

УДК 539.3

Контактное взаимодействие берегов межслоевых трещин с начальным раскрытием при гармоническом нагружении

А. В. Меньшиков, В. А. Меньшиков, В. Микуцка

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина
Абердинский университет, Шотландия*

Работа посвящена применению метода граничных интегральных уравнений в задачах о межслоевых трещинах под воздействием гармонического нагружения. В качестве численного примера рассмотрено нормальное падение волны растяжения-сжатия на прямолинейную трещину с начальным раскрытием. Задача решена с учетом контактного взаимодействия противоположных берегов трещины. Проанализирована сходимость итерационного алгоритма, в широком диапазоне волновых чисел приведены коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига.

Ключевые слова: межслоевые трещины, контактное взаимодействие берегов трещин, граничные интегральные уравнения.

Роботу присвячено застосуванню методу граничних інтегральних рівнянь в задачах для міжшарових тріщин під впливом гармонічного навантаження. В якості чисельного прикладу розглянуто задачу про нормальне падіння хвилі розтягу-стиску на прямолінійну тріщину з початковим розкриттям. Задачу розв'язано з урахуванням контактної взаємодії берегів тріщини. Проаналізовано збіжність ітераційного алгоритму, в широкому діапазоні хвильових чисел наведено коефіцієнти інтенсивності напружень нормального відриву та поперечного зсуву.

Ключові слова: міжшарові тріщини, контактна взаємодія берегів тріщин, граничні інтегральні рівняння.

The study is devoted to application of boundary integral equations to problems for interface cracks under harmonic loading. As a numerical example the problem for an initially opened linear crack under the normally incident tension-compression wave is considered. The problem is solved taking the contact interaction of the crack's faces into account. The convergence of the iterative algorithm is analysed and the stress intensity factors (opening and transverse shear modes) are given in the wide range of the wave number.

Key words: interface cracks, cracks' faces contact interaction, boundary integral equations.

1. Актуальность задачи и истоки исследования авторов

Широкое использование композитных материалов в современной технике приводит к необходимости разработки новых и усовершенствованию существующих методов расчета напряженно-деформированного состояния и оценки трещиностойкости конструкционных материалов. С целью решения упомянутых задач в последнее время появилось значительное число публикаций, посвященных решению проблем теории упругости и механики разрушения для составных тел с трещинами и расслоениями [1–6].

В работах [7–9] авторами были получены граничные интегральные уравнения, имеющие место в случае динамического нагружения трещины, расположенной в плоскости раздела упругих полупространств. В [10, 11] было впервые получено с учетом контактного взаимодействия берегов численное решение задачи для прямолинейной межматериальной трещины, находящейся

под воздействием нормальной гармонической волны растяжения-сжатия. Исследовано распределение векторов перемещений и усилий при различных частотах нагружения, проведено сравнение с гармоническим нагружением трещины, расположенной в однородном теле.

2. Цель работы

Настоящая работа посвящена решению двумерной динамической задачи теории упругости для составного тела с межслоевой трещиной с начальным раскрытием. Задача сведена к системе граничных интегральных уравнений и решена численно прямым методом граничных элементов с учетом контактного взаимодействия противоположных берегов трещины.

3. Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим линейно-упругое двумерное тело, состоящее из двух однородных изотропных полупространств $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ с упругими характеристиками $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)}$ и с плотностями $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$. Границы тела состоят из бесконечного участка Γ^* , являющегося поверхностью сцепления, и конечных участков $\Gamma^{(1)cr}$ и $\Gamma^{(2)cr}$, образующих поверхности противоположных берегов стационарной трещины с некоторым начальным раскрытием $h_0(\mathbf{x})$. Предполагается, что тело подвержено гармоническому нагружению извне.

Напряженно-деформированное состояние каждого из полупространств в отсутствие объемных сил описывается уравнениями линейной динамической теории упругости в перемещениях

$$\begin{aligned} (\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t) + \mu^{(m)} \Delta \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \\ \rho^{(m)} \partial_t^2 \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(m)}, \quad t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ – вектор перемещений, $m = 1, 2$; Δ – оператор Лапласа.

Ввиду того, что на составное тело действует установившаяся во времени нагрузка, в начальных условиях нет необходимости. В рассматриваемом случае неограниченного тела на бесконечности выполняются условия Зоммерфельда, обеспечивающие конечность энергии упругого тела.

На границе сцепления материалов выполняются условия плотного механического контакта, заключающиеся в непрерывности перемещений и напряжений, а на поверхности трещины приложены усилия $\mathbf{g}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$, являющиеся результатом действия падающей волны.

Под действием динамического внешнего нагружения противоположные берега трещины перемещаются относительно друг друга, что приводит к их налеганию и возникновению в области контакта берегов трещины сил контактного взаимодействия [1, 10, 11]. Таким образом, вектор усилий на берегах трещины, $\tilde{\mathbf{p}}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$, представляет собой суперпозицию начальных усилий, $\mathbf{g}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$, и контактных сил, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$.

Взаимные перемещения берегов трещины характеризуются вектором разрыва перемещений $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t)$. Форма и размер области контакта

берегов в каждый момент времени неизвестны заранее и определяются непосредственно в процессе решения задачи. Положим, что контакт между берегам трещины является односторонним, а трение удовлетворяет закону трения Кулона. Тогда в рассматриваемом случае ограничения для нормальных и касательных компонент векторов контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений берегов трещины, учитывая ориентацию системы координат и направление распространения волны, имеют следующий вид [1, 10, 11]

$$[u_n(\mathbf{x}, t)] \geq -h_0(\mathbf{x}), \quad q_n(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad ([u_n(\mathbf{x}, t)] + h_0(\mathbf{x}))q_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$|\mathbf{q}_\tau(\mathbf{x}, t)| < k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial[\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t)]}{\partial t} = 0;$$

$$|\mathbf{q}_\tau(\mathbf{x}, t)| = k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial[\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t)]}{\partial t} = -\frac{\mathbf{q}_\tau(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{q}_\tau(\mathbf{x}, t)|} \left| \frac{\partial[\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, t)]}{\partial t} \right|, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in [0; T]$, а k_τ – коэффициент трения.

Следуя [10, 11], перейдем от уравнений Ламе (3.1) к граничным интегральным уравнениям динамической задачи теории упругости для трещины на поверхности раздела, используя для их построения соотношения Сомильяны и вытекающие из них граничные равенства для перемещений и усилий, в которые входят известные силы на берегах трещины, а неизвестными являются перемещения берегов трещины, силы и перемещения на поверхности сцепления.

Одной из основных сложностей, встречающихся при решении динамических задач теории упругости с учетом контактного взаимодействия, является нелинейность граничных условий задачи, имеющая место в силу зависимости от времени области контакта берегов трещины, поэтому компоненты напряженно-деформированного состояния не могут быть представлены моногармоническими функциями. Представим компоненты векторов сил контактного взаимодействия и разрыва перемещений берегов трещины рядами Фурье [1, 10, 11]

$$f(\bullet, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(\bullet) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad (3.4)$$

где $\omega_k = 2\pi k / T$, а коэффициенты Фурье $f^k(\bullet) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T f(\bullet, t) e^{-i\omega_k t} dt$.

В рассматриваемом случае гармонического нагружения граничные интегральные уравнения для коэффициентов Фурье имеют вид [10, 11]:

$$-\int_{\Gamma^{(1)\text{cr}}} \tilde{p}_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,(1)}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)\text{cr}}} u_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(1)\text{cr}}, \quad (3.5)$$

$$-\int_{\Gamma^{(2)\text{cr}}} \tilde{p}_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,(2)}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(2)\text{cr}}} u_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(2)\text{cr}}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma^{(1)cr}} \tilde{p}_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} &= -\frac{1}{2} u_i^{k,*}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \\
\int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} &- \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma^{(2)cr}} \tilde{p}_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} &= -\frac{1}{2} u_i^{k,*}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(2)cr}} u_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \\
\int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} &+ \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\tilde{p}_i^{k,(m)}(\mathbf{x})$, $p_i^{k,*}(\mathbf{x})$, $u_i^{k,*}(\mathbf{x})$ и $u_i^{k,(m)}(\mathbf{x})$ – коэффициенты Фурье усилий и перемещений на берегах трещины и поверхности сцепления. Фундаментальные решения динамической теории упругости $U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ и $W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ имеют вид [1, 3, 10, 11]:

$$U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{2\pi\mu^{(m)}} \left(\psi^{(m)} \delta_{ij} - \chi^{(m)} \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r} \right), \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= \lambda^{(m)} n_i^{(m)}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} U_{kj}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + \\
\mu^{(m)} n_k^{(m)}(\mathbf{y}) &\left[\frac{\partial}{\partial y_k} U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + \frac{\partial}{\partial y_i} U_{kj}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \right],
\end{aligned} \tag{3.10}$$

δ_{ij} – дельта-функция Кронекера, r – расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{y} .

Функции $\psi^{(m)}$ и $\chi^{(m)}$ в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned}
\psi^{(m)} &= K_0(l_2^{(m)}) + \frac{1}{l_2^{(m)}} \left[K_1(l_2^{(m)}) - \frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} K_1(l_1^{(m)}) \right], \\
\chi^{(m)} &= K_2(l_2^{(m)}) - \left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2(l_1^{(m)}),
\end{aligned}$$

где $K_n(\bullet)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка n ; $l_1^{(m)} = i\omega r/c_1^{(m)}$, $l_2^{(m)} = i\omega r/c_2^{(m)}$; $c_1^{(m)} = \sqrt{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})/\rho^{(m)}}$ и $c_2^{(m)} = \sqrt{\mu^{(m)}/\rho^{(m)}}$ – скорости распространения продольных и поперечных волн в материалах полупространств.

После преобразований, связанных с разделением комплекснозначных переменных в системе уравнений (3.5) – (3.8) на действительные и мнимые части, для численного решения задачи был применен прямой метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией параметров задачи на каждом элементе [9–11]. Для приведения компонент векторов контактных сил и перемещений берегов трещины в соответствие с контактными ограничениями использовался итерационный алгоритм динамической теории упругости [10, 11].

4. Примеры численного решения задачи

В качестве численного примера была рассмотрена задача о взаимодействии нормально падающей волны растяжения-сжатия единичной интенсивности с прямолинейной трещиной длины $2R$ при отсутствии трения.

Начальное раскрытие трещины задавалось формулой [12, 13]

$$h_0(\mathbf{x}) = b[u^{\text{stat,max}}]R(1 + \cos(\pi|x_1|/R))/2, \quad (4.1)$$

где $[u^{\text{stat,max}}] = (1 - \nu^{(1)})/\mu^{(1)} + (1 - \nu^{(2)})/\mu^{(2)}$ – максимальная амплитуда раскрытия берегов трещины при статическом нагружении [1, 3], см. рис. 1.

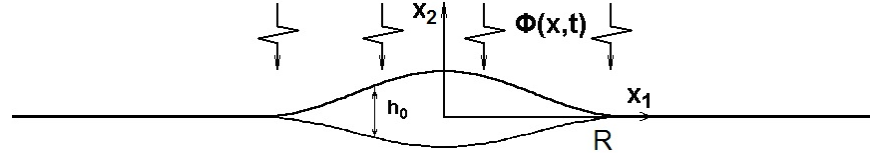


Рис. 1. Трещина с начальным раскрытием под воздействием нагружения

Материалы полупространств были следующими: сталь – модуль упругости $E^{(1)} = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu^{(1)} = 0,25$, плотность $\rho^{(1)} = 7800$ кг/м³; алюминий – модуль упругости $E^{(2)} = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu^{(2)} = 0,34$, плотность $\rho^{(2)} = 2700$ кг/м³.

На рис. 2–4 приведено распределение нормальной составляющей вектора контактных сил взаимодействия на протяжении периода колебаний при фиксированном значении приведенного волнового числа $k_2^{(1)}R$ и различных значениях коэффициента пропорциональности b . Видно, что противоположные берега трещины всегда контактируют в окрестности вершин трещины, в то время как центральная часть трещины может оставаться открытой в течении всего периода колебаний (аналогично результатам, полученным авторами для трещины в однородном теле [12, 13]). Отметим также, что увеличение начального раскрытия трещины ведет к возрастанию амплитуды контактных сил в окрестности вершин.

На рис. 5 и 6 приведены результаты исследования сходимости итерационного алгоритма для присутствующих мод коэффициента интенсивности напряжений – нормального раскрытия и поперечного сдвига. Подчеркнем, что в силу различия свойств материалов полупространств, образующих тело, в рассматриваемой задаче для межслоевой трещины, в отличие от задачи для однородного тела с трещиной под воздействием нормального нагружения, обе моды коэффициента интенсивности напряжений будут отличны от нуля вне зависимости от направления и типа динамического нагружения [9–11].

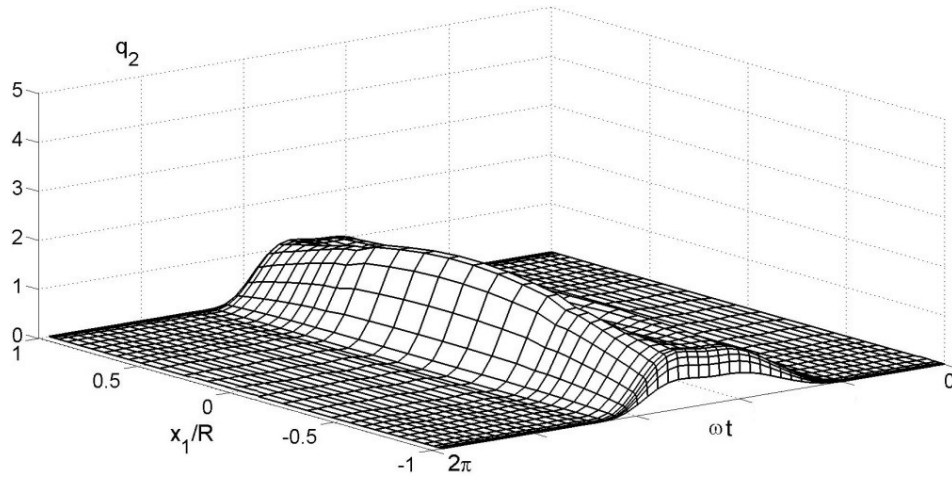


Рис. 2. Нормальная составляющая контактных сил взаимодействия, $k_2^{(1)}R = 1$, $b = 0$

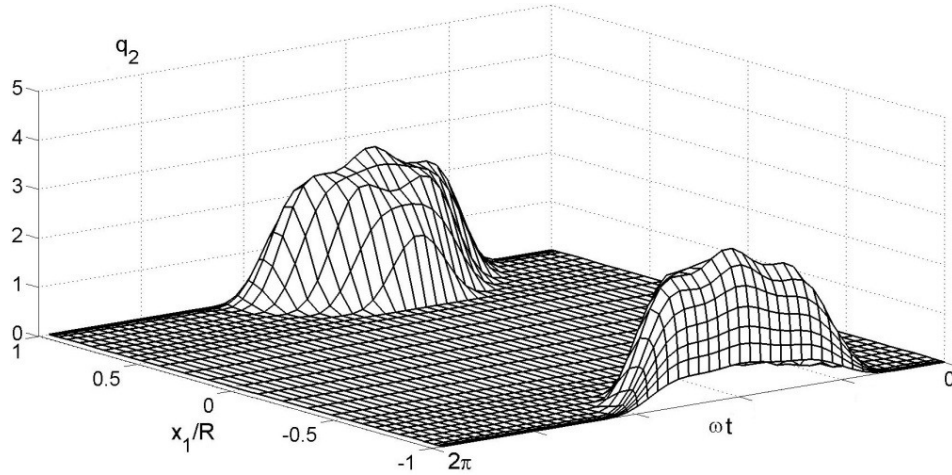


Рис. 3. Нормальная составляющая контактных сил взаимодействия, $k_2^{(1)}R = 1$, $b = 2$

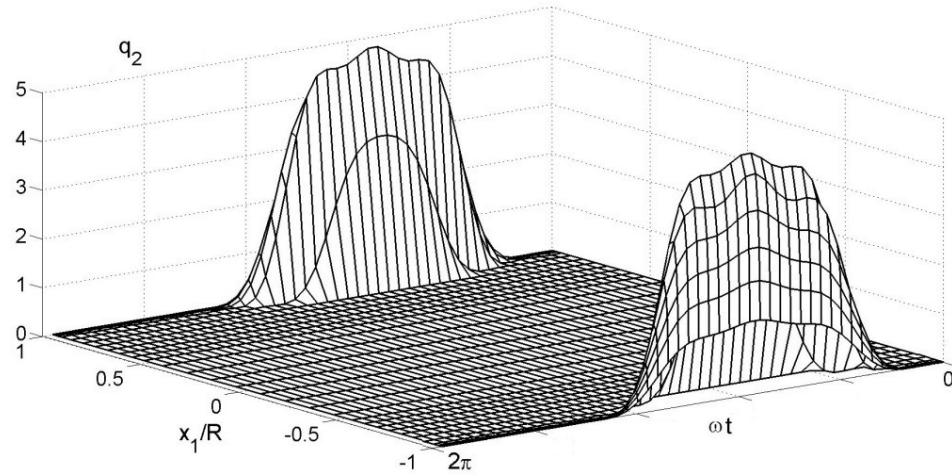


Рис. 4. Нормальная составляющая контактных сил взаимодействия, $k_2^{(1)}R = 1$, $b = 10$

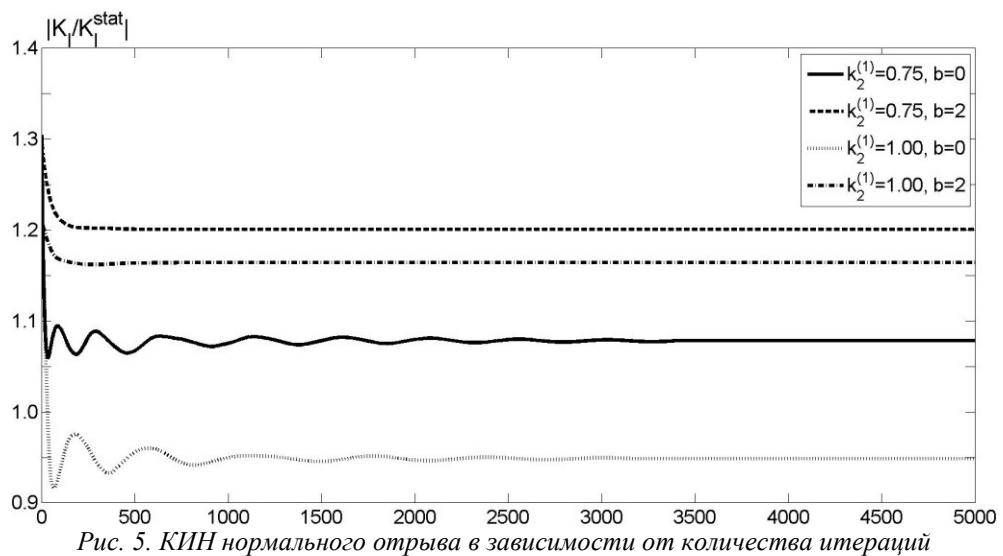


Рис. 5. КИН нормального отрыва в зависимости от количества итераций

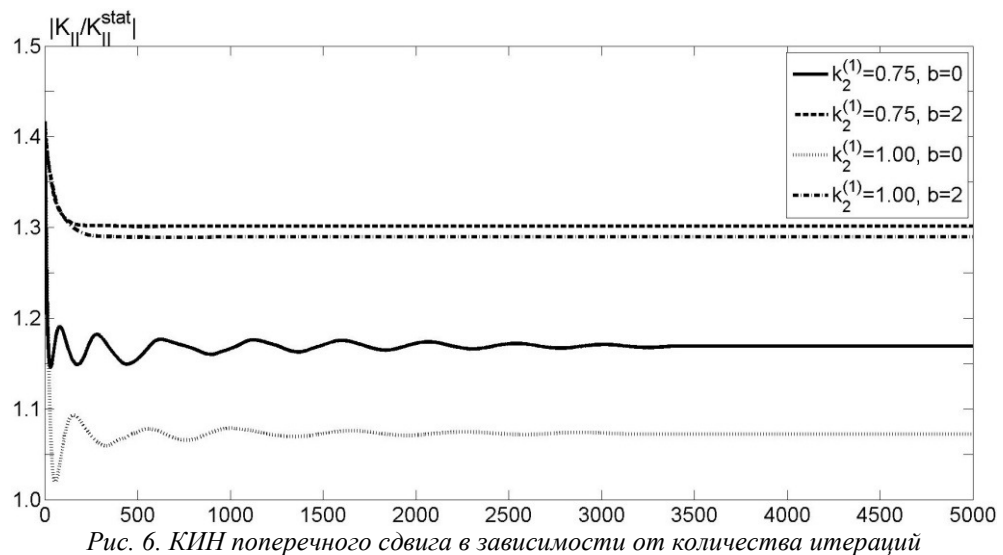


Рис. 6. КИН поперечного сдвига в зависимости от количества итераций

Результаты расчета коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига представлены на рис. 7 и 8. Полученные динамические результаты нормированы соответствующими статическими величинами.

Видно, что учет контактного взаимодействия существенно изменяет решение задачи для обеих мод коэффициента интенсивности напряжений даже при отсутствии трения и значительном начальном открытии трещины. Отметим также, что полученные результаты хорошо согласуются с ранее полученными для трещин без начального раскрытия [10, 11].

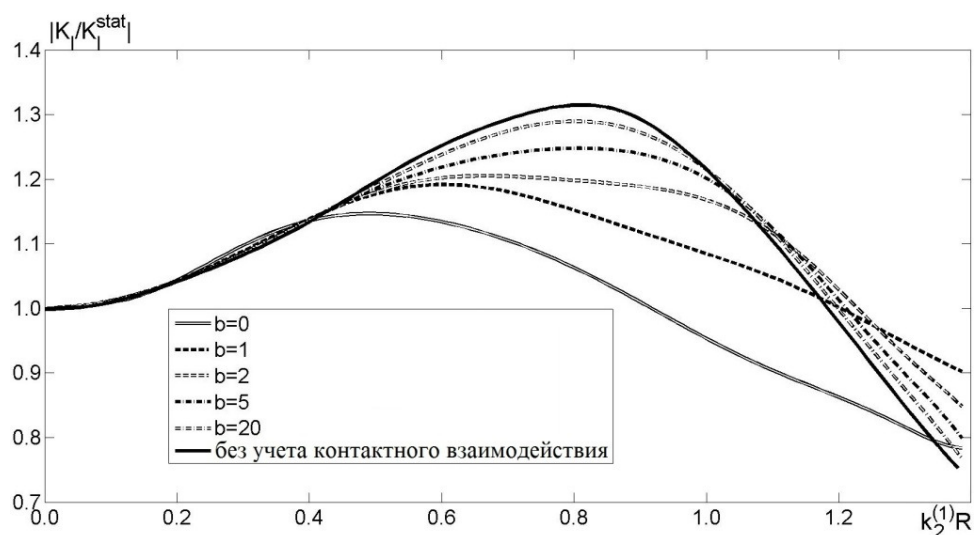


Рис. 7. КИН нормального отрыва в зависимости от волнового числа

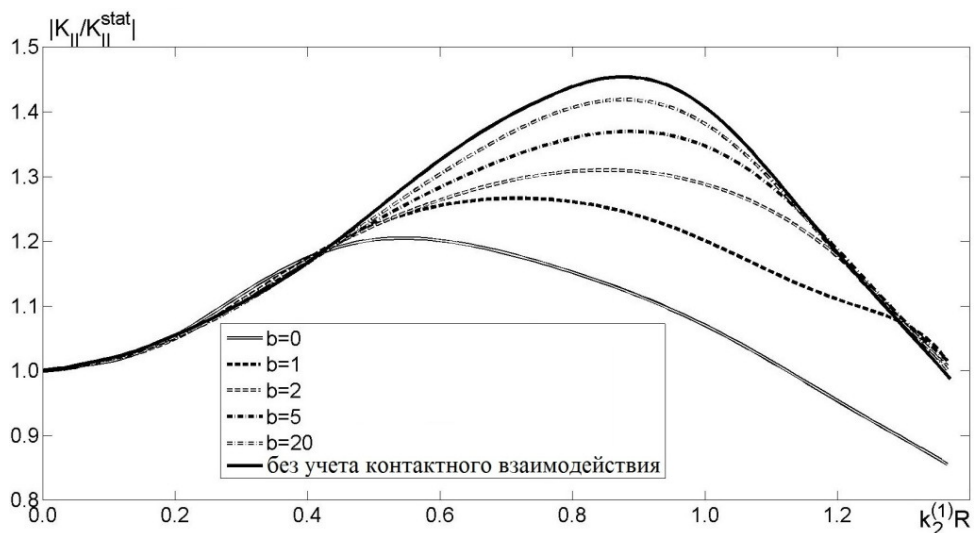


Рис. 8. КИН поперечного сдвига в зависимости от волнового числа

5. Выводы

Результаты, представленные в настоящей работе, еще раз доказывают необходимость учета контактного взаимодействия берегов трещин при решении задач теории упругости и механики разрушения. Отметим также, что настоящим направлением исследований авторов является учет трения берегов трещин, существенно влиявшего на распределение коэффициентов интенсивности напряжений в задаче для однородного тела с трещинами [14].

Авторы благодарны Гузю И.А. и Меньшиковой М.В. (Абердинский университет, Шотландия) за внимание к настоящей работе и участие в анализе полученных численных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4т./ Под ред. А.Н. Гузя – Т. 4. Кн.2. К.: Наук. думка, 1993. – 236 с.
2. Qu J. Interface crack loaded by a time-harmonic plane wave // *International Journal of Solids and Structures*. – 1994. 31(3) . – P. 329–345.
3. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998. – 248 p.
4. Острик В.І. Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. – 2003. 39(2). – С. 58–65.
5. Kilic B., Madenci E., Mahajan R. Energy release rate and contact zone in a cohesive and an interface crack by hypersingular integral equations // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. 43. – P. 1159–1188.
6. Kurylyak D.B., Nazarchyk Z.T., Voitko M.V. Stress field in a crack on the interface of materials irradiated with SH-waves // *Materials Science*. – 2007. 43(4). – P. 464–478.
7. Guz I.A., Menshykov O.V., Menshykov V.A. Application of boundary integral equations to elastodynamics of an interface crack // *International Journal of Fracture*. – 2006. 140. – P. 277–284.
8. Menshykov O.V., Guz I.A., Menshykov V.A. Boundary integral equations in elastodynamics of interface crack // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. – 2008. 366. – P. 1835–1839.
9. Menshykov O.V., Menshykov V.A., Guz I.A. Elastodynamics of a crack on the bimaterial interface // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2009. 33(3). – P. 294–301.
10. Menshykova M.V., Menshykov O.V., Guz I.A. Modelling crack closure for an interface crack under harmonic loading // *International Journal of Fracture*. – 2010. 165. – P. 127–134.
11. Menshykova M.V., Menshykov O.V., Guz I.A. An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2011. 35(5). – P. 735–749.
12. Меньшиков А.В., Меньшиков В.А. Контактное взаимодействие берегов стационарной плоской трещины с начальным раскрытием // *Доклады НАН Украины*. – 2006. 4. – С. 44–49.
13. Menshykov O.V., Menshykov V.A., Guz I.A. The contact problem for an open penny-shaped crack under normally incident tension-compression wave // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2008. 75. – P. 1114–1126.
14. Menshykov O.V., Menshykova M.V., Guz I.A. Effect of friction of the crack faces for a linear crack under an oblique harmonic loading // *International Journal of Engineering Sciences*. – 2008. 46. – P. 438–458.