_j<\eta<y,\\[2ex] \dfrac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\dfrac{\left(y_{j+1}-\eta\right)^{p-1}}{(p-1)!}, & y<\eta<y_{j+1},\end{cases}$$

$$p=1,2.$$

Зауважимо, що

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|G_1(x,\xi)\right| d\xi = \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\int_{x_k}^{x}\frac{\left|x_k-\xi\right|^{p-1}}{(p-1)!}d\xi + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\int_{x}^{x_{k+1}}\frac{\left|x_{k+1}-\xi\right|^{p-1}}{(p-1)!}d\xi =$$

$$= \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x-x_k)^p}{p!} + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x_{k+1}-x)^p}{p!},$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|G_1(x,\xi)\right| d\xi dx =$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x-x_k)^p}{p!} + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x_{k+1}-x)^p}{p!}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{p!\Delta}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{(x-x_k)^{p+1}}{p+1}dx + \frac{1}{p!\Delta}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{(x_{k+1}-x)^{p+1}}{p+1}dx =$$

$$= \frac{1}{p!\Delta}\left(\left.\frac{(x-x_k)^{p+2}}{(p+2)(p+1)}\right|_{x_k}^{x_{k+1}} - \left.\frac{(x_{k+1}-x)^{p+2}}{(p+2)(p+1)}\right|_{x_k}^{x_{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p!\Delta}\left(\frac{\Delta^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + \frac{\Delta^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right) = \frac{2\Delta^{p+1}}{(p+2)!}.$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \left|G_2(y,\eta)\right| d\eta = \frac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j}\frac{(y-y_j)^p}{p!} - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\frac{(y_{j+1}-y)^p}{p!},$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} \left|G_2(y,\eta)\right| d\eta dy = \frac{2\Delta^{p+1}}{(p+2)!}.$$

Тому, $\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right) \le M\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\frac{2\Delta^{p+1}}{(p+2)!}\frac{2\Delta^{p+1}}{(p+2)!} = M\frac{4\Delta^{2p}}{\left[(p+2)!\right]^2}$.

Теорема 2. У випадку, коли інформація про функцію задана на $N=2\ell$ лініях на класі $H_1^{2,p}(M)$ справедлива наступна оцінка для похибки обчислення інтегралів $I_1^2(m,n)$:

$$R_N\left(f^*,m,n,\ell_N\right) \ge \frac{M(p!)^2}{144\left[(2p+1)!\right]^2}\frac{1}{3^{2p}}\frac{1}{\left(N^2\right)^p}.$$

Доведення.

Хай $\psi_p(x,b-a)=(x-a)^p(b-x)^p$, тоді $\left|\psi_p(x,b-a)\right| \le C(p)(b-a)^p$,

$$\int_a^b \psi_p(x, b-a)\,dx = c_1(p)(b-a)^{2p+1} = \frac{p!\,p!}{(2p+1)!}(b-a)^{2p+1},$$

$C(p) = \sup\limits_{0\le t\le 1}\left|\Phi_p^{(p)}(t)\right| = p!$, $c_1(p) = \int_0^1 \Phi_p(t)\,dt$, $\Phi_p(t) = t^p(1-t)^p$. На кожній підобласті $G_{rq} = \Delta_r \times \bar{\Delta}_q$,

$$\Delta_r = \left\{x : x \in \left[(6r+1)/12m; (6r+5)/12m\right]\right\}, \quad r = 0,1,\dots,2m-1$$

$$\bar{\Delta}_q = \left\{y : y \in \left[(6q+1)/12n; (6q+5)/12n\right]\right\}, \; q = 0,1,\dots,2n-1,$$

площею $\frac{1}{3m}\times\frac{1}{3n}$ маємо $|\sin 2\pi mx| \ge \frac{1}{2}$, $|\sin 2\pi ny| \ge \frac{1}{2}$. Хай $\ell \ge \max(2\pi m, 2\pi n)$. Розіб'ємо кожну область $G_{rq}$ на $c = ([\ell/m]+1)([\ell/n]+1)$ підобластей $G_{rq}^{\nu\mu} = \Delta_r^{\nu} \times \bar{\Delta}_q^{\mu}$, $\nu, \mu = 0,\dots,c-1$. Повне число підобластей $G_{rq}^{\nu\mu}$ дорівнює $c\cdot 4mn \ge 4\ell^2$, отже буде не менше ніж $\ell^2$ областей $G_{rq}^{\nu\mu}$, куди не попали вузли кубатурної формули. Побудуємо 'погану' функцію на класі

$$f^*(x,y) = \frac{M}{(C(p))^2}\frac{\psi\left(x, \left|\Delta_r^{\nu}\right|\right)}{\left(\left|\Delta_r^{\nu}\right|\right)^p} sign(sin\, 2\pi mx)\frac{\psi\left(y, \left|\bar{\Delta}_q^{\mu}\right|\right)}{\left(\left|\bar{\Delta}_q^{\mu}\right|\right)^p} sign(sin\, 2\pi ny)$$

на тих $\Delta_r^{\nu} \times \Delta_q^{\mu}$, куди не попали вузли інтегрування. Коли $(x,y) \in G \setminus G_{rq}^{\nu\mu}$, то $f^*(x,y) = 0$. Ясно, що $f^*(x,y) \in H_1^{2,r}(M)$. Знайдемо оцінку знизу, тобто

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny\,dx\,dy\right| \ge \frac{M(c_1(p))^2}{4(C(p))^2}\ell^2\left|\Delta_r^{\nu}\right|^{p+1}\left|\bar{\Delta}_q^{\mu}\right|^{p+1} =$$

$$= \frac{M(p!)^2}{4\left[(2p+1)!\right]^2}\ell^2\left(\frac{1}{3m[\ell/m]}\right)^{p+1}\left(\frac{1}{3n[\ell/n]}\right)^{p+1} \ge \frac{M(p!)^2}{4\left[(2p+1)!\right]^2}\frac{1}{6^{2p+2}}\frac{1}{\ell^{2p}} =$$

$$\frac{M(p!)^2}{144\left[(2p+1)!\right]^2}\frac{1}{3^{2p}}\frac{1}{(2\ell)^{2p}} = \frac{M(p!)^2}{144\left[(2p+1)!\right]^2}\frac{1}{3^{2p}}\frac{1}{(N^2)^p}.$$

Розглянемо функцію $f_1^*(x,y) = -f^*(x,y)$. Наближені значення інтегралів від $f^*(x,y)$, $f_1^*(x,y)$, обчислені за кубатурною формулою $\ell_N$ рівні, а точні значення рівні за модулем і мають протилежний знак, то хоча б для однієї з цих функцій похибка інтегрування буде більша або рівна модулю інтеграла. Цю функцію і візьмемо в якості функції $f^*(x,y)$:

$$R_N\left(f^*,m,n,\ell_N\right) \ge \left|\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dxdy\right| \ge \frac{M\left(c_1(r)\right)^2}{144\left(C(r)\right)^2 3^{2r}}\frac{1}{\left(N^2\right)^r}.$$

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Кубатурна формула $\Phi_1^2(m,n)$ для наближеного обчислення інтегралів $I_1^2(m,n)$ є оптимальною за порядком точності на класі функцій, для яких $\left|f^{(p,0)}(x_k,y)\right| \le M$, $\left|f^{(0,p)}(x,y_j)\right| \le M$, $\left|f^{(p,p)}(x,y)\right| \le M$, $p=1,2$, $x_k = k\Delta,\ y_j = j\Delta,\ \Delta = \frac{1}{\ell}$.

Доведення здійснюється безпосереднім порівнянням оцінок, отриманих з теорем 1,2.

## 5. Обчислювальний експеримент та оцінки точності наближення

З теореми 1, 2 випливає, що при $p=1$

$$\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right) \le \frac{4}{36}M\Delta^2 = \frac{M}{9}\Delta^2 = \frac{M}{9}\frac{1}{\ell^2} = \frac{4}{9}\frac{M}{(2\ell)^2} = \frac{4}{9}\frac{M}{N^2},$$

$$R_N\left(f^*,m,n,\ell_N\right) \ge$$

$$\ge \frac{M}{144[3!]^2}\frac{1}{3^2}\frac{1}{(2\ell)^{2p}} = \frac{M}{186624}\frac{1}{\ell^2} = 5\cdot 10^{-6}\frac{M}{\ell^2} = \frac{M}{46656}\frac{1}{N^2} = 21\cdot 10^{-6}\frac{M}{N^2},$$

а при $p=2$

$$\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right) \le \frac{4M}{4!}\Delta^4 = \frac{M}{144}\Delta^4 = \frac{M}{144}\frac{1}{\ell^4} = \frac{M}{9}\frac{1}{(2\ell)^4} = \frac{1}{9}\frac{M}{N^4}.$$

$$R_N\left(f^*,m,n,\ell_N\right) \ge$$

$$\ge \frac{M[2!]^2}{144[5!]^2}\frac{1}{3^4}\frac{1}{(2\ell)^4} = \frac{1}{671846400}\frac{M}{\ell^4} = 1.5\cdot 10^{-9}\frac{M}{\ell^4} = \frac{1}{41990400}\frac{M}{N^4} = 0.2\cdot 10^{-9}\frac{M}{N^4}.$$

Для $f(x,y) = 4\sqrt{xy}$, різних $m$, $n$ та $p=1$, $M=1$ результати обчислень наводяться в Табл.1.

*Табл.1.*

| $m$ | $n$ | $\ell$ | $\varepsilon_1 = 5\cdot 10^{-6}\frac{1}{\ell^2}$ | $\rho(I_1^2,\Phi_1^2)$ | $\varepsilon_2 = \frac{1}{9\ell^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 20 | $1.2\cdot 10^{-8}$ | $2.5\cdot 10^{-6}$ | $2.7\cdot 10^{-4}$ |
| 3 | 4 | 28 | $6.3\cdot 10^{-9}$ | $4.6\cdot 10^{-6}$ | $1.4\cdot 10^{-4}$ |
| 4 | 5 | 32 | $4.8\cdot 10^{-9}$ | $5.7\cdot 10^{-5}$ | $1.0\cdot 10^{-4}$ |

Для $f(x,y)=\frac{\sin 2x \sin 3x}{36}$, різних $m$, $n$ та $p=2$, $M=1$ результати обчислень наводяться в Табл.2.

*Табл.2.*

| $m$ | $n$ | $\ell$ | $\varepsilon_1=\frac{1}{144\ell^4}$ | $\rho(I_1^2,\Phi_1^2)$ | $\varepsilon_2=1.5\cdot 10^{-9}\frac{1}{\ell^4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 20 | $9.3\cdot 10^{-15}$ | $5.7\cdot 10^{-11}$ | $4.3\cdot 10^{-8}$ |
| 3 | 4 | 25 | $3.8\cdot 10^{-15}$ | $8.1\cdot 10^{-11}$ | $1.7\cdot 10^{-8}$ |
| 4 | 4 | 31 | $3.8\cdot 10^{-15}$ | $4.7\cdot 10^{-10}$ | $1.7\cdot 10^{-8}$ |

Результати обчислень підтверджують теоретичні висновки.

**6. Висновки за результатами та подальші дослідження**

В статті розглядається кубатурна формула обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є на класі функцій з обмеженими мішаними похідними першого або другого порядку на лініях з використанням інтерлінації функцій. Доводиться, що кубатурна формула є оптимальною за порядком точності. Важливою перевагою такої кубатурної формули над класичними є висока точність обчислень. Дані результати будуть істотно використані при побудові кубатурних формул обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на відповідних класах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с.
2. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій. –Харків, 2009. -136 с.
3. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доповіді НАН України.-Київ, N 6, 2006 р.- С. 9-13.
4. Нечуйвітер О.П. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій. Праці міжнародного симпозіуму «Питання оптимізації обчислень» (ПОО -XXXV). – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2009. –Т.2., С. 145-149.

Надійшла у першій редакції 22.04.2010, в останній - 0.0.2010.