УДК 681.513

Математические модели предметных областей в системах компьютерной математики учебного назначения

М. С. Львов

Херсонский государственный университет, Украина

В работе представлен объектно-ориентированный подход к описанию математических моделей предметных областей в системах компьютерной математики учебного назначения, ориентированных на поддержку пошагового решения учебных математических задач. В основание представления математических знаний о данной предметной области положено понятие содержательного модуля, в котором определены сигнатура, математические модели и их элементарные преобразования, а также учебные задачи. Изложен подход к классификации элементарных преобразований моделей в алгебраических и геометрических предметных модулях.

Ключевые слова: *Компьютерная математика, информационные системы учебного назначения, математические модели предметных областей.*

В роботі представлено об'єктно-орієнтований підхід до опису математичних моделей предметних областей в системах комп'ютерної математики навчального призначення, орієнтованих на підтримку покрокового розв'язання навчальних математичних задач. В основу представлення математичних знань про дану предметну область покладено поняття змістовного модуля, у якому визначені сигнатура, математичні моделі та їх елементарні перетворення, а також навчальні задачі. Наведено підхід до класифікації елементарних перетворень моделей в алгебраїчних та геометричних предметних модулях.

Ключові слова: *Комп'ютерна математика, інформаційні системи навчального призначення, математичні моделі предметних областей.*

The paper presents the object-oriented approach for description of mathematical models of subject domains in educational purpose computer mathematic software, oriented on step by step solution process support of learning mathematical tasks. At the base of the presentation of mathematical knowledge on this subject domain the concept of meaningful module, in which the signature, the mathematical models and elementary transformations are defined, and learning tasks are put. The approach to the classification of elementary transformations of the models in algebraic and geometric subject modules is presented.

Key words*: computer mathematics, information systems of educational purpose, mathematical models of subject domains.*

1. Введение

Особое место среди учебных дисциплин как средней, так и высшей школы занимают точные и естественные дисциплины. Они формируют фундаментальные научные знания, базирующиеся на точных математических моделях явлений и процессов в природе и обществе. Учебный процесс для этих дисциплин включает не только лекции, а и активные формы обучения: практические занятия, лабораторные работы, производственную практику и т.п.

Проблема осуществления обратной связи, предназначенной для контроля качества усвоения знаний, решается, как правило, системами контрольных вопросов и тестовых задач. Такой подход обеспечивает, с нашей точки зрения, далеко неполный, косвенный контроль знаний. Профессиональные компетенции, основанные на процедурных знаниях, формируются, прежде всего, во время активных форм обучения: циклов практических занятий и лабораторных работ. Практическая часть учебной программы в дисциплинах, использующих математические модели и методы (математика, физика, информатика) является основной. Однако технологии представления и контроля качества процедурных знаний в мере, адекватной уровню развития технологий представления декларативных знаний, еще не исследованы и не разработаны.

Как правило, для поддержки практических занятий методисты рекомендуют использовать профессиональные системы компьютерной математики (ПСКМ) – Mathematica, Maple, Derive, Mathcad и др. С нашей точки зрения, использование ПСКМ в учебном процессе ограничено в силу целого ряда причин.

Во-первых, результатом самостоятельной работы ученика по решению учебной задачи является получения хода решение, не только ответа. ПСКМ, однако, поддерживают автоматический режим решения задач, предоставляя ответ, или, в лучшем случае, генерируя ход решения задачи (Maple, режим Student).

Во-вторых, ПСКМ не ориентированы на поддержку процесса обучения как бизнес-процесса. В частности, ПСКМ не содержат в своем составе необходимых дидактических и методических материалов, не поддерживают процесса проведения учебного занятия. Это перечень можно продолжить.

Под системами компьютерной математики учебного назначения (СКМУН) мы понимаем информационные системы учебного назначения по дисциплинам, основанным на математических знаниях (математических моделях и методах). СКМНП используют технологии символьных вычислений и методы компьютерной алгебры.

Проблему исследования настоящей работы можно сформулировать как исследование функциональных требований, математических моделей и методов СКМУН. См. также [1-4].

2. Модель дидактического содержания СКМУН

Информационную основу модельного обеспечения СКМУН представляют структурно-логические схемы (СЛС) предметной области - специальности, дисциплины, учебного модуля. СЛС предметной области - это ориентированный граф без циклов, представляющий основные единицы знаний предметной области и логические связи - зависимости между ними. Эти связи определяют, в частности, последовательность изучения единиц знаний. С нашей точки зрения, СЛС должны представлять трехуровневую иерархию

«специальность» - «дисциплина» - «учебный модуль».

СЛС специальности представляет логические зависимости между дисциплинами специальности, СЛС дисциплины (СЛСД) - логические зависимости между учебными модулями, а СЛС учебного модуля (СЛСМ) - логические зависимости между понятиями модуля.

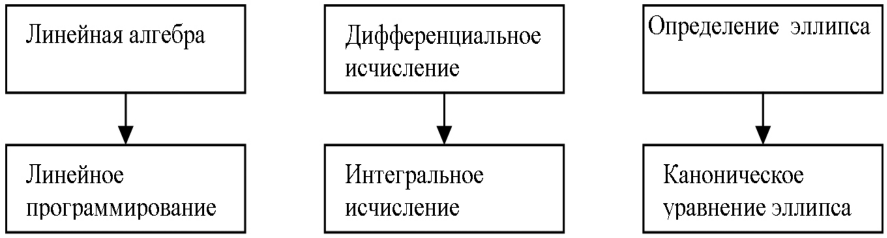

Рис.1. Логические зависимости между дисциплинами, модулями, вопросами

В инженерии знаний описаны точные модели представления знаний уровня учебного модуля. Это семантические сети, фреймовые модели, объектно-ориентированные модели. Ниже мы рассмотрим модели представления математических знаний в математических информационных системах учебного назначения, использующие объектно-ориентированную модель.

Модель информационного обеспечения математической учебной дисциплины - это отображение содержания рабочей программы дисциплины в СЛСД и, далее, отображение СЛСД в СЛСМ. Пример содержания ДМ школьного курса алгебры представлен на рис 2.

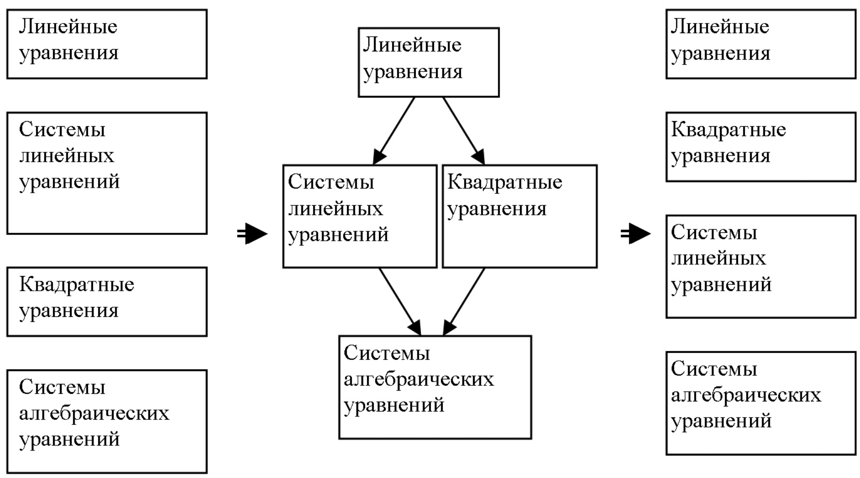

Рис.2. Формирование содержания дидактических материалов

СЛСМ определяет:

- содержание дидактических материалов (ДМ);
- сигнатуру учебного модуля;
- перечень математических моделей учебного модуля;
- перечень типов учебных задач учебного модуля;
- перечень элементарных преобразований моделей учебного модуля.

Электронные версии ДМ составляют дидактическое обеспечение дисциплины в ИСУН. Особую роль в модели представления знаний играет *Справочник*. Его содержание - структурированный список элементарных преобразований данной математической модели УМ. Вместе с преобразованиями данной модели в справочнике представлены и преобразования предметных областей, от которых зависит данный УМ. С точки зрения инженерии знаний - это перечень элементарных процедурных знаний. Модели справочников будут рассмотрены ниже.

2. Модель учебного модуля математической дисциплины

Сигнатура учебного модуля. Математические теории, которые излагаются в учебном модуле, используют, как правило, новые математические символы. Например, учебный модуль *Тригонометрия* вводит символы тригонометрических и обратных тригонометрических функций, символ константы π. Учебный модуль *Интегральное исчисление* вводит символы неопределенного и определенного интегралов, специальный символ константы C, символ подстановки $\Phi(x)\,|_b^a \overset{df}{=} \Phi(b) - \Phi(a)$. Перечень этих символов составляет собственную сигнатуру учебного модуля. Полная сигнатура УМ состоит из собственной сигнатуры модуля и сигнатур модулей, от которых данный модуль зависит в СЛСД. Предметом изучения являются интерпретации символов сигнатуры.

Математические модели учебного модуля. К математическим моделям УМ принадлежат формальные определения математических объектов, которые являются предметом изучения. В модуле *Тригонометрия* это, например, формальные определения тригонометрического выражения, тождества, уравнения, неравенства. В модуле *Аналитическая геометрия* изучаются, в частности, кривые 2-го порядка (эллипс, гипербола, парабола). В модуле *Электричество* это модели электростатического поля, участка цепи постоянного тока, электрической схемы постоянного тока. Важную роль в представлении математических моделей играют графические средства. Как правило, математические модели прикладных учебных модулей и дисциплин можно и должно интерпретировать, т.е. представлять в виде графиков, рисунков, схем, анимаций, технологий мультимедия. Поэтому формальные определения математических объектов включают информацию о параметрах их интерпретаций (графических, видео и аудио представлений).

Типы учебных задач учебного модуля. Основной предмет изучения в учебном модуле математической дисциплины - учебные задачи, перечень типов которых определен в УП дисциплины. Это – так называемые стандартные задачи, умение решать которые являются требованием государственного стандарта (ОПП). Как правило, в формулировке учебной задачи используются несколько базовых математических моделей, объединенных соотношениями. Формальные определения стандартных задач включают модель $M(x_1,...,x_n)$, условие задачи $\varphi(x_1,...,x_n)$ и вопрос $Q(x_{j_1},...,x_{j_m})$ к ней. Формальное определение стандартной задачи можно интерпретировать как

$$\textit{Дано } M(x_1,...,x_n)\textit{, причем } \varphi(x_1,...,x_n)\textit{. Найти } Q(x_{j_1},...,x_{j_m}).$$

Например, задача «Построить касательную L к графику F функции $y=\dfrac{x+1}{x}$ в точке A с абсциссой $x_A=1$» представлена в виде модели $P=<M,\varphi,Q>$, где

$$M=F(y=f(x)\ \&\ A(x_A,y_A)\ \&\ L(y-y_A=f^{'}(x_A)(x-x_A))$$
$$\varphi=(f(x)=\frac{x+1}{x})\ \&\ (x_A=1) \qquad (1)$$
$$Q=L.$$

Модель задачи использует модели графика функции $y=f(x)$, точки $A(x_A,y_A)$ и касательной к графику функции $L(y-y_A=f^{'}(x_A)(x-x_A))$. Эти модели объединены соотношениями $(f(x)=\dfrac{x+1}{x})\ \&\ (x_A=1)$, определенными в условии задачи. Буквенные обозначения F,A,L обозначают имена и интерпретаторы моделей. Интерпретатор модели, в частности, преобразует алгебраические уравнения в их графические образы, которые на графике обозначаются соответствующими буквами.

Элементарные преобразования моделей. Процесс решения учебной задачи определяется как последовательность шагов, на каждом из которых осуществляется одно из элементарных преобразований $M\ \&\ \varphi$. Для каждого учебного модуля определены специфические преобразования. Полный перечень элементарных преобразований данного УМ составляется из специфических преобразований этого модуля и преобразований модулей, от которых данный модуль зависит в СЛСД. Например, специфическими для учебного модуля *Дифференциальное исчисление* являются правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций. Модуль *Применения производной*, который зависит от модуля *Дифференциальное исчисление*, в частности, содержит элементарное преобразование *Составить уравнение касательной к графику функции*.

Определение учебного модуля. Учебный модуль SD описывается классом учебных задач $Task_{SD}$, который и определяет содержание SD. Учебные задачи определены в терминах математических моделей MM_{SD} и отношений зависимости. MM_{SD} определены в терминах сигнатур Σ_{SD} учебного модуля и элементарных преобразований ET_{SD}. Таким образом, собственно SD определяется как четверка

$$SD=<\Sigma, MM, ET, Task>.$$

Кроме собственных элементов определения модуля SD, в формулировке моделей, их преобразований и учебных задач используются соответствующие элементы, определенные в базовых модулях. Если SD в СЛСД зависит от $SD_1,\ldots,SD_k$ ($SD_1,\ldots,SD_k \to SD$), то

$$\Sigma_{SD} = \Sigma \cup \bigcup \Sigma_{SD_j}, ET_{SD} = ET \cup \bigcup ET_{SD_j}. \qquad (2)$$

Область применения моделей SD. Анализ СЛС таких математических дисциплин, как школьная алгебра, математический анализ, линейная алгебра, теория обычных дифференциальных уравнений, некоторые дисциплины прикладной математики, показал, что все они удовлетворяют этой схеме. Соответствующая СКМНП может строиться как единая система, основанная на понятии *алгебраического объекта* (АО) и *эквационального вывода*.

Такие математические дисциплины, как элементарная геометрия, аналитическая геометрия, механика, некоторые другие прикладные дисциплины, нуждаются в геометрических иллюстрациях и основанные на более сложной форме вывода. Соответствующие СКМНП должны использовать понятие *геометрического объекта* (ГО).

Математические дисциплины, которые используют формально-логические методы вывода, например, математическая логика, нуждаются в понятии логического объекта (ЛО). Для курса математической логики необходимо использовать логический вывод в его классической форме - то есть в форме вывода из гипотез с использованием правил логического вывода типа *Modus ponens, Gen*.

Отдельного исследования нуждаются в СКМУН из алгоритмизации и программирования (*программные объекты* (ПО)).

Наконец, каждый SD физики (механика, электрика, оптика и т.п.) использует собственную систему физических величин, физических объектов и математических моделей физических явлений и процессов. Физические объекты и математические модели используют АО и специальные интерпретаторы (графики, анимации, мультимедиа и т.п.).

3.Системные задачи поддержки пошагового решения учебных задач

Проблема поддержки пошагового решения УЗ является основной при реализации СКМУН. Перечислим основные системные задачи, решающие эту проблему.

1. **Задача верификации модели УЗ**. Широкий класс УЗ требует от пользователя самостоятельного построения модели УЗ. Это, например, т.н. текстовые задачи курса школьной алгебры, решаемые с помощью уравнений или систем уравнекурса школьной алгебры, решаемые с помощью уравнений или систем уравнени. Неверно составленная система приводит к неправильному решению задачи, даже если система решена верно. Задача верификации состоит в проверке правильности модели, составленной пользователем, т.е. ее эквивалентности правильной модели.

2. **Задача верификации шага решения УЗ**. Решая УЗ по шагам, пользователь может допустить ошибку на каждом шаге решения. Задача верификации шага решения состоит в проверке правильности преобразования модели, выполненной пользователем на данном шаге.

3. **Задача верификации хода решения УЗ**. Решая УЗ по шагам в рамках выполнения контрольной работы, пользователь должен представить ход решения УЗ для проверки. Проверку осуществляет преподаватель на своем рабочем месте в режиме offline. Если ошибка в ходе решения найдена, это не должно привести к окончанию проверки. Задача заключается в обнаружении всех ошибок в ходе решения и их фиксации.

4. **Задача генерации шага решения УЗ**. В некоторых педагогических ситуациях пользователю, решающему УЗ, система должна редоставить пользователю подсказку в виде очередного шага решения УЗ.

5. **Задача генерации хода решения УЗ**. В некоторых педагогических ситуациях система должна редоставить пользователю методически правильный ход решения УЗ. Отметим, что решению этой задачи посвящены многие СКМУН.

6. **Задача автоматической поддержки хода решения УЗ.** Решая УЗ, пользователь

1) сначала определяет, какое из элементарных преобразований нужно осуществить на данном шаге решения, затем

2) осуществляет это преобразование, и, наконец,

3) переписывает результат как следующий шаг решения.

С нашей точки зрения, этап определения следующего шага решения является наиболее важным. Именно он носит творческий характер. Режим автоматической поддержки хода решения УЗ предоставляет пользователю возможность выбрать одно из элементарных преобразований, а затем автоматически выполняет этапы 2, 3. В результате пользователь сосредоточен на поиске хода решения задачи как логической задачи, а не на выполнении часто рутинных вычислений, отнимающих много времени и являющихся источником ошибок технического характера.

Реализация режима автоматической поддержки хода решения УЗ требует точных формулировок в определении SD, точного определения понятия хода решения задачи как формы логического вывода и, самое главное, точного, полного и методически правильного определения списка элементарных преобразований ET_{SD}.

Объем данной статьи не позволяет описать достаточно полно решения всех этих проблем для всех SD. Это – темы отдельных исследований для каждой учебной дисциплины. Например, для УД *Программирование* необходимо строить математические модели компьюерной программы. Основная системная задача – задача верификации модели в общей постановке алгоритмически неразрешима. Ниже мы рассмотрим основные аспекты решения системных задач для УД, изучающих алгебраические объекты.

Модель учебной алгебраической задачи. Под учебной алгебраической задачей (УАЗ) мы понимаем задачу, формулируемую в терминах алгебраических объектов, являющуюся предметом изучения и поддерживаемую СКМУН. Разработка СКМУН состоит, в частности, в точном определении АО, их элементарных преобразований и типов НАЗ.

Определение 2.1. Сигнатурой Σ предметной области называется пара $<\Sigma_O, \Sigma_p>$, где Σ_o - сигнатура операций, Σ_p -сигнатура предикатов.

Определение 2.2. Примитивным алгебраическим объектом называется элемент носителя соответствующей многосортной алгебраической системы или переменная.

Определение 2.3. Атомарным алгебраическим объектом называется терм, составленный из примитивных АО в сигнатуре Σ_o (см. раздел 3).

Определение 2.4. Структурированным алгебраическим объектом (САО) в сигнатуре Σ называется бескванторная формула прикладной логики предикатов $F(x_1,...,x_n)$ с равенством. Множество переменых $\{x_1,...,x_n\}$ называется координатным множеством или координатным пространством САО.

Сигнатура Σ_p атомарных предикатов формулы $F(x_1,...,x_n)$, кроме предикатов равенства и отрицания равенства $(\neq)$, может содержать и другие атомарные предикаты, определение и интерпретация которых осуществляется в каждой предметной области. В частности, для «школьных» САО это предикаты строгого и нестрогого порядка. Логические связки – конъюнкция и дизъюнкция.

Алгебраический тип УАЗ определяется типами элементов ее структуры. Например, тип УАЗ «Решить тригонометрическое уравнение» определен структурой алгебраических типов (рис.3).

Эта структура уточняет условие задачи в терминах алгебр, используемых в при решении УАЗ. В рассматриваемом примере структура УАЗ определяет рациональное тригонометрическое уравнение одного неизвестного, коэффициенты которого принадлежат полю $TCoef$, аргументы тригонометрических функций - алгебре $TArg$, а решение ищется в виде элемента алгебры $TSol$.

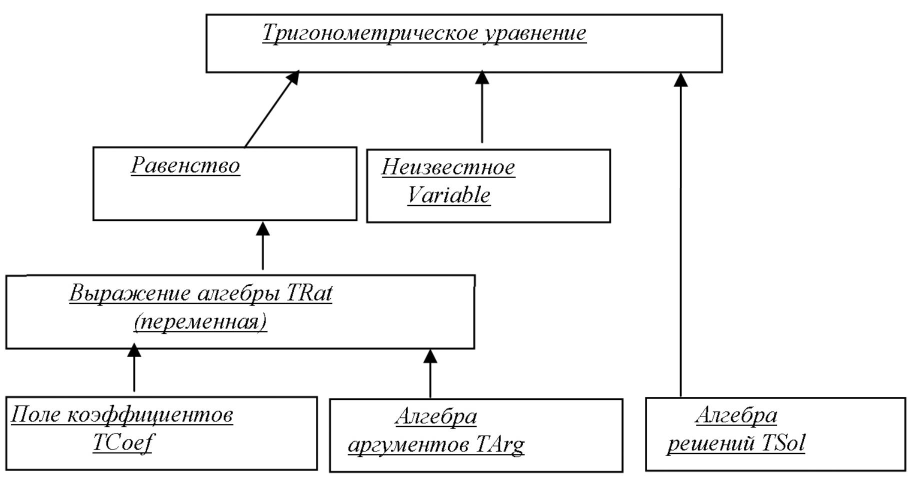

Рис.3. Структура алгебраических типов УАЗ «Тригонометрическое уравнение»

Определение 2.5. Учебной алгебраической задачей называется структурированный алгебраический объект с определенным для него алгебраическим типом.

В качестве модели алгебраических вычислений, реализующих сигнатуры предметных областей, используется понятие упорядоченно-сортной алгебраической системы (МАС) [5, 6]. Уточнение этого понятия, используемое в спецификациях СКМУН, описано в [7-11]. МАС предлагается специфицировать в терминах наследования, конструктивных расширений, морфизмов и параметризаций. Такой подход позволяет решать задачи синтеза и верификации программ алгебраических вычислений для широкого класса МАС [12-14].

Эквациональный вывод и его реализация. Эквациональный вывод – это вывод, основанный на свойствах равенства и правиле вывода (операции) замены равных

$$\frac{F(A), A = B}{F(B)}$$

Этот вывод представлен в виде последовательности троек (F, t, F'), где F - исходная логическая формула САО, $t \in ET_{SD}$ – элементарное преобразование, F' - преобразованная логическая формула САО. Эквациональный вывод имеет вид

$$(F_0, t_0, F_1), (F_1, t_1, F_2), \ldots, (F_{k-1}, t_{k-1}, F_k). \qquad (3)$$

В этой последовательности логическая формула, полученная на предыдущем шаге вывода, служит исходной для следующего шага вывода. В пользовательском интерфейсе СКМУН вывод представлен в виде последовательности $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}, F_k$.

Выполняя i-тый шаг решения в режиме автоматизации, пользователь выделяет в F_i подвыражение G и выбирает в *Справочнике* СКМУН преобразование t_i, применимое к G. Система применяет данное преобразование к $F_i(G)$, отображая результат $F_{i+1} = F_i(t_i(G))$ как следующий шаг решения.

Основная проблема состоит в том, чтобы получить адекватную требованиям пользователя классификацию элементарных преобразований, используемых при решении УАЗ данной предметной области.

Структурная классификация элементарных преобразований модели $F(x_1, \ldots, x_n)$ положена в основу представления содержания *справочника*. Она основана на структуре АО формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$. Приведем первые несколько разделов *справочника:*

- Преобразование чисел и числовых выражений.
- Правила использования переменных.
- Правила преобразования алгебраических выражений.

. . .

Структурная классификация элементарных преобразований естественным образом отражает структуру алгебраических объектов и, следовательно, процедурных математических знаний.

Модельная классификация. Модельная классификация элементарных преобразований основана на следующих трех признаках: тип модели, координатное пространство модели, многообразие решений модели, роль преобразования. Перечислим эти преобразования:

Преобразования, которые меняют тип представления (ізоморфизмы моделей).

Преобразования, расширяющие пространство модели.

Преобразования, расширяющие пространство модели (специализации).

Преобразования, расширяющие многообразие решений.

Преобразования, ограничивающие многообразие решений.

Операционная классификация (типизация) элементарных преобразований основана на главных знаках операций исходной и результирующей формул преобразований. На практике множество элементарных преобразований достаточно велико. Например, справочник СКМУН для курса алгебры 7-9 классов средней школы содержит около 200 преобразований. Поиск необходимого преобразования в таком множестве слишком неэффективен. Выход состоит в том, чтобы отсеять те преобразования, которые заведомо неприменимы в выделеному подваражения. Типизация преобразований позволяет эффективно решить эту задачу, формируя контекстный раздел *Избранные*, содержащий только «подходящие» преобразования.

Технологическая классификация элементарных преобразований предназначена для определения аргументов, передаваемых из СРЗ в соответствующую алгебраическую функцию, выполняющую выделенное элементарное преобразование.

Модель учебной геометрической задачи. Под учебной геометрической задачей (УГЗ) мы понимаем задачу, формулируемую в терминах геометрических объектов, являющуюся предметом изучения и поддерживаемую СКМУН. Здесь м будем называть такие модули геометрическими. Как и в алгебраических модулях, УГЗ определяются и решаются аналитическими методами. Особенность поддержки УГЗ заключается в том, что ГО и их элементарные преобразования могут быть интерпретированы геометрически, и, следовательно, должны отображаться в соответствующей графической интерпретации. Примитивный геометрический объект определяется именем и алгебраическим объектом в соответствии с синтаксисом:

```
ПГО ::= <ID>(<AO>).
```

Объекты аналитической геометрии, например, определяют уравнения, неравенства, системы уравнений или неравенств. Примитивные геометрические объекты (ПГО):

- точки плоскости и пространства;
- прямые,
- кривые 2-го порядка;
- кривые, заданные в полярной системе координат;
- поверхности 2-го порядка.

Математические модели геометрических модулей. Структуру геометрического модуля предлагается определять, используя парадигму объектного проектирования. В соответствии с ней, каждый ПГО принадлежит некоторому классу. Класс ПГО имеет стандартный идентификатор. Для аналитической геометрии на плоскости это классы Point, Line, Curve2, Circle, Ellipse, Parabola, Hyperbola. Класс Curve2 определяет ПГО кривая 2-го порядка. Иерархия наследования ПГО позволяет выделить общие и специфические сигнатуры, модели, элементарные преобразования и стандартные учебные задачи.

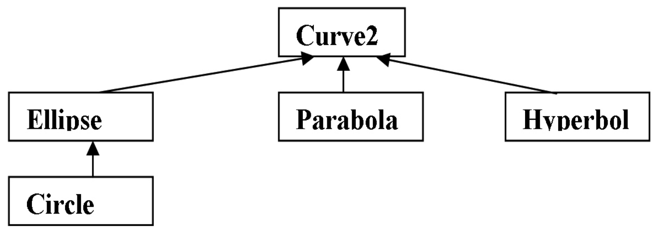

Рис. 4. Фрагмент иерерхии наследования ПГО модуля «Кривые второго порядка».

Определение класса ПГО содержит, в частности, определяющие АО данного ПГО.

```
Class PrimitiveAnalGeomObject(
    CoordinateSpace VarSet;  // (x, y);
    Variable ID;     // l
    AlgObject F(x,y);
    . . .
       Virtual CartesianSpace Draw();
    . . .
   );
```

Приведем для примера определения прямых класса Line.

```
Class Line::PrimitiveAnalGeomObject(
CanonicalForms(
 GenEqu a*x + b*y = c,              //общее уравнение
 CanEqu y = k*x + b,                // каноническое уравнение
 SegmEqu x/a + y/b = 1,           //уравнение в отрезках
 NormEqu c2 + s2 = 1 → c*x + s*y = p, // нормальное уравнение
 HorEqu  x = a,                    // уравнение вертикальной прямой
 VerEqu  y = b                   // уравнение горизонтальной прямой
 );
. . .
);
```

Определение класса ГО используется для перечисления различных форм алгебраического представления ГО, введения общепринятых обозначений параметров ПГО, определения функций доступа к этим параметрам, а текже к их геометрическим интерпретациям. Кроме того, в классе специфицируются элементарные алгебраические преобразования ПГО.

Структурированные геометрические объекты (СГО) с точки зрения объектно-ориентированной парадигмы определяются классами-агрегатами и, возможно, соотношениями между ними или их параметрами. Например

```
Class Segment = (Point A, Point B);
Class Semiline = (Line l, Point A)((A in l)&(x >= x.a));
Class Triangle = (Point A, Point B, Point C).
```

Как уже отмечалось, ход решения УЗ имеет два этапа: этап составления математической модели и этап преобразований модели. Для УГЗ первый этап играет методически важную роль. Поэтому задача верификации модели УГЗ должна быть решена. Второй этап – этап пошагового решения состоит в формировании хода решения в виде последовательности преобразований модели задачи.

Классификация элементарных преобразований геометрических объектов следует парадигме объектно-ориентированного проектирования. Основные типы преобразований:

Преобразование-конструктор ПГО строит ПГО по его алгебраическому определению. Соответствующее преобразование имеет спецификацию $t : AO \Rightarrow PGO$.

Преобразование-конструктор СГО строит СГО по его геометрическим атрибутам и соотношениям Φ между ними. Соответствующее преобразование имеет спецификацию $t : AO_1,,,AO_k,\Phi \Rightarrow PGO$.

Преобразование-селектор выделяет один или несколько объектов, которые входят в определение ГО.

Конструкторы и селекторы, как правило, можно трактовать как пару взаимно- обратных преобразований. Например:

Построить окружность по ее параметрам

a
b
r

Выделить параметры окружности

$$l((x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_l = a \\ b_l = b \\ r_l = r \end{cases}$$

Рис. 5. Преобразования Конструктор и Селектор параметров окружности.

Преобразование-определение вводит АО – определение ГО. Например, в ход решения УЗ можно включить определение касательной у функции $y = f(x)$ в точке A

Уравнение касательной L к графику функции
$G(y = f(x))$ в точке А

$$L(y - y_A = f'(x_A)(x - x_A))$$

Рис. 6. Преобразование-определение касательной к графику функции.

Кроме классов примитивных и структурированных объектов, геометрический модуль определяют элементарные преобразования – операции над объектами. В аналитической геометрии – это так называемые *элементарные задачи*. Например:

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$A,B \Rightarrow l(\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A})$$

Рис. 7. Преобразование – элементарная задача аналитической геометрии.

Особым отдельным типом преобразований являются *изоморфные преобразования* ГО. К ним принадлежат [14]:

элементарные преобразования декартовой плоскости или пространства;

преобразование перехода к полярной системе координат на плоскости или преобразование перехода к сферической или цилиндрической систем координат в просторные;

преобразование - переход к векторной алгебре.

Вывод в геометрических модулях. Если модель УГЗ представлена в виде одной формулы, ход ее решения, в принципе, можно получить в результате эквационального вывода (3). Однако представление условия в таком виде не принято. Общепринятой является формулировка условия в виде перечисления примитивных конъюнктов, задающих соотношения между параметрами ПГО условия задачи.

Дано:

1. График $F(y = \frac{x+1}{x})$.

2. Точка $A(1, y_A)$.

Это условие пользователь должен дополнить определениями, применив соответствующие элементарные преобразования-определения:

3. Точка A принадлежит графику F : $y_A = \frac{x_A + 1}{x_A}$.

4.Уравнение касательной L к графику F в т. A : $L(y - y_A = f'(x_A)(x - x_A))$.

.

Строки 1-4 хода решения представляют модель задачи

$$F(y=\frac{x+1}{x})\ \&\ A(1,y_A)\ \&\ (y_A=\frac{x_A+1}{x_A})\ \&\ L(y-y_A=f^{'}(x_A)(x-x_A))$$

Шаг вывода (решения), следовательно, зависит от данных, представленных в предыдущих шагах. Для его выполнения пользователь должен отметить соответствующие строки, найти преобразование в справочнике и применить его.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lvov M. Concept, functional requirements and methods of realization of school system of computer algebra (TerM system) / M. Lvov, V. Peschanenko // Proceedings of International conference “Computer simulation in information or/and communication engineering” Sofia 22-24 oct.- 2005. Sofia: KING - P.159-162.
2. Львов М. Основные принципы построения педагогических программных средств поддержки практических занятий / М.Львов // Управляющие системы и машины.- 2006.-№6. - С. 70-75.
3. Львов М.С. Концепция информационной поддержки учебного процесса и ее реализация в педагогических программных средах / М.С. Львов //Управляющие системы и машины.- 2009.- № 2. — С. 52-57, 72.
4. Львов М.С. Проектирование логического вывода как пошагового решения задач в математических системах учебного назначения /М. С. Львов // Управляющие системы и машины.- 2008.-№1.- С.25-32.
5. Goguen J. Ordered-Sorted Algebra I: Partial and Overloaded Operations. Errors and Inheritance. / Goguen J., Meseguer J. // Theoretical Computer Science. – Oxford: Elsevier .- 1992.-Vol. 105 (Num 2).- P. 217-273.
6. Goguen J.A. An initial algebra approach to the specification, correctness and implementation of abstract data types / J.A.Goguen, J.W. Thatcher, E. Wagner // Current Trends in Programming Methodology.- [R.Yeh eds.].-Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978.- P. 80-149.
7. Львов М.С. Синтез інтерпретаторів алгебраїчних операцій в розширеннях багатосортних алгебр / М.С.Львов // Вісник Харьківського національного университету. - 2009.-№847.-С.221-238. - (Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»).
8. Львов М.С. Верифікація інтерпретаторів алгебраїчних операцій в розширеннях багатосортних алгебр / М.С.Львов // Харківський університет Повітряних Сил : зб. наук. праць. - Харків: ХУПС, 2009.- Вип.3 (21).- С.127-137.
9. Львов М.С. Метод спадкування при реалізації алгебраїчних обчислень в математичних системах навчального призначення / М.С.Львов// Системи управління, навігації та зв’язку. - К: ЦНДІ НіУ, 2009.- Вип.3 (11).- С.120-130.
10. Львов М.С. Метод морфізмів реалізації алгебраїчних обчислень в математичних системах навчального призначення / М.С.Львов // Системи обробки інформації.- Харків: ХУПС, 2009.-Вип.6(80).- С.183-190.

11. Львов М.С. Об одном подходе к реализации алгебраических вычислений: вычисления в алгебре высказываний / М.С.Львов // Вестник Харк. нац. ун-та. – 2009. – № 863. – С. 157-168.- (Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления").
12. Львов М.С. Алгебраический подход к задаче решения систем линейных неравенств / М.С. Львов // Кибернетика и системний анализ. - № 2.- 2010. С. – 175-188.
13. Львов М.С. Тригонометричні обчислення в математичних системах навчального призначення /М.С.Львов.// Зб. наук. праць Харківського університету Повітряних Сил.-Харків: ХУПС, 2010.- Вип.1 (23).-С.132-136.
14. Львов М.С. Реалізація обчислень в алгебрах числових множин в математичних системах навчального призначення / М.С.Львов // Управляющие системы и машины.- 2010.-№ 2.- С. 39 - 46.
15. Львов М.С. Математичні моделі та методи підтримки ходу розв'язання навчальних задач з аналітичної геометрії / М.С.Львов // Искуственный интеллект.-№ 1.-2010, С.86-92.

Надійшла – 18.04.2011.