

УДК 539.3:533.6+517.968:519.6

## Численный эксперимент на базе метода граничных интегральных уравнений для внутренней задачи Неймана в четверти круга

И. Ю. Кононенко

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

В различных областях инженерной практики, таких как авиастроение, химическая промышленность, энергетическое машиностроение, возникают проблемы, которые могут быть промоделированы краевыми задачами для дифференциальных уравнений. Для численного решения этих уравнений эффективным является применение метода потенциала. Это позволяет понизить размерность рассматриваемой задачи, но приводит к необходимости решать сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения. Эти уравнения являются следствием граничных условий рассматриваемой задачи. При этом недостаточно хорошо развиты численные методы решения таких уравнений в случае сложных контуров, имеющих угловые точки. Данная работа посвящена решению внутренней задачи Неймана для четверти круга. Задача решена аналитически и с использованием метода граничных интегральных уравнений. Для численной реализации выбран метод дискретных особенностей (МДО). Проиллюстрирована сходимость численного метода. Численные и аналитические результаты хорошо согласуются.

*Ключевые слова:* гиперсингулярное интегральное уравнение, компьютерный эксперимент, МДО.

В багатьох галузях, таких як авіабудування, хімічна промисловість, енергетичне машинобудування, виникають проблеми, які можна промодельовати крайовими задачами для диференціальних рівнянь. Для чисельного розв'язку таких рівнянь є ефективним застосування методу потенціала. Це дозволяє знизити розмірність задачі, але призводить до необхідності розв'язку сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Такі рівняння є наслідком граничних умов задачі, що розглядається. При цьому недостатньо розвинуті чисельні методи розв'язку таких рівнянь у випадку складних контурів, які мають кутові точки. Дана робота присвячена розв'язку внутрішньої задачі Неймана для чверті кола. Задачу розв'язано аналітично та із застосуванням методу граничних інтегральних рівнянь. Проілюстрована збіжність чисельного методу з використанням методу дискретних особливостей (МДО). Отримані результати добре погоджуються.

*Ключові слова:* гіперсингулярне інтегральне рівняння, комп'ютерний експеримент, МДО.

The solution of internal Neumann problem for quadrant is considered. The problem is solved in two ways: analytically and numerically using method of boundary integral equations. Numerical experiment is built using the method of discrete singularities (MDS). Obtained results are compared with the analytical ones. This method of approaching is effective in different areas of engineering like aircraft building, chemical industry, power machine building, where the solution of boundary problems in mechanics can be reduced to a singular or hypersingular integral equations.

*Key words:* hypersingular integral equations, computer-based experiment, MDS.

### 1. Введение

В различных областях инженерной практики, таких как авиастроение, химическая промышленность, энергетическое машиностроение, широко

используются элементы конструкций в виде оболочек или тел вращения, которые функционируют в условиях повышенных технологических нагрузок и заполнены нефтью, легковоспламеняющимися или ядовитыми веществами. К их числу относятся топливные баки, цистерны, резервуары нефтехранилищ, топлива, сжиженного газа и др. Для анализа эксплуатационного состояния таких резервуаров строятся математические модели в виде систем дифференциальных уравнений с заданными начальными и краевыми условиями. Для их численной реализации одним из эффективных подходов методов является применение методов теории потенциала. При этом решение краевых задач механики сводится к граничным сингулярным или гиперсингулярным интегральным уравнениям [1-2]. В задачах гидроупругости искомые функции задаются как потенциалы простого или двойного слоя с неизвестными плотностями, которые определяются на границах области. При таком подходе потенциалы автоматически удовлетворяют дифференциальным уравнениям, которые описывают физическое явление. Удовлетворение граничным условиям приводит к интегральным уравнениям на границах тела. Решение этих уравнений фактически решает начальную проблему. В этой связи актуальным представляется развитие методов численного решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений для плоских областей с негладкими границами.

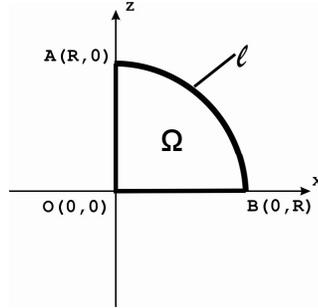
В данной работе рассматривается двумерная внутренняя задача Неймана для четверти круга, которая решена аналитически и численно методом граничных интегральных уравнений. Показано, что результаты близки. Это позволяет использовать примененный подход для других двумерных краевых задач.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в четверти круга:

$$\begin{cases} \Delta p(r, \varphi)|_{\Omega} = 0, \\ \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 < r < R, \\ \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R} = g(\varphi), 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (1)$$

где область  $\Omega$  – сектор круга радиуса  $R$ , центральный угол которого равен  $\frac{\pi}{2}$  (см. рис. 1),  $p(r, \varphi)$  – искомая функция, а заданная функция  $g(\varphi)$  удовлетворяет условиям:  $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , что обеспечивает непрерывность граничного условия.

Рис.1. Область  $\Omega$ .

Такие задачи возникают при применении метода граничных интегральных уравнений в задачах о колебаниях оболочек вращения, частично заполненных жидкостью [3].

### 3. Аналитическое решение

Задача (1) в полярных координатах имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \\ |p(r, \varphi)|_{\varphi \rightarrow +\infty} < \infty, 0 < r \leq R, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ \left. \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0, \\ \left. \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=R} = g(\varphi). \end{array} \right. \quad (2)$$

Используя метод разделения переменных [4], решение задачи представляем в следующем виде:

$$p(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left( \frac{r}{R} \right)^{2k} \cos 2k\varphi, \quad (3)$$

где коэффициенты  $A_k$  определяются из следующего краевого условия:

$$\left. \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=R} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{2k}{R} \cos 2k\varphi = g(\varphi). \quad (4)$$

В случае, если  $g(\varphi) = \cos 2\varphi - \cos 6\varphi$ , то решением задачи (1) является следующая функция:

$$p(r, \varphi) = \frac{R}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \cos 2\varphi - \frac{R}{6} \left( \frac{r}{R} \right)^6 \cos 6\varphi + C, \quad (5)$$

где  $C$  – произвольная константа.

#### 4. Дискретная математическая модель на базе граничных интегральных уравнений с использованием метода дискретных особенностей

Решение задачи (1) ищем в виде потенциала двойного слоя:

$$p(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_l u(M) \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{|M - M_0|} dl, M_0 \in \Omega. \quad (6)$$

Разложим контур  $l$  на составные части, исключая точки  $O$ ,  $A$ ,  $B$  (см. Рис. 2):

$$p(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} u_1(M) \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{|M - M_0|} dl_1 + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{l_2} u_2(M) \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{|M - M_0|} dl_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{l_3} u_3(M) \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{|M - M_0|} dl_3 \quad (7)$$

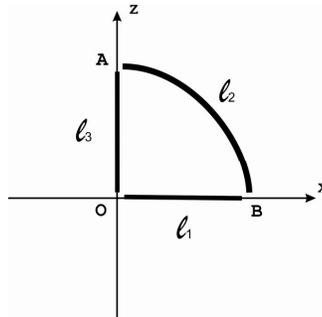


Рис.2. Контур  $l$ .

Дифференцируя по нормали во внутренней точке  $M_0$ , затем используя граничные условия, получаем систему гиперсингулярных интегральных уравнений на контуре  $l$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^R \frac{u_1(x)}{(x-x_0)^2} dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R^2-x_0^2) \sin \varphi u_2(\varphi)}{(R^2+x_0^2-2Rx_0 \cos \varphi)^2} R d\varphi + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_R^0 \frac{2x_0 z u_3(z)}{(x_0^2+z^2)^2} dz = 0, x_0 \in (0, R) \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^R \frac{(R^2-x^2) \sin \varphi_0 u_1(x)}{(R^2+x^2-2Rx \cos \varphi_0)^2} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u_2(\varphi)}{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi-\varphi_0}{2}} R d\varphi + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_R^0 \frac{(R^2-z^2) \cos \varphi_0 u_3(z)}{(R^2+z^2-2Rz \sin \varphi_0)^2} dz = g(\varphi_0), \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^R \frac{2xz_0 u_1(x)}{(x^2-z_0^2)^2} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R^2-z_0^2) \cos \varphi u_2(\varphi)}{(r_0^2+R^2-2r_0R \sin \varphi)^2} R d\varphi + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_R^0 \frac{u_3(z)}{(z-z_0)^2} dz = 0, z_0 \in (0, R) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Переходя к стандартному интервалу  $(-1,1)$  и учитывая условие конечности энергии [5], будем искать решение системы (8) в виде:

$$u_{1,2,3}(t) = v_{1,2,3}(t) \sqrt{1-t^2}, t \in (-1,1). \quad (9)$$

Перепишем систему (8) в эквивалентном операторном виде:

$$\begin{cases} (a_{11}Av_1 + K_{12}v_2 + K_{13}v_3)(t, t_0) = 0, \\ (K_{21}v_1 + a_{22}Av_2 + K_{22}v_2 + K_{23}v_3)(t, t_0) = g(t_0), \\ (K_{31}v_1 + K_{32}v_2 + a_{33}Av_3)(t, t_0) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $A$  – оператор Адамара,  $K_{**}$  – гладкие операторы, соответствующие выражениям в системе (8).

Проводя дискретизацию (10) с использованием интерполяционных формул квадратурного типа [6] с узлами  $t_{0k}^n$  и точками коллокации  $t_{0j}^n$ , имеем эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \sum_{k=1}^{n-1} A_{jk} v_{n-2}^1(t_{0k}^n) + \sum_{k=1}^{n-1} K_{jk}^{12} v_{n-2}^2(t_{0k}^n) + \sum_{k=1}^{n-1} K_{jk}^{13} v_{n-2}^3(t_{0k}^n) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n-1} K_{jk}^{21} v_{n-2}^1(t_{0k}^n) + a_{22} \sum_{k=1}^{n-1} A_{jk} v_{n-2}^2(t_{0k}^n) + \\ \quad + \sum_{k=1}^{n-1} K_{jk}^{22} v_{n-2}^2(t_{0k}^n) + \sum_{k=1}^{n-1} K_{jk}^{23} v_{n-2}^3(t_{0k}^n) = g(t_{0j}^n), \\ \sum_{k=1}^{n-1} K_{jk}^{31} v_{n-2}^1(t_{0k}^n) + \sum_{k=1}^{n-1} K_{jk}^{32} v_{n-2}^2(t_{0k}^n) + a_{33} \sum_{k=1}^{n-1} A_{jk} v_{n-2}^3(t_{0k}^n) = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

где

$$A_{jk} = \begin{cases} \frac{(1 - (t_{0k}^n)^2)((-1)^{k+j+1} + 1)}{n(t_{0j}^n - t_{0k}^n)^2}, k \neq j \\ -\frac{n}{2}, k = j \end{cases} \quad (12)$$

$$K_{jk}^{pq} = \frac{1}{n} K_{pq}(t_{0j}^n, t_{0k}^n)(1 - (t_{0k}^n)^2), p, q = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Используя (6) и (9), находим решение задачи (1):

$$\begin{aligned} p(t_0) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K_1(t, t_0) v_1(t) \sqrt{1-t^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K_2(t, t_0) v_2(t) \sqrt{1-t^2} dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K_3(t, t_0) v_3(t) \sqrt{1-t^2} dt, \end{aligned} \quad (14)$$

здесь соответствующие интегралы по  $l_1, l_2, l_3$  сведены к интегралам по интервалу  $(-1, 1)$ .

Используя квадратурные формулы для интегралов с гладкими ядрами [6] с узлами полинома Чебышева второго рода, из (14) имеем:

$$p_{n-2}(t_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k^1 v_1(t_{0k}^n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k^2 v_2(t_{0k}^n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k^3 v_3(t_{0k}^n), \quad (15)$$

$$\text{где } \mu_k^{1,2,3} = \frac{1}{n} K_{1,2,3}(t_{0k}^n, t_0)(1 - (t_{0k}^n)^2).$$

### 5. Результаты численного эксперимента

На основе построенной в разделе 4 дискретной модели проведен численный эксперимент. Относительная сходимость метода представлена на Рис. 3.

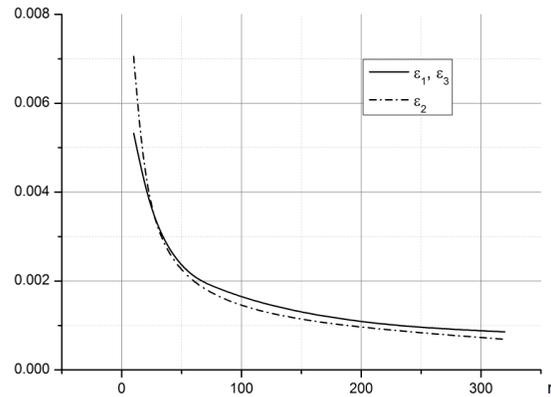


Рис.3. Относительная сходимость.

Здесь  $\varepsilon_{1,2,3} = v_{1,2,3}(t_{0,2k}^{2n}) - v_{1,2,3}(t_{0k}^n)$ ,  $k = 1, n-1$ .

Аналитическое и численное решения в области представлены на Рис. 4. Отметим, что граничные условия выполнены.

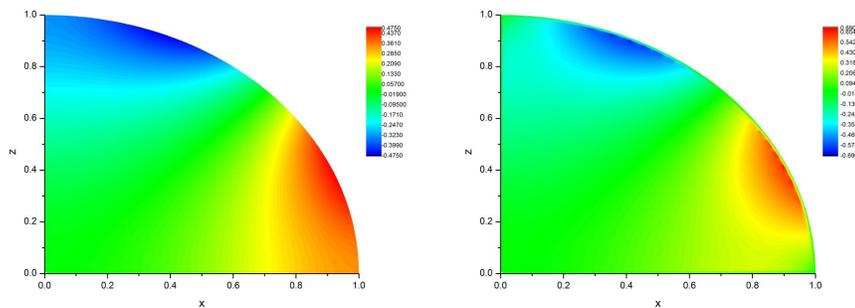


Рис.4. Аналитическое и численное решение в области.

## 6. Выводы и направления дальнейших исследований

Внутренняя задача Неймана для четверти круга решена двумя способами: аналитически и с использованием метода граничных интегральных уравнений. Проиллюстрирована сходимость численного метода на базе метода дискретных особенностей, проведено сравнение с аналитическим решением.

Таким образом решена эталонная двумерная задача Неймана для уравнения Лапласа в четверти круга. Численное решение граничного интегрального уравнения с высокой точностью совпадает с решением в виде конечного ряда.

Автор благодарен за проявленный интерес к работе Юрию Владимировичу Ганделю, доктору физико-математических наук, профессору Харьковского национального университета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сапожников С. Б., Фот Е.Я., Мокеев В.В. Экспериментальное и численное исследование колебаний тонкостенной оболочки, заполненной вязкоупругой жидкостью// Известия Челябинского научного центра. – № 4(26), 2004 – с. 66-70.
2. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. – Харьков: Новое слово, 2005. – 254 с.
3. Кононенко И.Ю., Стрельникова Е.А. Математическая модель гидроупругих колебаний составных оболочек, частично заполненных жидкостью // Доповіді Національної Академії Наук України. – № 6, 2008 – с.32-40.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966. – 724 с.
5. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, - М.: Наука, 1985. – 256с.
6. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учеб. пособие – Харьков: ХНУ, 2001. – 92 с.