УДК 517.958

Математические модели рассеяния волн экранированными периодическими импедансными решётками

В. Д. Душкин
Академия ВВ МВС Украины, г. Харьков, Украина

Предлагаются две математические модели рассеяния волн экранированными периодическими импедансными решётками. В процессе построения этих моделей применён метод параметрических представлений интегральных преобразований. С помощью применения данного метода исходная краевая задача для уравнения Гельмгольца с краевыми условиями третьего рода была сведена к двум различным системам граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: *краевые задачи, метод параметрических представлений интегральных преобразований, граничные интегральные уравнения.*

Пропонуються дві математичні моделі розсіювання хвиль екранованими періодичними імпедансними гартами. У процесі побудови цих моделей застосований метод параметричних уявлень інтегральних перетворень. За допомогою застосування даного методу вихідна крайова завдання для рівняння Гельмгольця з крайовими умовами третього роду була зведена до двох різних систем граничних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: *крайові задачі, метод параметричних уявлень інтегральних перетворень, граничні інтегральні рівняння.*

Two mathematical models of waves scattering on shielded periodic impedance strips had been proposed. The method of parametric representations of integral transforms had been applied in the process of these models constructing. With the help of this method the initial boundary value problem for the Helmholtz equation with boundary conditions of the third kind had been reduced to two different systems of boundary integral equations.

Key words: *boundary problems, the method of parametric representations of integral transforms, boundary integral equations.*

1. Актуальность проблемы. Истоки исследования

Необходимость учета поглощения энергии в материале при моделировании процессов взаимодействия электромагнитных волн с решетками различной структуры приводит к созданию математических моделей, учитывающих конечную проводимость материалов $[1]$. Математически наличие потерь энергии часто описывается с помощью условия Щукина-Леонтовича на поверхности не идеально ведущих экранов:

$$[n\,E] = -Z_s \cdot [n[n\,H]] \tag{1}$$

где (E,H) – полное электромагнитное поле, Z_s – поверхностный импеданс структуры, n – внешняя нормаль к поверхности. Условие (1) также используется при описании взаимодействия рассеяния электромагнитных волн на сверхпроводящих структурах $[2]$. Эффективным способом построения математических моделей таких процессов стал метод параметрических представлений сингулярных интегральных преобразований $[3]$, $[4]$, который был предложен Ю.В. Ганделем. С помощью данного подхода были построены ряд моделей процессов взаимодействия волн с импедансными структурами $[5]-[8]$. Однако в данных работах не рассматривался случай взаимодействия электромагнитных волн с периодическими структурами. Поэтому построение математических моделей на периодических импедансных многослойных структурах является актуальной задачей для исследователей.

2. Постановка задачи

Дифракционная структура представляет собою $2l'$-периодическую систему, состоящую из бесконечно тонких лент, лежащих в плоскости $z'=0$ и экрана, лежащего в плоскости $z'=-d'$ (см. рис. 1).

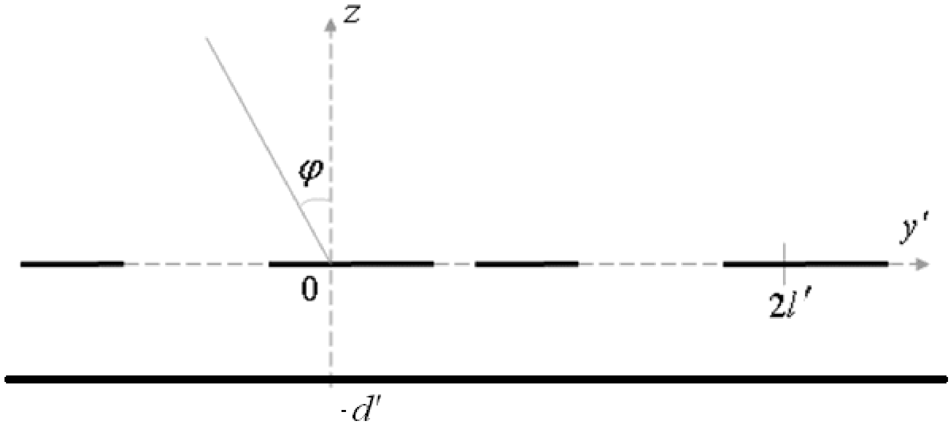

Рис. 1. Сечение электродинамической структуры плоскостью $Y'OZ'$

В силу условий квазипериодичности Флоке решение задачи достаточно найти в слое $0 \le y' \le 2l'$. Введём обозначения: Ω^{+} и Ω^{-}, плюс соответствует области над ленточной структурой, минус соответствует области под ленточной структурой:

$$\Omega^{+} = \left\{ (y', z') \in R^2 \;\middle|\; z' > 0,\ 0 \le y' \le 2l' \right\}, \tag{2}$$

$$\Omega^{-} = \left\{ (y', z') \in R^2 \;\middle|\; -d < z' < 0,\ 0 \le y' \le 2l' \right\}. \tag{3}$$

Пусть из бесконечности сверху на дифракционную структуру наклонно падает плоская монохроматическая Е-поляризованная волна единичной амплитуды (зависимость поля от времени даётся множителем $e^{-i\mu t}$). Компонента поля $E_x(y', z')$ имеет вид:

$$E_x(y', z') = \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin \text{¨} - z' \cdot \cos \text{¨}\right)\right). \tag{4}$$

В задаче необходимо найти полное поле $u(y', z')$, возникшее в результате дифракции волны на решётке.

2. Вывод граничных интегральных уравнений

В работе [9] с помощью метода параметрических интегральных представлений получена система сингулярных интегральных уравнений задачи, которая имеет вид:

$$\frac{1}{\text{®}}\int_L \frac{F_1(t)dt}{t-y} - h\int_{-\infty}^{y} F_1(t)dt + \frac{1}{\text{®}}\int_L K_1(y,t)F_1(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\text{®}}\int_L K_2(y,t)F_2(t)\,dt = f_1(y), \quad y \in L; \qquad (5)$$

$$\int_{\sim_q}^{q} F_1(t)\,dt = 0, \quad (q = 1,\ldots,M); \qquad (6)$$

$$F_2(y) + h\int_{-\infty}^{y} F_1(t)dt - h\frac{1}{\text{®}}\int_L \ln|y-t|\,F_2(t)\,dt +$$

$$+\frac{h}{\text{®}}\int_L K_3(y,t)\cdot F_2(t)dt + \frac{h}{\text{®}}\int_L K_4(y,t)\cdot F_1(t)dt = f_2(y), \quad y \in L. \qquad (7)$$

где $K_i(y,t), \quad i = 1,\ldots,4;$ и $f_i(y), \quad i = 1,2$ – известные функции. В системе (5)-(7) интегрирование происходит по отрезкам, соответствующим лентам.

В этой работе предлагается другой подход, который приводит к системе граничных интегральных уравнений первого рода, ядро которых содержит логарифмическую особенность. Интегрирование в новой системе интегральных уравнений происходит по отрезкам, соответствующим щелям. Выбор одного из двух этих подходов для численного моделирования полей обусловлен различным отношением размеров щелей и лент.

Пусть $u_0(y,z)$ поле, которое существовало бы в случае, когда в плоскости $z = 0$ лежал сплошной экран, обладающий реальной проводимостью. В силу граничных условий Щукина-Леонтовича выполняется равенство:

$$\frac{\partial u_0(y,0)}{\partial z} - hu_0(y,0) = 0, \quad y \in R. \qquad (8)$$

Поле $u_0(y,z)$ имеет вид:

$$u_0(y,z) = \exp\{ik(y\cdot\sin\text{¨} - z\cdot\cos\text{¨})\} + \frac{i\text{©}\cos\text{¨} + h}{i\text{©}\cos\text{¨} - h}\cdot\exp\{ik(y\cdot\sin\text{¨} + z\cdot\cos\text{¨})\}. \qquad (9)$$

Полное поле $u(y',z')$ будем искать в виде:

$$u(y',z') = \begin{cases} u_0(y',z') + u^+(y',z'), & (y',z') \in \Omega^+; \\ u^-(y',z'), & (y',z') \in \Omega^-. \end{cases} \qquad (10)$$

На поверхности лент и экране, лежащем в плоскости $z' = -d'$, полное поле удовлетворяет граничным условиям Щукина-Леонтовича:

$$\frac{\partial u}{\partial n'}(y,0)-h'u(y,0)=0,\quad y\in L',\quad \frac{\partial u}{\partial n'}(y,-d')-h'u(y,-d')=0,\quad y\in R, \qquad (11)$$

где n' – внешняя нормаль к поверхности структуры.

Поле $u^{+}(y',z')$ в области Ω^{+} ищем в виде:

$$u^{+}(y',z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{+}\cdot\frac{e^{-\yen'_n z'}}{\yen'_n+h'}\cdot e^{i\cdot p'_n y'}, \qquad (12)$$

где

$$p'_n=k\cdot\sin\ddot{}\ +\frac{\circledR n}{l},\ \yen'_n=\sqrt{\left(p'_n\right)^2-k^2},\quad n\in Z; \qquad (13)$$

$$\mathrm{Re}\left(\yen'_n\right)\ge 0,\quad \mathrm{Im}\left(\yen'_n\right)\le 0,\quad n\in Z. \qquad (14)$$

Поле $u^{-}(y',z')$ в области Ω^{-} ищем в виде:

$$u^{-}(y',z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-}\cdot Z_n^{-}\left(z'\right)\cdot e^{i\cdot p'_n y'}, \qquad (15)$$

где функции $Z_n^{-}(z)$ имеют вид

$$Z_n^{-}\left(z'\right)=\frac{h'\cdot sh\left(\yen'_n\left(z'+d'\right)\right)+\yen'_n\cdot ch\left(\yen'_n\left(z'+d'\right)\right)}{2h'\yen'_n\cdot ch\left(\yen'_n d'\right)+\left(\left(\yen'_n\right)^2+\left(h'\right)^2\right)\cdot sh\left(\yen'_n d'\right)} \qquad (16)$$

и обладают свойствами:

$$\frac{\partial Z_n^{-}}{\partial z'}\left(0\right)+h'\cdot Z_n^{-}\left(0\right)=\frac{\circledR}{l'},\quad \frac{\partial Z_n^{-}}{\partial z'}\left(-d'\right)-h'\cdot Z_n^{-}\left(-d'\right)=0,\quad n\in Z, \qquad (17)$$

$$Z_n^{-}\left(0\right)=1+O\left(\frac{1}{\yen'_n}\right),\quad n\to\infty. \qquad (18)$$

Пусть $\sim'_q$ и $\ '_q$ – игрековые координаты левого и правого края щели. Введём безразмерные координаты и параметры:

$$\partial\ell=\frac{l'k}{\circledR}=\frac{2l'}{\text{a}},\quad y=\frac{\circledR}{l'}y',\ z=\frac{\circledR}{l'}z',\ h=\frac{l'\cdot h'}{\circledR},\ d=\frac{l'\cdot d'}{\circledR}; \qquad (19)$$

$$p_n=\frac{l'\cdot p'_n}{\circledR}=\partial\ell\cdot\sin\ddot{}\ +n,\ \yen_n=\frac{l'\yen'_n}{\circledR},\quad n\in N; \qquad (20)$$

$$\sim_q=\frac{\circledR}{l'}\sim'_q,\qquad {}_q=\frac{\circledR}{l'}\ '_q,\quad q=1,\ldots,M; \qquad (21)$$

$$\mathrm{L}=\left\{\mathrm{y}\in\mathrm{R}\;\middle|\; y\in\bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M}(\sim_q,\ \ _q),\ 0<\sim_1<\ \ _1<\ldots<\sim_q<\ \ _q<2\circledR\right\}. \qquad (22)$$

Граничные условия Щукина-Леонтовича на поверхности лент представимы в виде:

$$\frac{\partial u^{+}}{\partial z}(y,0)-hu^{+}(y,0)=0,\quad y\in CL=\left[0,2\circledR\right]\setminus L; \qquad (23)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial z}(y,0)+hu^-(y,0)=0,\quad y\in CL. \qquad (24)$$

Введём в рассмотрение функции:

$$F^+(y)=\frac{\partial u^+(y,0)}{\partial z}-hu^+(y,0)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^+\cdot e^{i\cdot p_n y}; \qquad (25)$$

$$F^-(y)=\frac{\partial u^-(y,0)}{\partial z}+hu^-(y,0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^-\cdot e^{i\cdot p_n y}. \qquad (26)$$

В силу (20), (21) функции $F^+(y)$ и $F^-(y)$ обладают свойствами:

$$F^+(y)=0,\quad F^-(y)=0,\quad y\in CL. \qquad (27)$$

Используя определения (22), (23) и свойства функций $F^+(y)$ и $F^-(y)$, находим:

$$a_n^+=-\frac{1}{2\circledR}\int_L F^+(t)\cdot\exp(-ip_n t)dt,\quad n\in Z, \qquad (28)$$

$$a_n^-=\frac{1}{2\circledR}\int_L F^-(t)\cdot\exp(-ip_n t)dt,\quad n\in Z. \qquad (29)$$

Следствием непрерывности поля в щелях между лентами являются соотношения:

$$u_0(y,0)+u^+(y,0)=u^-(y,0),\quad y\in L; \qquad (30)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial z}(y,0)=\frac{\partial u^-}{\partial z}(y,0),\quad y\in L. \qquad (31)$$

Последнее соотношение также можно представить в виде:

$$F^-(y)=F^+(y)+2hu^+(y,0)+2hu_0(y,0) \qquad (32)$$

В результате подстановки интегральных представлений (28),(29) для коэффициентов a_n^+ и a_n^- в (12),(15) и проведения интегральных преобразований получаем:

$$u^+(y,0)=\frac{1}{\circledR}\int_L \exp\left(ik\cdot\sin\ddot{}\,(y-t)\right)\cdot\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|\cdot F^+(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\circledR}\int_L\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta_n^+ e^{i\cdot p_n(y-t)}\cdot F^+(t)\,dt; \qquad (33)$$

$$u^-(y,0)=-\frac{1}{\circledR}\int_L \exp\left(ik\cdot\sin\ddot{}\,(y-t)\right)\cdot\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|F^-(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\circledR}\int_L\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta_n^- e^{i\cdot p_n(y-t)}F^-(t)\,dt; \qquad (34)$$

где

$$\Delta_0^+ = \frac{1}{\gamma_0 + h}\,, \quad \Delta_n^+ = \frac{1}{\gamma_n + h} - \frac{1}{|n|}, \quad n \in Z/\{0\} \quad \Delta_n^+ = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty\,; \qquad (35)$$

$$\Delta_n^- = Z_0^-(z)\,, \quad \Delta_n^- = Z_n^-(z) - \frac{1}{|n|}, \quad n \in Z/\{0\} \qquad \Delta_n^- = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty\,. \qquad (36)$$

Из (30)-(34) следует справедливость соотношений:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \ln|y-t| \cdot F^+(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_L \ln|y-t| F^-(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_L Q^+(y,t)\cdot F^+(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_L Q^-(y,t) F^-(t)\,dt = -u_0(y,0)\,, \qquad (37)$$

$$F^-(y) = F^+(y) + \frac{2h}{\pi}\int_L \ln|y-t|\cdot F^+(t)\,dt + \frac{2h}{\pi}\int_L Q^+(y,t)\cdot F^+(t)\,dt + 2hu_0(y,0)\,, \quad (38)$$

где

$$Q^\pm(y,t) = \exp(ik\cdot\sin\theta\,(y-t))\ln\left(2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right) - \ln|y-t| - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta_n^\pm e^{i\cdot p_n(y-t)}\,. \qquad (39)$$

В результате подстановки в (37) вместо $F^-(y)$ правой части равенства (39), получаем систему интегральных уравнений первого рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \ln|y-t|\cdot F^+(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_L K(y,t)\cdot F^+(t)\,dt = f_3(y), \quad y \in L\,, \qquad (40)$$

где

$$K(y,t) = \frac{1}{2}\left(Q^+(y,t) + Q^+(y,t)\right) +$$

$$-\frac{h}{\pi}\exp(ik\cdot\sin\theta\,(y-t))\int_L \ln\left|2\cdot\sin\frac{y-s}{2}\right|\cdot\left(\ln\left|2\cdot\sin\frac{s-t}{2}\right| - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta_n^+ e^{i\cdot n(s-t)}ds\right)ds +$$

$$+\frac{h\cdot\exp(ik\cdot\sin\theta\,(y-t))}{2\pi}\int_L \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta_n^- e^{i\cdot n(y-s)}\left(\ln\left|2\cdot\sin\frac{t-s}{2}\right| - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta_n^+ e^{i\cdot n(s-t)}\right)ds \quad (41)$$

и

$$f_3(y) = -\frac{1}{2}u_0(y,0) -$$

$$-\frac{h}{2\pi}\int_L \exp(ik\cdot\sin\theta\,(y-t))\left(\ln\left(2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta_n^- e^{i\cdot p_n(y-t)}\right)u_0(t,0)\,dt\,. \qquad (42)$$

Система интегральных уравнений (40) отличается от систем интегральных уравнений задач дифракции Н-поляризованной волн на периодической идеально проводящей системе лент лишь видом гладкой части ядра интегрального оператора. Поэтому для дальнейшего численного решения этой задачи можно использовать алгоритм, применяемый для численного исследования идеально проводящих структур.

3. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложено два подхода построения математических моделей дифракции электромагнитных волн на экранированной периодической импедансной системе лент. В результате применения первого подхода получена система интегральных уравнений (5)-(7). В результате применения второго подхода получена система интегральных уравнений (40). Численное решение полученных СИУ осуществляется с помощью одной из модификаций МДО [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский А.С, Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983, 231 с.
2. Кравченко В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006, 280 с.
3. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев: институт математики НАН Украины, 1995. – С. 65-66.
4. Gandel' Yu.V. Parametric representations of integral and psevdodifferential operators in diffraction problems // Conf. Proc., 10th Int.Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14-17, 2004, P. 57-62.
5. Ю.В.Гандель, В.Ф.Кравченко, Н.Н.Морозова Дифракция электромагнитных волн на решётке из тонких сверхпроводящих лент // Электромагнитные волны и электронные системы. – М.: Радиотехника. Электромагнитные волны и электронные системы, т. 2, № 2, 1997, С. 14-26.
6. Гандель Ю.В. Сидельников Г.Л. Метод интегральных уравнений в третьей краевой задаче дифракции на ограниченной решетке над плоским экраном. // Дифференциальные уравнения. – Т.35, № 9, 1999. – С. 1155-1161.
7. В.Д. Душкин Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов // Доп. НАН України. – 1999. – №9 – С. 11-15.
8. В.Д. Душкин Математические модели дифракции электромагнитных волн на системе не идеально проводящих экранов // Вестник Харк. нац. ун-та. – 2011. – №.960. – С.120-131. – (Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 16).
9. Душкин В.Д.Математическое моделирование рассеяния волн экранированной периодической не идеально проводящей решёткой. // Труды Научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях». – Харьков, 2012. (статья принята к печати).
10. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520с.

Надійшла – 05.03.2012.