УДК 532.5

Определение собственной частоты колебаний жидкости с помощью метода интегральных коэффициентов

А. И. Брунеткин, М. В. Максимов
Одесский национальный политехнический университет, Украина

С помощью метода интегральных коэффициентов получено простое алгебраическое выражение для определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкости сложной формы (между коаксиальными цилиндрами). Необходимый эмпирический коэффициент определен экспериментально. Отклонение вычисляемых по полученной формуле значений собственной частоты колебаний от экспериментальных величин составляет менее 4% во всем рассматриваемом диапазоне соотношений диаметров, образующих рассматриваемую емкость цилиндров. Такая погрешность приемлема не только для оценочных, но и для инженерных расчетов.

Ключевые слова: частота колебаний жидкости, метод интегральных коэффициентов, безразмерный вид.

За допомогою методу інтегральних коефіцієнтів отримано просте алгебраїчне вираз для визначення власної частоти коливань рідини з вільною поверхнею в ємності складної форми (між коаксіальними циліндрами). Необхідний емпіричний коефіцієнт визначений експериментально. Відхилення обчислюваних за отриманою формулою значень власної частоти коливань від експериментальних величин становить менше 4% у всьому розглянутому діапазоні співвідношень діаметрів, що утворюють розглянуту ємність циліндрів. Така похибка прийнятна не тільки для оціночних, але і для інженерних розрахунків.

Ключові слова: частота коливань рідини, меод інтегральних коефіцієнтів, безрозмірний вигляд.

Using the method of integral coefficients obtained by a simple algebraic expression to determine the natural frequency of fluid with free surface in the capacity of complex shape (between coaxial cylinders). Necessary empirical coefficient determined experimentally. Deviation calculated by the formula obtained values of the natural frequency of the experimental values is less than 4% over this range diameter ratio, due consideration to the capacity of the cylinders. This error is acceptable, not only for assessment but also for engineering calculations.

Key words: oscillation frequency of fluid, the method of integral coefficients, the dimensionless form.

При проектировании технических систем в ряде случаев достаточно выполнить лишь оценочные расчеты, не прибегая к точному дорогостоящему решению. В первую очередь это относится к начальным стадиям проектирования. На этой стадии для описания учитываемых при проектировании процессов используются математические модели (ММ), относящиеся к верхним уровням иерархической структуры ММ [1]. На этих уровнях законы сохранения, переноса и состояния, а также замыкающие соотношения и краевые условия входят в интегральной форме. Для решения записанных в интегральной форме уравнений может быть использован метод интегральных коэффициентов

Интегральный коэффициент $¸_{P_i,Q}$ некоторой искомой переменной P_i в пространстве Q (геометрические размеры – время) определяется соотношением:

$$¸_{P_i,Q} = \frac{¢\tilde{P}_i}{P_i^{\Delta}} \in [0,1], \qquad (1)$$

где $¢\tilde{P}_i = \frac{1}{V_{эф}} \cdot \int_{Q_{эф}} ¢P_i(q) \cdot dq$,

при $¢P_i = P_i - P_{i\,\min}$,

$P_i^{\Delta} = P_{i\,\max} - P_{i\,\min}$;

$Q_{эф} \in Q$

где $\tilde{P}_i$ – среднеинтегральная величина в пространстве Q;

$V_{эф}$ – объем подпространства $Q_{эф}$, в котором δP_i имеет существенное значение;

$P_{i\,\min}, P_{i\,\max}$ – минимальное и максимальное значения величины P_i соответственно.

Интегральный коэффициент пространства или отдельных его подпространств определяется следующим образом:

$$¶_{Q_{эф}} = \frac{V_{эф}}{\prod_j q_{j_{эф}}^{\Delta}} \in [0,1]; \quad q_j^{\Delta} = q_{j\,эф\,\max} - q_{j\,эф\,\min}, \qquad (2)$$

где $V_{эф}$ – объем эффективного пространства;

$\prod q_{j\,эф}^{\Delta}$ – объем куба, охватывающего эффективное пространство.

Из вышеизложенного следует, что интегральные коэффициенты $¸$ и $¶$ есть нормированные величины, характеризующие полноту переменной P_i в пространстве $V_{эф}$ и полноту эффективного пространства в пространстве куба с гранями $q_{j\,эф}^{\Delta}$.

Используя интегральные коэффициенты, уравнения сохранения для любой области пространства Q можно записать в форме алгебраических уравнений относительно масштабов переменных P_i^{Δ} и координат q_j^{Δ}, с помощью которых можно выразить любой интеграл, входящий в рассматриваемую ММ:

$$\sum_i P_i^{\Delta} \cdot ¸_{P_i\,Q} \cdot ¶_Q \cdot \prod_j q_j^{\Delta} = 0 \qquad (3)$$

Для предварительных результатов интегральные коэффициенты могут быть оценены на интуитивном уровне или методом экспертных оценок. Для более точных результатов интегральные коэффициенты (а точнее их комплексы) могут быть определены из немногочисленных экспериментов.

В качестве примера рассмотрим задачу определения частоты собственных колебаний жидкости, частично заполняющей емкость, свободный объем которой образован двумя вертикально расположенными коаксиальными цилиндрами (цилиндрическая емкость с центральным телом). Как известно [3], задачи такого класса, даже для емкостей более простых форм, формулируются в виде уравнений в частных производных и имеют непростые решения.

На Рис.1 проиллюстрированы колебания жидкости в вертикальной цилиндрической емкости без центрального тела, а так же характерные размеры и соотношения важных для процесса параметров. Рассматриваются свободные колебания. Из экспериментальных исследований вытекает, что существует такое $h \geq h_{эф}$, при котором величина заполнения емкости (глубина) перестает оказывать влияние на характер движения свободной поверхности (частоту колебаний). Например, рассматривая колебания свободной поверхности жидкости без ее разрушения в вертикальной цилиндрической емкости, что соответствует отклонению поверхности от положения равновесия до 40^0, $h_{эф}$ приблизительно равно радиусу емкости. Тогда в обезразмеренном виде можно считать, что

$$\overline{h_{эф}} = \frac{h_{эф}}{R} = \begin{cases} \bar{h} \; при \; \bar{h} < 1 \\ 1 \; при \; \bar{h} > 1 \end{cases} \tag{4}$$

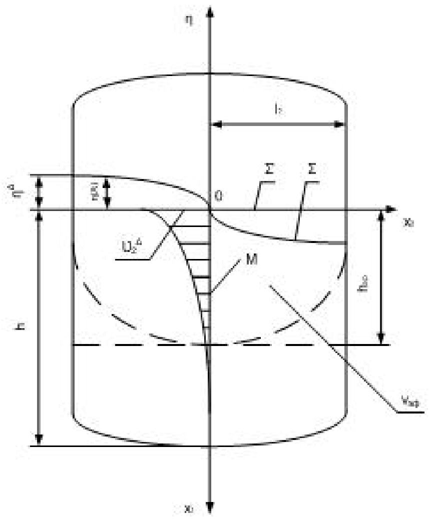

Рис. 1. Иллюстрация колебаний жидкости в емкости,

где ¦$^{\Delta}$,з$^{\Delta}$ – масштабы амплитуды и скорости колебаний жидкости;

$V_{эф}, h_{эф}$ $V_{эф}$, $h_{эф}$ – эффективные объем и глубина колебаний жидкости;

l_2 — характерный размер свободной поверхности;

Σ, Σ' – следы свободной поверхности при движении и невозмущенном положении жидкости;

М – след меридианальной плоскости.

Для емкостей других форм также существует величина подобная $\overline{h_{эф}}$.

Пренебрегая диссипацией энергии при колебании жидкости, можно получить верхнюю оценку частоты колебаний. Закон сохранения энергии для колебаний можно записать в виде

$$\Delta K = \Delta U, \tag{5}$$

где ΔK – изменение кинетической энергии;

ΔU – изменение потенциальной энергии.

Полагая, что минимум потенциальной энергии при η=0, а минимум кинетической при υ=0, получим:

$$\Delta K = \text{°}\cdot\int_V \frac{\text{³}^2}{2}dV; \tag{6}$$

$$\Delta U = \text{°}ng\iint_{S_\Sigma}\frac{\text{¦}^2}{2}dx_2dx_3$$

С учетом (1) и (2) выражения (6) принимает следующий вид:

$$\text{°}\int_V\frac{\text{³}^2}{2}\cdot dV=\frac{\text{°}}{2}\left(\text{³}_\Delta\cdot\text{¸}_{\text{³}2V_{эф}}\right)^2\cdot\text{¶}_{V_{эф}}\cdot h_{эф}\cdot(R-r)\cdot 2\text{®}\cdot\frac{(R+r)}{2} \tag{7}$$

$$\text{°}\cdot\frac{n_1g}{2}\iint_{S_\Sigma}\text{¦}^2\cdot dx_2\cdot dx_3=\frac{\text{°}n_1g}{2}\cdot\left(\text{¦}_\Delta\text{¸}_{\text{¦}S_\Sigma}\right)^2\cdot\text{¶}_{S_\Sigma}\cdot(R-r)\cdot 2\text{®}\cdot\frac{(R+r)}{2} \tag{8}$$

В уравнении (7) учтено, что интегрировать практически нужно не по всему объему жидкости, а только по его части – $V_{эф}$, где скорость жидкости имеет существенное значение.

Приравнивая уравнения (7) и (8) в соответствии с выражением (5), получим:

$$\left(\frac{\text{¦}_\Delta}{\text{³}_\Delta}\right)^2=\frac{\text{¸}^2_{\text{³}2V_{эф}}\cdot\text{¶}_{V_{эф}}\cdot h_{эф}}{n_1g\cdot\text{¸}^2_{\text{¦}S_\Sigma}\cdot\text{¶}_{S_\Sigma}}\Rightarrow\frac{\text{¦}_\Delta}{\text{³}_\Delta}=\frac{\text{¸}_{\text{³}V_{эф}}}{\text{¸}_{\text{¦}S_\Sigma}}\cdot\sqrt{\frac{\text{¶}_{Vээ}}{\text{¶}_{S_\Sigma}}\cdot\frac{h_{эф}}{n_1g}} \tag{9}$$

или

$$\frac{\text{¦}_\Delta}{\text{³}_\Delta}=\frac{\text{¸}_{\text{³}V_{эф}}}{\text{¸}_{\text{¦}S_\Sigma}}\cdot\sqrt{\frac{\text{¶}_{Vээ}}{\text{¶}_{S_\Sigma}}\cdot\frac{h_{эф}}{n_1g}}$$

Закон сохранения массы может быть записан в виде

$$\int_t^{t+T/4}\iint_{S_м}\text{³}\cdot dt\cdot dx_1\cdot dx_3=\frac{1}{2}\iint_{S_\Sigma}\left|\text{¦}\right|\cdot dx_2\cdot dx_3 \tag{10}$$

где $S_м$ – сечение массы жидкости меридианальной плоскостью

Из уравнения (10) следует, что за четверть периода колебаний через контрольную поверхность $S_м$ пройдет объем жидкости, равный половине суммы увеличения объема ее, с одной стороны, и уменьшения с другой. С использованием интегральных коэффициентов это уравнение можно записать в виде:

$$\text{³}_{\frac{\Delta}{2}}\cdot\text{¸}_{\text{³}2S_м T/4}\cdot\frac{T}{4}\cdot\text{¶}_{S_м}\cdot h_{эф}\cdot 2(R-r)=\frac{1}{2}\text{¦}_\Delta\cdot\text{¸}_{\text{¦}S_м}\cdot\text{¶}_{S_\Sigma}\cdot(R-r)\cdot 2\text{®}\cdot\frac{(R+r)}{2} \tag{11}$$

или

$$\frac{¦^{\Delta}}{³_2^{\Delta}} = \frac{¸\, ³_2 S_м\, T/4 \cdot T \cdot ¶_{S_м} \cdot h_{эф} \cdot \left(R-r\right)}{¸\, ¦\, S_м \cdot ¶_{S_\Sigma} \cdot \left(R-r\right) \cdot ® \cdot \left(R+r\right)} \qquad (12)$$

Учитывая (9) из выражения (12) можно выразить:

$$\frac{®}{T} = \sqrt{\frac{n_1 g}{h_{эф}}} \cdot \frac{h_{эф}}{\left(R+r\right)} \cdot \frac{¸\, ³_\Sigma\, S_м\, T/4}{¸\, ³\, V_{эф}} \cdot \frac{¶_{S_м}}{\sqrt{¶_{V_{эф}} ¶_{S_\Sigma}}} ,$$

или

$$\mu = \sqrt{\frac{n_1 g}{R+r}} \cdot \sqrt{\frac{h_{эф}}{R+r}} \cdot k_{\mu} , \qquad (13)$$

при

$$k_{\mu} = 2 \cdot \frac{¸\, ³_\Sigma\, S_м\, T/4}{¸\, ³\, V_{эф}} \cdot \frac{¶_{S_м}}{\sqrt{¶_{V_{эф}} ¶_{S_\Sigma}}} , \qquad (14)$$

где k_ω – коэффициент формы емкости.

Исходя из (4) для емкости с центральным телом так же может быть найдена такая граничная величина. Положим, что она определяется соотношением $\sqrt{h_{эф}/\left(R+r\right)}$ из (13). Тогда для «глубокой» воды должно быть

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{h_{эф}}{R+r}} = 1 \qquad (15)$$

Теперь выражение (13) в обезразмеренном виде можно записать так:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{n_1 g/\left(R+r\right)}} = \sqrt{\frac{h_{эф}}{R+r}} \cdot k_{\mu} \qquad (16)$$

Учитывая условие (15) выражение (16) примет вид:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{n_1 g/\left(R+r\right)}} = 1 \cdot k_{\mu} \qquad (17)$$

Если предположение (15) верно, можно ожидать, что коэффициент формы k_ω будет величиной постоянной. Это может быть подтверждено или опровергнуто экспериментально.

Проверка проводилась на емкости из органического стекла D = 0.195 м. (R = 0,0975 м.) с пятью сменными центральными телами d = 0.088…0.166 м. (r = 0.044…0.083 м.). Еще одно значение получено для емкости без центрального тела (цилиндрическая вертикальная емкость). Для каждого соотношения диаметра емкости и диаметра центрального тела выполнялось по десять испытаний. В каждом испытании замерялось время 8…10 полных колебаний свободной поверхности. Замер времени проводился с помощью секундомера с ценой деления 0.01 с. Засечка времени вручную. Колебания фиксировались по отраженному от свободной поверхности жидкости световому блику. На основании полученных данных определена оценка математического ожидания и среднее квадратичное отклонение собственной частоты колебаний жидкости $\left(\tilde{m}, \tilde{\sigma}\right)$ для всех соотношений размеров. Результаты эксперимента сведены в

Табл.1.

Табл. 1. Результаты натурных испытаний

№	d, м / $\bar{d}$	μ, $1/c$		$\bar{\mu}$
		$\tilde{m}$	$\tilde{\pm}$	
1	2	3	4	5
1	0/0	13,64	$0{,}1\cdot10^{-1}$	1,36
2	0,088/0,451	11,446	$1{,}104\cdot10^{-1}$	1,37
3	0,109/0,559	11,02	$1{,}855\cdot10^{-1}$	1,37
4	0,133/0,682	10,771	$1{,}754\cdot10^{-1}$	1,39
5	0,147/0,754	10,469	$3{,}203\cdot10^{-1}$	1,38
6	0,166/0,851	10,629	$3{,}008\cdot10^{-1}$	1,44

Результаты расчета (Табл.1, столбец 5) показывают, что величина $\bar{\omega}$, а, следовательно, и k_ω близки к постоянной величине. Усреднив значения $\bar{\omega}$ в результате получим k_ω = 1,386. Эта величина менее чем на 4% отличается от $\bar{\omega}$ на всем рассмотренном диапазоне соотношения диаметров емкости и центрального тела, что допустимо не только для оценочных расчетов, но и для инженерных.

На основе вышеизложенного материала можно сделать следующие выводы:

1) метод интегральных коэффициентов позволил получить простое алгебраическое выражение для определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкости сложной формы (между коаксиальными цилиндрами);

2) необходимый эмпирический коэффициент определен экспериментально;

3) отклонение вычисляемых по полученной формуле значений собственной частоты колебаний от экспериментальных величин составляет менее 4% на всем рассматриваемом диапазоне соотношений диаметров, образующих рассматриваемую емкость цилиндров. Такая погрешность приемлема не только для оценочных расчетов, но и для инженерных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Накозин В.Н. Системный подход в построении моделей процессов. - В сб.: Динамика машин и рабочих процессов. №237. Челябинск: ЧПИ, 1979.
2. Накозин В.Н. Метод интегральных коэффициентов в построении и решении математических моделей процессов. //Сб. науч. тр.: Динамика машин и рабочих процессов/ Челябинск: ЧПИ, 1983. – с. 72-78.
3. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965.

Надійшла – 27.07.2011.