УДК 519.862:866

Об одном подходе к построению модели управления активами и обязательствами (ALM)

С. В. Волкотруб

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

В статье проведен анализ подходов к решению задач управления активами и обязательствами (ALM), выделены преимущества и недостатки существующих подходов, разработана структура модели ALM и предложен новый подход к решению данной задачи для страховой компании по страхованию жизни. Выведена рекуррентная формула для расчета страховых обязательств в предложенной модели ALM.

Ключевые слова: *динамическая модель управления активами и обязательствами, оптимальное стохастическое управление, инвестирование.*

В статі проведено аналіз підходів до вирішення завдань управління активами та зобов’язаннями (ALM), виділені переваги та недоліки існуючих підходів, розроблено структуру моделі ALM та запропоновано новий підхід до вирішення даного завдання для страхової компанії зі страхування життя. Виведена рекурентна формула для розрахунку страхових зобов’язань у запропонованій моделі ALM.

Ключові слова: *динамічна модель керування активами та обов’язками, оптимальне стохастичне керування, інвестування.*

The paper analyzes the approaches to solving the problems of asset and liability management (ALM), highlighted the advantages and disadvantages of existing approaches, developed a model structure ALM and proposed a new approach to solve this problem for the life insurance company. Derive a recurrent formula for calculating insurance liabilities in the proposed model ALM

Keywords: *dynamic model of assets and liability management, optimal stochastic control, investment..*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

На сегодняшний день модели управления активами и обязательствами являются актуальными для многих инвесторов, например, для инвестиционных компаний, банков, пенсионных фондов, страховых компаний. Поскольку каждый из перечисленных инвесторов имеет свою специфику деятельности, особенности государственного регулирования и влияющие на деятельность факторы, то для каждого из них необходимо построить уникальную модель, отвечающую заданным требованиям. Настоящая работа посвящена построению модели оптимального управления инвестиционной деятельностью страховщика. Поставлены задачи: анализ известных подходов к решению динамических моделей управления активами и обязательствами (ALM); разработка структуры модели управления активами и обязательствами страховой компании по страхованию жизни.

2. Истоки исследования автора. Анализ существующих подходов к решению задач управления активами и обязательствами

Можно выделить 4 основных подхода к решению данных задач: решающие правила, наращивание капитала, стохастическое управление и стохастическое программирование.

Подход, заключающийся в выборе решающих правил, предусматривает выбор стратегий перераспределения активов в виде функции для расчета финансовых показателей (например, текущего значения активов, выплат) в каждый период времени t [2]. Преимущество подхода: решающие правила легко реализуемы и интуитивно понятны для большинства инвесторов, могут быть без труда протестированы на выбранных сценариях, обеспечивают приемлемые доверительные интервалы для рекомендаций. Недостатки подхода: поставленные оптимизационные задачи часто приводят к невыпуклым моделям и к необходимости решения глобально-оптимальных задач.

Второй подход основан на выборе локально-оптимальной стратегии наращивания капитала. Инвестор принимает некоторую функцию полезности и, стремясь максимизировать долгосрочный рост активов, оптимизирует на каждом шаге разность между активами и пассивами. Данные модели описывают набор однопериодных статических представлений о выборе из одних активов, меняющихся с течением времени.

Основная идея подхода, основанного на построении моделей стохастического управления [3, 4], состоит в использовании уравнений в непрерывном времени для описания динамики изменения финансовых переменных. В качестве критерия оптимальности рассматривается интегральный показатель математического ожидания функции полезности в полном соответствии с классическими аксиомами Неймана-Моргенштерна [2]. Недостатки подхода: сложность генерирования доверительных интервалов; могут возникать ошибки моделирования из-за аппроксимации в пространстве состояний; тяжело точно определить общие ограничения на процесс.

Основная идея задач стохастического программирования состоит в генерировании множества сценариев реализации случайных параметров в виде дерева и выборе управлений в вершинах дерева. Любой сценарий должен описывать отдельный, последовательный набор значений параметров, объективно отражающий возможности изменения влияющих факторов, которые должны быть внутренне согласованы в рамках одного сценария, на протяжении всего периода планирования и объективно отражать возможности изменения экономических факторов, учитывая все взаимосвязи, которые могут повлиять на динамику портфеля [1,2]. Преимущество подхода: построение моделей наиболее приближенных к реальности. Недостатки: от выбора множества сценариев зависит адекватность модели; вычислительные трудности, так как число переменных возрастает экспоненциально.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Однако среди существующих подходов к решению задач динамического управления активами и обязательствами (ALM) нет явного лидера, поскольку каждый из них имеет как достоинства, так и недостатки. При использовании подхода наращивания капитала и стохастического управления политика распределения капитала по активам весьма чувствительна к входным параметрам. При стохастическом управлении и при стохастическом программировании, трудно сгенерировать доверительные пределы, и возможны ошибки моделирования из-за аппроксимации в пространстве состояний. Однако метод стохастического управления имеет концептуальное превосходство над стохастическим программированием, потому что нет необходимости в выборочных сценариях. Целью данной работы является разработка структуры модели ALM, в которой заметен синтез нескольких подходов к построению рассматриваемых моделей, что позволяет гибко использовать достоинства и недостатки каждого из используемых подходов.

4. Предлагаемый подход к построению модели управления активами и обязательствами для страховой компании по страхованию жизни

Выделим основные требования, которые будем учитывать при построении модели:

1) необходимость согласования множеств активов и обязательств на каждом шаге;

2) особенности государственного регулирования размещения и управления активами, которые идут на покрытие страховых обязательств;

3) обеспечение гарантированной доходности инвестиций и влияние инфляции на изменение страховой суммы (индексация обязательств);

4) возможность увеличения страховой суммы в зависимости от полученного инвестиционного дохода;

5) влияние экономических факторов на динамику изменения активов;

6) изменение общего количества действующих договоров страховщика, а соответственно и изменение страховых обязательств.

Построение динамической модели управления активами и обязательствами предложено разделить на три этапа, как показано на рис.1.

Рис.1 Этапы построения модели ALM.

Первый этап включает моделирование влияющих стохастических параметров. Затем на втором этапе происходит моделирование изменения стоимости капитала управляемого портфеля [5] и моделирование изменения величины страховых обязательств. Третий этап заключается в построении модели управления активами и обязательствами. Оптимальное управление активами и принятие управленческого решения о перераспределении средств осуществляется на каждом шаге (в начале каждого года) на основании имеющейся на начало года информации и прогнозируемом изменении факторов неопределенности и динамики изменения активов и обязательств.

Рассмотрим параметры и переменные предлагаемой модели. Обозначим множество моментов принятия решений $t \in T = \{0,1,...\infty\}$, $(t;t+1)$- интервал управления (год). Параметры и переменные дискретной модели ALM:

¯ – константа, заданная инвестором, определяет максимальную желаемую долю средств, размещенных на банковском счете, которая не участвует в перераспределении средств между активами;

$q^{(m)}$– количество страховых случаев, предусмотренных в m-м договоре страхования. Страховые случаи – независимые случайные события, вероятность наступления каждого из них изменяется на каждом шаге в зависимости от возраста и состояния застрахованного;

R – заданная инвестором симметричная положительно определенная матрица размерности $(n+1)x(n+1)$, регулирующая затраты на операции управления вложениями;

¥$_i$, $i=\overline{1,n+2}$, $\sum_{i=1}^{n+2}$¥$_i = 1$ – доля страховых резервов, размещенная в i-ый вид активов, не может превышать установленных государством нормативных значений;

r_t– процентная ставка, учитывающая минимальный гарантированный доход и влияние инфляции;

$_t p_x$– вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще t лет;

$_tV$ – нетто-резерв по одному договору страхования жизни, равный разности актуарной стоимости потока будущих страховых выплат и актуарной стоимостью потока будущих нетто-премий;

$N^*_{\sum t}(1)$– прогнозируемое количество действующих в момент времени $t+1$ договоров с учетом заключенных $N_t^{new} \sim P($ª$_t)$ за год $(t;t+1)$и количества договоров $N_t^{closed} \sim P($¦$_t)$, по которым настали страховые случаи и осуществлена страховая выплата за год $(t;t+1)$;

N_t^* – количество фактически действующих договоров на момент времени t ;

®$_t^m$, $m=\overline{1,N_t^* + N_t^{new}}$ – величина нетто-премии по m-му договору страхования, внесенная в начале t-го года;

$b_t^{m,j}(1)$– величина страховой выплаты по m-му договору, рассчитанная на основании инвестиционного дохода за $(t-1;t)$ год с упреждением в единицу, выплачиваемая в конце $(t;t+1)$ года при наступлении страхового случая $j=\overline{1,q}$ в течение этого года;

$u_t^i \in R(-\infty;\infty),\ i=\overline{1,n+1}$ – управляющая компонента, которая определяет количество денежных средств, перераспределяемых за счет банковских средств в i-й вид активов, вычисляемая в момент времени t с упреждением в единицу. При $u_t^i > 0$ перемещаем средства за счет безрискового актива (банковский счет) в i-й вид активов, при $u_t^i < 0$ изымаем средства и перемещаем их в безрисковый вид актива, $u_t^i = 0$ изменений вложений в i-й вид активов не происходит;

$x_i(\mu,t,u),\ i=\overline{1,n},\ \mu \in \text{t},\ x_{n+1}(t,u),\ x_{n+2}(t,u)$ – вложения в выбранные виды активов: акции n эмитентов, кредитование страхователей, банковский счет (депозит) соответственно. Динамика изменения каждой категории активов приведена в [5].

$Act(\mu,t,\overline{u_t})$ – величина активов с учетом поступлений и выплат за год $(t;t+1)$ [5];

$K(\mu,t,\overline{u_t})=\sum\limits_{i=1}^{n+2} x_i(t)$ – капитал управляемого портфеля;

${}^*CP(t+1)$ – величина страховых обязательств в момент времени $t+1$ по всем действующим договорам страхования жизни.

$\underset{\mu\in \text{t}}{M}\left[Act(\mu,t+1,\overline{u_t})\,|\,F_t\right]=Act_t(1)$ - величина активов, рассчитанная с упреждением в единицу, где F_t - информация о состоянии активов на момент времени t.

Вид целевой функции обусловлен необходимостью обеспечения вышеперечисленных требований, которые учитывают особенности функционирования страховщика, ограничения на инвестиционную деятельность и затраты на управление:

$$F(\overline{u_t},t+1)=Act_t(1)-\overline{u_t}^T\cdot R\cdot\overline{u_t}-{}^*CP(t+1),\ \ t=0,1,2,\ldots,\infty;$$

$$F(\overline{u_t},t+1)\to\max_{\overline{u_t}\in G},\qquad (1)$$

$$G:\ P\{x_i(t+1)\le ¥_i K(t+1)\}\ge \sim_i,,\ \ 0\le\sim_i\le 1,,\ \ i=\overline{1,n+1},$$

$$P\left\{- \cdot x_{n+2}(t)\ge\sum_{j=1}^{n+1}u_t^j\right\}\ge\sim_i,\ x_i(t+1)\ge 0,$$

при этом $\overline{x(0)},K(0),N_0^*$ - заданные величины.

Ограничения регулируют объемы вложений согласно законодательным нормам и перераспределение средств таким образом, чтобы суммарный объем перераспределенных средств из банковского счета не превышал заданной доли ‾ средств на этом счету [5].

Построение модели формирования активов описано в работе [5], поэтому рассмотрим формирование страховых резервов и определение общего количества страховых обязательств страховщика.

Рассмотрим m-й договор переменного страхования жизни общего вида сроком на n лет для страхователя, заключившего его в возрасте x:

- страховые выплаты $b_t^{m,q}(1)$ по q-му страховому случаю (дожитие, смерть, несчастный случай и др.) осуществляются в конце года, вычисляемая по итогам года $(t-1;t)$:

$$b_t^{m,q}(1)=\begin{cases} b_{t-1}^{m,q}(1)+\ddot{}\,(t), \underset{u_{t-1}}{\underline{max}}\left[F\left(\overline{u_{t-1}},t\right)\right]>0; \\ b_{t-1}^{m,q}(1), \underset{u_{t-1}}{\underline{max}}\left[F\left(\overline{u_{t-1}},t\right)\right]\le 0; \end{cases}$$

где ¨ (t) зависит от полученного инвестиционного дохода за год и от количества застрахованных на момент распределения дохода;

- премии размером $®_j^m$ выплачиваются ежегодно в начале каждого года действия договора.

Пусть на момент времени h у страховщика $N_h^*(1)$ действующих договоров переменного страхования общего вида, заключенные на n лет, предусматривающие страховые выплаты размером $b_h^{m,q}(1)$ по $q^{(m)}$ страховым случаям.

Перспективные потери страховщика по одному договору переменного страхования общего вида за год $(j;\,j+1)$:

$$C_j = v\cdot b_{j+1}^1\cdot I_1+...+v\cdot b_{j+1}^q\cdot I_q - ®_j=\sum_{k=1}^{q} v\cdot b_{j+1}^k\cdot I_k - ®_j,$$

где I_k - индикатор наступления страхового случая k с изменяющейся на каждом шаге в зависимости от возраста застрахованного вероятностью, v - множитель дисконтирования.

Сумма настоящих стоимостей на момент времени h будущих ежегодных чистых потерь страховщика: ${}_hL=\sum_{j=h}^{n} v^{j-h}\cdot C_j$.

Обозначим $K(x)$ - пошаговая продолжительность предстоящей жизни (дискретная случайная величина), определяющая число полных будущих лет, прожитых лицом в возрасте x до смерти. При $h>K(x)$ ${}_hL=0$.

Получим рекуррентное соотношение для нетто-резервов:

$${}_hV=M\left[{}_hL\mid K(x)\ge h\right]=M\left[\sum_{k=1}^{q} v\cdot b_h^k(1)\cdot I_k - ®_j+\sum_{j=h+1}^{n} v^{j-h}\cdot C_j\mid K(x)\ge h\right]=$$

$$= \sum_{k=1}^{q} v \cdot b_h^k(1) \cdot M\left[I_k \mid K(x) \geq h\right] - ®_h + p_{x+h} \cdot M\left[v \cdot {}_{h+1}L \mid K(x) \geq h+1\right] =$$

$$= v \cdot p_{x+h} \cdot {}_{h+1}V - ®_h + \sum_{k=1}^{q} v \cdot b_h^k(1) \cdot M\left[I_k \mid K(x) \geq h\right]$$

Умножим обе части на ${}_h p_x$ и с учетом, что ${}_{h+1} p_x = {}_h p_x \cdot p_{x+h}$, получим размер нетто-резерва для одного договора:

$${}_{h+1}V^{(1)} = \frac{1}{{}_{h+1} p_x}\left({}_h p_x \left(1 + r_t\right)\left({}_h V^{(1)} + ®_h^1\right) - \sum_{k=1}^{q} b_h^{1,k}(1) \cdot {}_h p_x \cdot M\left[I_k^1 \mid K^1(x) \geq h\right]\right).$$

Верхний индекс (1) в данной формуле обозначает номер договора. Тогда расчет размера страховых обязательств страховщика по всем договорам определяется следующей рекуррентной формулой:

$${}^{*}CP(h+1) = \sum_{m=1}^{N_h^*(1)} \frac{1}{{}_{h+1} p_x^{(m)}}\left({}_h p_x \cdot \left({}_h V^{(m)} + ®_h^{(m)}\right)\left(1 + r_t\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{q} b_h^{m,k}(1) \cdot {}_h p_x \cdot M\left[I_k^{(m)} \mid K^{(m)}(x) \geq h\right]\right).$$

Данная формула определяет объем обязательств страховщика в каждый момент времени и используется в задаче максимизации (1).

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Проанализированы основные существующие подходы к решению задач управления активами и обязательствами инвесторов, в следствие чего можно сделать вывод, что актуальным для инвесторов является построение моделей, комбинирующих элементы всех четырех проанализированных в данной статье подходов.

Выделены преимущества и недостатки подходов к построению моделей ALM; автором предложен подход к построению моделей ALM для страховых компаний по страхованию жизни, который позволяет рассматривать построение модели в три этапа. Таким образом, учтены не только изменения капитала управляемого портфеля (активов) и обязательств, но и взаимодействие данных множеств с целью оптимального управлении денежными средствами путем перераспределения их между выбранными категориями активов, выведена рекуррентная формула для расчета страховых обязательств в предложенной модели.

Практическая значимость работы: анализ структуры и подходов к построению моделей ALM актуален для крупных инвесторов, заинтересованных в оптимальном управлении долгосрочными инвестициями; предложенный подход может использоваться страховщиками для построения моделей ALM.

В дальнейшем автор предложит аналог данной модели в непрерывном времени и методы решения сформулированных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carino D.R., Kent T., Myers D.H. The Russel-Yasuda Kasai model: An asset/liability model for a Japanese insurance company using multistage stochastic programming // Interface. 1994. V.24. P. 29-49.
2. Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. Cambridge: University Press, 1998.
3. Merton R.C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case // Review of economics and statistics. 1969. N3. P.373-413.
4. Samuelson P. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming // Review of economics and statistics. 1969. N8. P.239-246.
5. Волкотруб С.В., Герасин С.Н. Пошаговая дискретная модель оптимального управления динамическим балансом страховой компании // Вісник Харківського національного університету ім.. В.Н. Каразіна. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2009. №863. С.53-61.

Надійшла – 18.04.2011.