УДК 517:519.642

Ефективне застосування методу граничних інтегральних рівнянь при чисельному моделюванні задач теорії потенціалу

Я. С. Гарасим, Б. А. Остудін
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Розглянуто різні аспекти використання методу інтегральних рівнянь при розв'язуванні граничних задач теорії потенціалу в електронній оптиці. Максимально враховуючи специфіку розв'язуваних проблем, проаналізовано доцільність застосування інтегральних рівнянь пониженої розмірності. На модельному прикладі досліджені питання побудови ефективних наближених схем розв'язування таких рівнянь.

Ключові слова: *двовимірні інтегральні рівняння, абелева група симетрії, метод колокації.*

Рассмотрены различные аспекты использования метода интегральных уравнений при решении граничных задач теории потенциала в электронной оптике. Максимально учитывая специфику решаемых проблем, проведен анализ целесообразности применения интегральных уравнений пониженной размерности. На модельной задаче исследованы вопросы построения эффективных приближенных схем решения таких уравнений.

Ключевые слова: *двумерные интегральные уравнения, абелева группа симметрии, метод коллокации.*

Various aspects of integral equations use for the solution of boundary value problem in electron optics was considered. Giving the best regard to the special nature of this resolvable problem, we analyzed the expediency of application of reduced dimension integral equations. By solving model task the problem of effective numerical scheme construction for such equations was analyzed.

Key words: *two-dimensional integral equation, Abelian group of symmetry, collocation method*.

1. Постановка проблеми та шляхи її вирішення

Електронно-оптичні системи (ЕОС) є основними компонентами сучасних науково-дослідних комплексів, за допомогою яких вивчають складні фізичні процеси, пов'язані з рухом заряджених частинок у відповідних потенціальних полях. Відомо [1, 2], що, наприклад, електростатичне поле ЕОС створюється N ідеально провідними електродами, які в сукупності моделюють багатозв'язною поверхнею $S := \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, де $S_i \bigcap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. У цьому разі кожен електрод $S_i \in S$ пов'язують із заданим на ньому значенням потенціалу $U_0^{(i)}$. Для розрахунку електростатичного поля ЕОС складної конфігурації доцільно використовувати методи теорії потенціалу, що призводить до необхідності розв'язання такого інтегрального рівняння (ІР):

$$(A\sigma)(M) \equiv \int_S \sigma(P)\,|M-P|^{-1} \mathrm{d}S_p = U_0^{(i)}(M),\; M \in S_i \; (i=\overline{1,N}), \qquad (1)$$

де $\sigma(P)$ – шукана сукупна густина розподілу зарядів на S, тобто $\sigma(P):=\left\{\sigma_i(P), P\in S_i; i=\overline{1,N}\right\}$, а $U_0^{(i)}(M)$ – граничне значення потенціалу на електроді, змодельованому поверхнею S_i, яка може бути розімкненою.

З'ясування розв'язності рівняння (1) та побудова ефективних чисельних алгоритмів для знаходження $\sigma(P)$ є предметом окремих досліджень. Це пояснюється, по-перше, тим, що адекватне математичне моделювання відповідних полів у істотно просторовій постановці передбачає зважання характеру поведінки шуканої густини розподілу зарядів $\sigma(P)$ поблизу контуру розімкненої поверхні S та ліній її зламу. По-друге, в реальних ЕОС наявна значна кількість заряджених електродів складної конфігурації. Тому запровадження навіть досить економічного методу колокації за умов кусково-постійної апроксимації шуканої густини вимагає чисельного розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь великих розмірностей зі щільно заповненими матрицями, що призводить до нестійкості обрахунків. У зв'язку з цим перспективним виявився метод, що враховує наявну симетрію в геометрії сукупної поверхні S. Він дає підстави трактувати проблему як задачу з абелевою групою симетрії скінченного порядку, що суттєво понижує порядки матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні, оскільки (1) зводиться до послідовності рівнянь лише за конгруентною складовою S [3, 4, 5].

Отримані ІР можна розв'язувати методом колокації із використанням білінійної, біквадратичної або бікубічної апроксимації невідомої $\sigma(P)$. При цьому виникає необхідність обчислення значної кількості невласних інтегралів, ускладнених наявністю певних вагових функцій, які відображають сингулярні властивості шуканого розв'язку. Позбавитись цих особливостей можна шляхом запровадження спеціальних замін змінних у відповідних подвійних інтегралах. Така процедура значно ускладнює алгоритм наближеного розв'язування розглядуваного ІР.

Аналіз ситуації переконує в доцільності використання одного варіанта так званого методу апостеріорної оцінки похибки, який допомагає надійно контролювати нерегулярність $\sigma(P)$ в околі окремих точок поверхні S, відмовляючись таким чином від аналітичного врахування її поведінки. Треба також зауважити, що зважання на специфіку розімкнених поверхонь допомагає значно зменшити кількість контрольованих «особливих» точок поверхні S і в найкращому випадку мати справу лише з однією ! Це суттєво спрощує алгоритм розв'язування проблеми в цілому і відкриває шлях до застосування чисельно-аналітичної процедури, запровадженої авторами. Саме такий підхід до аналізу двовимірного ІР типу (1) цілком логічний з погляду використання можливостей обчислювальної математики [6].

2. Про доцільність вивчення плоского варіанту

Особливе місце в дослідженнях займають частинні випадки ІР (1), а також певні їх спрощені аналоги. Мета – вивчення можливостей використання одновимірних ІР при аналізі електростатичних полів, що створюються окремими класами заряджених поверхонь-електродів. У зв'язку з цим припустимо, що згадані вище поверхні нескінченно довгі циліндричні, твірні яких, у свою чергу, нескінченно тонкі рівномірно заряджені по довжині нитки, паралельні до однієї із координатних осей. Нехай також названі поверхні в перетині з довільною площиною, перпендикулярною до цієї осі, утворюють деяку сукупність замкнених або розімкнених простих, кусково-гладких дуг: $\Gamma := \bigcup_{j=1}^{\nu} \Gamma_j$. Тоді значення потенціалу в довільній точці простору не залежить від однієї координати. Тому для розрахунку поля досить обчислити потенціал у довільній точці площини. Таким чином запроваджують математичну модель так званого «плоского» електростатичного поля. При цьому розв'язок основної задачі можна подати у вигляді

$$U(x) = \int_{\Gamma} \psi(x,y)\,\tau(y)\,\mathrm{d}\Gamma_y + C\,,\;\; x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma\,,$$

де шукана «густина розподілу зарядів» $\tau(y)$ задовольняє таке ІР першого роду:

$$\int_{\Gamma} \psi(x,y)\,\tau(y)\,\mathrm{d}\Gamma_y = U_0(x) - C\,,\;\; x \in \Gamma\,. \tag{2}$$

Тут $\psi(x,y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$ – фундаментальний розв'язок двовимірного рівняння Лапласа, а константа C характеризує обмеженість розв'язку відповідної задачі Діріхле на нескінченності і формально визначається з (2) та умови

$$\int_{\Gamma} \tau(y)\,\mathrm{d}\Gamma_y = 0\,,$$

$U_0(x)$ – проекція граничного значення потенціалу на відповідну ділянку межі Γ (постійна величина).

У процесі знаходження електростатичного поля, створюваного реальною ЕОС, що прив'язана до певної ортогональної системи координат, за умови переважання одного із характерних розмірів сукупної поверхні-електрода над іншими, для встановлення якісної картини розподілу потенціалу можна обмежитись дослідженням поля в центральному поперечному перерізі просторової конструкції. У такому випадку відносно проста «плоска» модель (2) стає в нагоді для підтвердження достовірності результатів розв'язання задачі в суттєво просторовій постановці [4].

3. Задачі, що виникають за наявності осьової симетрії електростатичного поля

Нехай у півплощині zR ($R > 0$) відоме параметричне зображення певного набору $\Gamma := \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i$ дуг $\Gamma_i = \left\{ \left(z_i(\tau), R_i(\tau)\right), \alpha_i \le \tau \le \beta_i\,;\, i = \overline{1,m} \right\}$. Останні обертанням навколо осі $0z$ обраної циліндричної системи координат (φ, z, R) утворюють сукупність поверхонь, яка власне і моделює досліджувану ЕОС. Можна показати, що в так званому осесиметричному випадку просторове поле також не залежить від однієї координати, а саме, φ. Це дає підстави подати відповідний аналог (1) у такому загальному вигляді:

$$\left(A\overline{q}\right)(\gamma)=\overline{U}_0(\gamma)\,. \tag{3}$$

Тут $\overline{q}:=(q_1,q_2,...,q_m)^{\mathrm{T}}$ – стовпчик шуканих проекцій сукупної густини розподілу зарядів на Γ_i (область визначення $D(q_i)=[\alpha_i,\beta_i]$); $\overline{U}_0(\gamma):=\left(U_0^{(1)}(\gamma),U_0^{(2)}(\gamma),...,U_0^{(m)}(\gamma),\right)^{\mathrm{T}}$ – сукупність граничних значень потенціалів на окремих поверхнях, причому

$$U_0^{(i)}(\gamma)\equiv\begin{cases}U_0^{(i)}, & \gamma\in[\alpha_i,\beta_i]\,,\\ 0, & \gamma\,\overline{\in}\,[\alpha_i,\beta_i]\,;\end{cases}$$

$A:=\left(A_{ij}\right)_{i,j=1}^{m}$ – матриця операторів, кожний із яких визначається за правилом

$$\left(A_{ij}q_j\right)(\gamma)\equiv\int_{\alpha_j}^{\beta_j}q_j(\tau)\,E_{ij}(\tau,\gamma)\,\mathrm{d}\tau\,,\ \alpha_i\le\gamma\le\beta_i\,,$$

де

$$E_{ij}(\tau,\gamma):=4R_j(\tau)T_{ij}^{-1}(\tau,\gamma)\left\{\left[R_j'(\tau)\right]^2+\left[z_j'(\tau)\right]^2\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left[\sum_{s=1}^{4}a_s\eta_{ij}^{s}(\tau,\gamma)-\ln\left(\eta_{ij}(\tau,\gamma)\right)\sum_{s=1}^{4}b_s\eta_{ij}^{s}(\tau,\gamma)\right],$$

$$\eta_{ij}(\tau,\gamma):=\left\{\left[R_j(\tau)-R_i(\gamma)\right]^2+\left[z_j(\tau)-z_i(\gamma)\right]^2\right\}T_{ij}^{-2}(\tau,\gamma)\,,$$

а

$$T_{ij}(\tau,\gamma):=\left\{\left[R_j(\tau)+R_i(\gamma)\right]^2+\left[z_j(\tau)-z_i(\gamma)\right]^2\right\};$$

a_s, b_s – наперед відомі константи.

Оскільки осесиметричне поле визначається шляхом розв’язання ІР типу (3), які є лінійними, а граничні значення потенціалів на відповідних електродах постійні величини, то для зображення поля достатньо знайти розв’язки таких характеристичних задач

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\alpha_j}^{\beta_j}q_j(\tau)\,E_{ij}(\tau,\gamma)\,\mathrm{d}\tau=\delta_{ij}\,,\ \gamma\in[\alpha_i,\beta_i]\ \ (i=\overline{1,m}), \tag{4}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. Легко бачити, що тоді значення шуканого потенціалу в довільній точці півплощини zR ($R\ge0$)

$$U(z,R)=\sum_{i=1}^{m}U_0^{(i)}\Phi_i(z,R)\,,$$

де $\Phi_i(z,R)$ – розв’язки задач (4).

Запроваджені вище осесиметричні моделі, як відносно прості, стають у нагоді при зображенні електростатичних полів з малими порушеннями осьової симетрії. Такі задачі, звісно, можна трактувати як суттєво просторові. Однак доцільним виявилось зводити проблему до розв'язування певної послідовності однотипних ІР осесиметричного випадку. Існування надійних та ефективних методів чисельного дослідження таких рівнянь дають можливість за порівняно невелику кількість кроків отримувати результати з гарантованою точністю. У той же час володіння чисельно-аналітичною процедурою розв'язування двовимірних ІР дозволяє завжди перевірити достовірність отримуваних результатів не тільки у випадку малих порушень осьової симетрії, а і за їх межами.

Кожний із описаних вище підходів, у поєднанні з обов'язковим урахуванням специфіки граничних поверхонь, дозволяє також успішно вирішувати конкретні проблеми, пов'язані з необхідністю багатократного розв'язування однотипних ІР зі збуреними вхідними даними в процесі аналізу так званих обернених задач електронної оптики [1, 2].

4. Зауваження, щодо чисельного розв'язування самоузгоджених задач електронної оптики

Повертаючись до початку нашої роботи, відзначимо, що розрахунок великострумних пучків заряджених частинок є одним зі складних трудомістких завдань обчислювальної математики. За відсутності зовнішнього магнітного поля в усталеному режимі проблема полягає в розв'язуванні стаціонарної самоузгодженої задачі. Щоби розв'язати останню, в першу чергу, треба відшукати розподіл потенціалу (задача Діріхле для рівняння Пуассона). Тут у нагоді також стає метод ІР. Необхідне рівняння, що вирішує проблему, можна подати у вигляді

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{S_j}\sigma_j(y)\left|x-y\right|^{-1}\mathrm{d}S_y=U_0^{(i)}(y)+\int_{\Omega}\rho(y)\left|x-y\right|^{-1}\mathrm{d}\,y\,, \tag{5}$$

де ліва частина виражає потенціал поверхневих зарядів, розподілених на поверхнях S_j ($j=\overline{1,N}$), а права – потенціал об'ємних зарядів, розподілених з густиною $\rho(y)$ у деякому об'ємі Ω, що містить S_j; $U_0^{(i)}(y)$ – проекція граничного значення потенціалу на i-й електрод. Загальну проблему розв'язують шляхом послідовних наближень за об'ємним зарядом, що викликає необхідність багатократного розв'язання (5) за умов формування рухомої плазмової межі з відомою на кожному кроці правою частиною. Тому застосування чисельно-аналітичної процедури суттєво спрощує розрахунок великострумних пучків заряджених частинок у тривимірному просторі [7].

5. Обчислювальний експеримент

Для підтвердження вищевикладених положень розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля плоско-паралельного конденсатора. При математичному моделюванні проблеми інформацію про геометрію заряджених електродів подамо у вигляді деякої сукупності S двох паралельних прямокутних пластин: $S := S_1 \bigcup S_2$, де

$$S_l := \left\{ (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \,\middle|\, (x, y) \in [-a, a] \times [-b, b];\; z = (-1)^{l-1} h;\; l = \overline{1,2};\; a, b, h > 0 \right\}$$

З математичної точки зору вказані пластини будемо вважати безмежно тонкими, двосторонніми та обмеженими кусково-гладкими контурами скінченної довжини. Розглядувана задача відіграє роль модельної, оскільки відтворення електростатичного поля за умов суттєвої відмінності потенціалів на пластинах і поступового зменшення відстані між ними не є тривіальною проблемою. Результати обрахунків у цьому випадку особливо чутливі до змін початкових даних.

Враховуючи геометричні властивості сукупної поверхні S, подам останню у вигляді такого об’єднання конгруентних складових:

$$S = \bigcup_{l=1}^{2} \left(\bigcup_{k=1} S_{lk} \right).$$

Приймаючи до уваги таке подріблення S_l ($l = \overline{1,2}$), інтегральне рівняння (1) формально набуває зображення:

$$\sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{4} \int_{S_{lk}} \sigma_{lk}(P) \left| P - M \right|^{-1} \mathrm{d} S_p = f(M) = \begin{cases} U_0^{(1)}, & M \in S_1; \\ U_0^{(2)}, & M \in S_2. \end{cases} \tag{6}$$

Нехай при цьому

$$\left| P - M \right|^{-1} = \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]^{-1/2};$$

$$M := (x_0, y_0, z_0 = \pm h);\; (x, y), (x_0, y_0) \in [-a, a] \times [-b, b].$$

Далі, шляхом запровадження в (6) очевидних замін змінних переходимо від інтегрування по сукупній поверхні S до інтегрування по її конгруентній складовій S_{11}. Зауважимо, що точка задоволення граничних умов $(x_0, y_0, z_0 = \pm h)$ обирається також на S_{11}. Результат – фактично система восьми лінійних інтегральних рівнянь відносно невідомої густини $\sigma_j(x, y)$ ($j = \overline{1,8}$), що відповідає обраній групі симетрії, якою володіє поверхня S:

$$\sum_{j=1}^{8} \iint_{\Delta_1} \sigma_j(x, y) G_{|i-j|+1}(x, y, h; x_0, y_0, z_0) \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y = f(M_i) \quad (i = \overline{1,8}). \tag{7}$$

Тут $\Delta_1 := [0, a] \times [0, b]$; $M_i := \left((-1)^{r-1} x_0, (-1)^{s-1} y_0, (-1)^{p-1} z_0 \right) \in S_{pq}$, причому $i := 4(p-1) + 2(r-1) + s$, а $q := 2(r-1) + s$ за умови, що $p, r, s = \overline{1,2}$; точкою інтегрування є $P := \left((-1)^{n-1} x, (-1)^{m-1} y, (-1)^{l-1} h \right) \in S_{lk}$, причому $j := 4(l-1) + 2(n-1) + m$, а $k := 2(n-1) + m$ за умови, що $n, m, l = \overline{1,2}$ (див. рис. 1); і нарешті,

$$G_{|i-j|+1}(x, y, h; x_0, y_0, z_0) = \left| P - M_i \right|^{-1}.$$

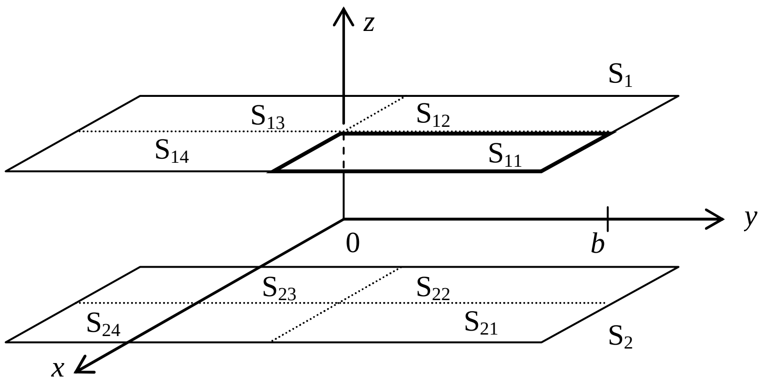

Рис. 1. Розміщення пластин плоско-паралельного конденсатора

Легко бачити, що систему інтегральних рівнянь (7) можна записати у вигляді матричного операторного рівняння

$$A\bar{\sigma} = \bar{f}\,, \tag{8}$$

де $\bar{\sigma} := \left(\sigma_1(x,y), \sigma_2(x,y), ..., \sigma_8(x,y)\right)^{\mathrm{T}}$, $\bar{f} := \left(f(M_1), f(M_2), ..., f(M_8)\right)^{\mathrm{T}}$, а $A := \left(A_{ij}\right)_{i,j=1}^{8}$, причому A_{ij} – інтегральні оператори, що діють за правилом

$$\left(A_{ij}\sigma_j\right)(M_i) \equiv \iint\limits_{\Delta_1} \sigma_j(x,y) G_{|i-j|+1}(x,y,h;x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Оскільки інтегральне рівняння (6) трактується нами як таке, що володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку, (8) можна перетворити до вигляду $A'\bar{\sigma}' = \bar{f}'$, де $A' := FAF^{-1}$, $\bar{\sigma}' := F\,\bar{\sigma}$, $\bar{f}' = F\bar{f}$. Тут $F := \left(F_{ij}\right)_{i,j=1}^{8}$ – побудована нами матриця перетворення Фур'є, яка має таке зображення

$$\left(F_{ij}\right)_{i,j=1}^{8} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця $A' := \left(A'_i\right)_{i=1}^{8}$ має чітку діагональну структуру, а тому система інтегральних рівнянь (7) розщеплюється на вісім незалежних інтегральних рівнянь вигляду

$$\left(A'_i\sigma'_i\right)(M_i) \equiv \iint\limits_{\Delta_1} R_i(x,y,h;x_0,y_0,z_0)\,\sigma'_i(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f'(M_i)\,, \tag{9}$$

де

$$R_i(x,y,h;x_0,y_0,z_0) := \sum_{j=1}^{8} F_{ij}\, G_{|i-j|+1}(x,y,h;x_0,y_0,z_0)\,,$$

$$\sigma'_i(x,y) := \sum_{j=1}^{8} F_{ij}\,\sigma_j(x,y)\,, \quad f'(M_i) := \sum_{j=1}^{8} F_{ij}\, f(M_j)\,.$$

Розв’язуючи кожне з них, неважко відтворити $\sigma_j(x,y)$.

Кожне з інтегральних рівнянь (9) розв’язували методом колокації застосовуючи кусково-постійні та білінійні базисні функції для апроксимації шуканих "густин розподілу зарядів" $\sigma'_i(x,y)$ на S_{11}. Оскільки рівняння послідовності (9) побудовані так, що області визначення всіх без винятку невідомих функцій однакові, контролювати сингулярну поведінку шуканої густини розподілу зарядів можна в околі лише однієї особливої точки з координатами $(a,b)\in\Delta_1$. Це значно спрощує застосування алгоритму в цілому. Як вже згадувалося раніше, оцінку похибки отримуваних розв’язків здійснювали апостеріорно шляхом запровадження спеціальних оцінювачів, що задавали необхідний рівень точності очікуваних результатів. вказану похибку знаходили як результат розв’язання інтегрального рівняння типу (9) з правою частиною, що виражає точність відтворення граничної умови в околі особливої точки складової S_{11}. При цьому для апроксимації похибки використовували локальні базисні функції, визначені в околі контрольованої точки, які забезпечували порядок апроксимації вищий, ніж при знаходженні самого наближеного розв’язку інтегрального рівняння (9). Далі, при невиконанні встановлених оцінювачем критеріїв здійснювали повторне наближення розв’язуванням початкового інтегрального рівняння на подрібненій в околі особливої точки сітці.

Для чисельного розв’язування (9) застосували метод колокації, а усі подвійні інтеграли, що виникали в процесі наближенні інтегрального рівняння відповідною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, обчислювали аналітично на підставі отриманої нами загально формули [8, 9]:

$$\int_c^d \mathrm{d}\,y \int_{ay+b}^{py+q} \left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{-1/2} \mathrm{d}\,x = \tag{10}$$

$$= (y_0-c)W(c)+(d-y_0)W(d)+\frac{q-x_0+py_0}{(1+p^2)^{1/2}}T(p,q)+\frac{x_0-b-ay_0}{(1+a^2)^{1/2}}T(a,b)\,,$$

де $c\le y_0\le d$, $ay_0+b\le x_0\le py_0+q$,

$$W(t) := \ln\frac{q-x_0+pt+\left[(q-x_0+pt)^2+(t-y_0)^2\right]^{1/2}}{q-x_0+at+\left[(q-x_0+at)^2+(t-y_0)^2\right]^{1/2}}\,,$$

$$T(s,t) := \ln\frac{d-y_0+t(s-x_0+td)+(1+t^2)^{1/2}\left[(s-x_0+td)^2+(d-y_0)^2\right]^{1/2}}{c-y_0+t(s-x_0+tc)+(1+t^2)^{1/2}\left[(s-x_0+tc)^2+(c-y_0)^2\right]^{1/2}}\,.$$

При необхідності застосування білінійної, біквадратичної і бікубічної апроксимацій шуканих розв’язків використовували спеціальні формули для аналітичного обчислення інтегралів вигляду [9]

$$I(m,n) := \int_a^b \int_c^d \frac{x^m y^n}{S_x^y(\delta)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

де $m, n = 0, 1, 2, 3$; $S_x^y(\delta) := \left(x^2 + y^2 + \delta^2\right)^{1/2}$; $(0,0) \in [a,b]\times[c,d]$; $\delta \ge 0$. Причому проблема зводилася до випадку $m = n = 0$. Зауважимо, також, що розглядувана методика дозволяє обчислювати аналітично такі подвійні інтеграли [9]:

$$\int_a^b \int_c^d \left[A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2\right]^{-1/2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

де $(x_0, y_0) \in (a,b)\times(c,d)$, $A + C > 0$, $AC - B^2 > 0$. Останні виникають у ситуаціях, коли граничними поверхнями є довільні чотирикутні пластини. Обчислення цих інтегралів ґрунтується на використанні формули (10). Легко бачити, що частина згаданих подвійних інтегралів належить до невласних.

Табл. 1. Відновленне значення потенціалу в крайніх точках пластини S_1

C_1	C_2	h	N_x, N_y	x	y	U_h
–500	15 000	1,0	10	0,9500	0,9500	**13 257,8**
				0,8000	0,8000	15 612,4
				0,6000	0,6000	14 997,7
			20	0,9750	0,9750	**13 567,9**
				0,9000	0,9000	15 496,2
				0,8000	0,8000	14 998,1
		0,5	10	0,9500	0,9500	**13 064,9**
				0,8000	0,8000	15 689,7
				0,6000	0,6000	14 991,0
			20	0,9750	0,9750	**13 386,9**
				0,9000	0,9000	14 414,6
				0,8000	0,8000	14 996,5
		0,1	10	0,9500	0,9500	**12 991,4**
				0,8000	0,8000	15 609,0
				0,6000	0,6000	14 990,6
			20	0,9750	0,9750	**12 993,8**
				0,9000	0,9000	15 682,4
				0,8000	0,8000	14 981,7
–15 000	15 000	0,1	10	0,9500	0,9500	**12 391,5**
				0,8000	0,8000	15 699,4
				0,6000	0,6000	15 009,2
			20	0,9750	0,9750	**12 076,9**
				0,9000	0,9000	15 972,3
				0,8000	0,8000	14 974,9

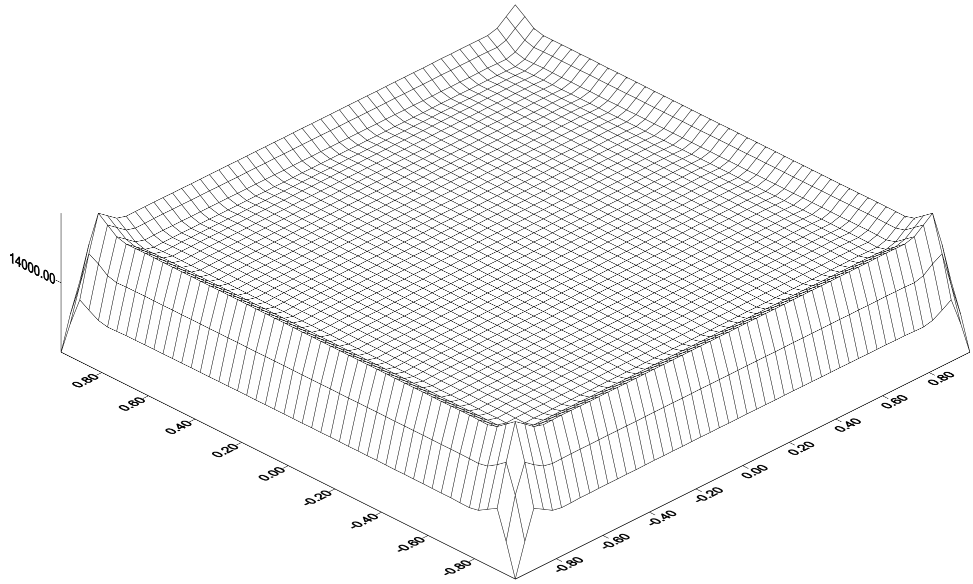

Рис. 2. Відновлення значення потенціалу на пластині S_1

У табл. 1 наведено результати тестового відновлення U в крайніх точках S_1 при $a=1$ і $b=1$ у залежності від значень C_1, C_2 та h. На рис. 2 представлене відновлене значення потенціалу на всій поверхні S_1 у випадку $C_2=-C_1=15000$. Апостеріорний метод покращення точності поблизу границі поверхі описаний в [6].

5. Висновки

Враховування наявної симетрії у граничних поверхнях дозволяє понизити розмірність відповідної системи лінійних рівнянь та, відповідно, суттєво зменшити об'єм обчислень. Апостеріорний метод оцінки похибки дає можливість отримувати розв'язки інтегральних рівнянь з потрібною точністю, що особливо актуально при розв'язуванні граничних задач у суттєво просторовій постановці на незамкнених поверхнях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
2. Ильин В.П., Катешов В.А., Куликов Ю.В., Монастырский М.А. Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем. – Новосибирск: Наука, 1987. – 192 с.
3. Захаров Е.В., Сафронов С.И., Тарасов Р.П. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 2. – № 1. – С. 40-58.

4. Мочурад Л.І., Остудін Б.А. Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. – 2009. – Вип. 2. – С. 105-118.
5. Мочурад Л.І., Остудін Б.А. Дослідження наближених розв'язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку // Праці міжнародного симпозіуму «Питання оптимізації обчислень», Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2009. – Т. 2. – С. 117-122.
6. Garasym Ya.S., Ostudin B.A. A posteriori error estimate for some two-dimensional integral equations of the first kind on unclosed surfaces in potentional theory // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – Vol. 97. – No 1. – Pp. 57-69.
7. Остудін Б.А., Романенко А.В. Математичне моделювання руху великострумного пучка заряджених частинок у самоузгодженому 3D-полі // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2004. – Т. 47. – № 2. – С. 151-162.
8. Garasym Ya.S. Ostudin B.A. On numerical analysis of some two-dimensional integral equation of the first kind in potential theory // Proceedings of the International Conference "Integral Equations-2010" 25-27 August 2010. – Ivan Franko National University of Lviv. – 2010. – P. 45-53.
9. Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Виявлення ефективної методики наближеного розв'язування двовимірних інтегральних рівнянь теорії потенціалу на основі обчислювальних експериментів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2004. – Вип. 9. – С 47-53.

Надійшла – 14.03.2012.