УДК 517.946.9

Задача Стефана зі змінним у часі джерелом тепла

О. Б. Кобильська, В. П. Ляшенко
Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського, Украина

У статті розглядається крайова задача для рівняння теплопровідності з рухомою за заданим законом межею з постійно діючим змінним у часі джерелом тепла. Отримано розв’язок задачі методом випрямлення фронтів. Проведені числові розрахунки температурних розподілів.

Ключові слова: *крайова задача, рухома межа, метод випрямлення фронтів.*

В статье рассматривается краевая задача для уравнения теплопроводности с движущейся по заданному закону границей с постоянно действующим переменным во времени источником тепла. Получено решение задачи методом выпрямления фронтов. Проведены численые расчеты температурных распределений.

Ключевые слова: *краевая задача, движущияся граница, метод выпрямления фронтов.*

In the paper we consider the boundary value problem for the equation of heat conductivity with moving border under the set law in the presence of constantly operating time-varying source of heat. The solution of a problem is received by a method of straightening the front. Numerical investigation of temperature distributions are carried out

Key words: *boundary value problem, moving border, method of straightening the fronts.*

1. Загальна постановка питання і його актуальність

У порошковій металургії виробництво стрижнів та дроту із тугоплавких металів, наприклад вольфраму, відбувається одночасно з процесом підігрівання металу. Це викликано тим, що більшість тугоплавких металів не деформується при кімнатній температурі. Перед пластичною деформацією дріт, що рухається через зону нагрівання довжиною $\P(T) = L - v(t)t$ зі швидкістю $v(t) \neq 0$, розігрівається електричним струмом I_0 до технологічної температури T_l, а потім потрапляє у пристрій для деформування. При цьому до одного кінця зони нагрівання підведений нерухомий струмопідвід, а до іншого рухомий.

Розглянемо дріт у вигляді рухомого ізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками, що рухається через зону нагрівання зі швидкістю $v(t) \neq 0$. В такому випадку маємо початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності в області з рухомою межею у якій діє джерела тепла, що змінюється у часі Такого типу задачу можна віднести до задачі Стефана з рухомою межею без зміни фазового стану середовища [1].

2. Витоки дослідження авторів

Розв’язку крайових задач у області з рухомою межею де досліджується зміна фазового стану на межі двох середовищ присвячено багато робіт [1-7]. У випадку необмеженого часу протікання процесу при певних обмеженнях розв’язок задачі можна отримати методом теплових потенціалів. Чисельні методи виявляються найбільш універсальними при розв’язанні задач з рухомою межею та обмеженому часі протікання процесу.

3. Не розв’язані питання і мета роботи

Для рухомих середовищ задачі з рухомою межею зустрічаються досить рідко[2, 6]. Такі задачі можна звести до задач Стефана та застосувати відповідні методи розв’язання. Метою роботи є отримання розв’язку крайової задачі для рівняння теплопровідності із рухомою за заданим законом межею в середовищі з неперервно діючим змінним джерелом тепла.

4. Застосування методу і його програмна реалізація

Для визначення температурного поля розглядається задача для лінійного рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат $(r, \text{¨}, z)$ у області $\Omega:\ \{0<z<\text{¶}(t),\quad 0<r<r_0\quad 0<t\le t_0\}$. Зважаючи на фізичну природу джерел тепла $w(T,t)$ та симетрію поля по ¨ маємо задачу

$$\text{ª}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\text{ª}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-v(t)c\text{°}_n\frac{\partial T}{\partial z}-c\text{°}_n\frac{\partial T}{\partial t}=-w(T,t), \qquad (1)$$

$$T(r,z,0)=T_0, \qquad (2)$$

$$T(r,0,t)=T_0,\ \ T(r,\text{¶}(t),t)=T_l, \qquad (3)$$

$$\text{ª}\frac{\partial T(r_0,z,t)}{\partial r}=-\text{\~{}}(T-T_c)-\text{£±}(T^4-T_c^4), \qquad \frac{\partial T(0,z,t)}{\partial r}=0, \qquad (4)$$

де $w(T,t)=\dfrac{I(t)(1+\ \ T)}{\text{®}^2 r_0^4}$, ª, c, °_0, °_n, £ – теплофізичні характеристики циліндра, T_c – температура навколишнього середовища, ± – стала Стефана-Больцмана, $v(t)$ – швидкість руху середовища через зону нагрівання. Час t_0 визначається із умови $L-v(t)t=0$. Функції $w(T,t)$, $v(t)\in C^1$ – неперервні додатно визначені.

5. Хід розв’язку задачі

Якщо температурний розподіл уздовж радіуса циліндра не суттєвий, то можна перейти до розгляду усередненого температурного поля. При цьому враховується теплообмін поверхні з навколишнім середовищем [6].

Застосувавши до рівняння (1) оператор усереднення

$$u(z,t)=\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0}T(r,z,t)\,rdr \qquad (5)$$

та врахувавши умови теплообміну на границі області (4) отримаємо задачу

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^{-}(t) + ¡(t) - · \left(u^4 - T_c^4\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6}$$

$$0 < z < ¶(t) = L - v(t)t, 0 \le t \le t_0,$$

$$u(z,0) = T_0, \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(¶(t),t) = T_l, ¶(t) = L - v(t)t, \tag{8}$$

$$¡(t) = \frac{I(t)^2 °_0 + 2\sim T_c ®^2 r_0^3}{®^2 r_0^4 c °_n}, \quad ^{-}(t) = \frac{I(t)^2 °_0 - 2\sim ®^2 r_0^3}{®^2 r_0^4 c °_n}, \quad · = \frac{2£±}{r_0 c °_n}, \quad a^2 = \frac{ª}{c °_n},$$

Задачу (6)-(8) розв’язуємо методом випрямлення фронтів. Для цього введемо заміну змінної $¦ = \frac{x}{¶(t)}$. Після заміни рухома одномірна область $\left[0;¶(t)\right]$ відображається у відрізок $[0;1]$, а змінна область з рухомою межею $0 < z < ¶(t) = L - v(t)t, 0 \le t \le t_0$ – у прямокутну область $0 < ¦ < 1, 0 \le t \le t_0$. Задача (6)-(8), щодо визначення функції $u(x,t) = u(¦,t)$, із врахуванням залежності $¦$ від змінних x,t та наступних співвідношень

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial ¦}\frac{\partial ¦}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{¦}{¶(t)}\frac{\partial ¶}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial ¦}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{¶(t)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial ¦^2},$$

трансформується і приймає вигляд

$$a^2 \frac{1}{¶^2}\frac{\partial^2 u}{\partial ¦^2} + \frac{¦}{¶}\frac{d¶}{dt}\frac{\partial u}{\partial ¦} + u^{-}(t) + ¡(t) - · (u^4 - T_c^4) = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{9}$$

$$0 < ¦ < 1, 0 < t \le t_0,$$

$$u(z,0) = T_0, \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = T_l, \tag{11}$$

$$¡(t) = \frac{I(t)^2 °_0 + 2\sim T_c ®^2 r_0^3}{®^2 r_0^4 c °_n}, \quad ^{-}(t) = \frac{I(t)^2 °_0 - 2\sim ®^2 r_0^3}{®^2 r_0^4 c °_n}, \quad · = \frac{2£±}{r_0 c °_n}, \quad a^2 = \frac{ª}{c °_n}.$$

Після перетворення розв’язок задачі шукаємо в прямокутній області. Будуємо різницеву схему в сітковому просторі функцій. Введемо в області $0 \le ¦ \le 1, 0 \le t \le t_0$ рівномірну за часом сітку $\left\{¦_i = ih, i = 0,......n; ¦_0 = 0, ¦_n = 1, h > 0\right\}$, $\left\{t_j = j², j = 0,.....j_0, ² > 0\right\}$.

Задачу (9)-(11) замінимо наступною різницевою задачею у сітковому просторі

$$a^2 \frac{1}{\P_j^2} \frac{\overset{s+1}{u}_{i+1} - 2\overset{s+1}{u}_i + \overset{s+1}{u}_{i-1}}{h^2} + \frac{¦_i}{\P_j} \frac{\P_j - \P_{j-1}}{2} \frac{\overset{s}{u}_{i+1} - \overset{s}{u}_{i-1}}{2h} + \overset{s}{u}_i -(t) + ¡(t) - \cdot (\overset{s}{u}_i{}^4 - T_c^4) = \frac{\overset{s+1}{u}_i - \breve{u}_i}{2}, \quad (12)$$

$$0 < ¦ < 1, 0 \le t \le t_0,$$

$$\overset{s}{u}_0 = T_0, \quad (13)$$

$$\overset{s+1}{u}_0 = \overset{s+1}{u}_n = T_l, \quad (14)$$

$$¡(t) = \frac{I(t)^2 \circ_0 + 2\sim T_c ® ^2 r_0^3}{®^2 r_0^4 c \circ_n}, \quad -(t) = \frac{I(t)^2 \circ_0 - 2\sim ®^2 r_0^3}{®^2 r_0^4 c \circ_n}, \quad \cdot = \frac{2£±}{r_0 c \circ_n}, \quad a^2 = \frac{a}{c \circ_n},$$

$s+1$ ітерацію знаходимо використовуючи метод прогонки.

В умовах, коли зона нагрівання весь час зменшується та прямує до нуля, а температура в кінці зони нагрівання повинна залишатися сталою виникає проблема керування температурним полем, що полягає у визначенні потужності джерел тепла $w(T,t) = \frac{I(t)^2 \circ_0 (1+ \quad T)}{®^2 r_0^4}$. Тому для підтримки сталого значення температури необхідно керувати основним параметром $w(T,t)$ – силою струму $I(t)$. Значення невідомої функції часу $I(t)$ (параметру керування) знаходиться на дискретній множині t_j, $j = 1...n$ точок у вигляді I_j. За допомогою інтерполяції сплайнами отримуємо функцію $I(t)$, яка дозволяє підтримувати необхідний температурний режим. При цьому кожна задача розглядалася на відрізку з постійно діючим сталим джерелом тепла. У якості додаткової умови залучалася інтегральна умова(15), що визначає баланс енергії зони нагрівання.

$$\int_{0+}^{t_0}\int_{0+}^{r_0}\int_{0}^{l} \frac{I(t)^2 \circ_0 l + \quad I(t)^2 \circ_0 l T(r,z,t)}{v(t) r_0^4 ®^2} dz dr dt = c \circ_n \int_{0+}^{t}\iint_G (T(r,z,t) - T_0) dg dt +$$
$$+ r_0 \sim l \int_{0+}^{t_0}\int_{0}^{r_0}\int_{0}^{l} \frac{T(r,z,t) - T_c}{v(t)} dz dr dt. \quad (15)$$

При застосуванні умови (15) вважалося, що температурний розподіл $T(r,z,t)$ відомий, підставивши його у (15) можемо визначити будь-який параметр керування температурним полем. Керування $I(t)$ проводилося згідно з вимогою мінімізації відхилень в інтегральній умові після підстановки у неї отриманої модельної температурної функції, що задовольняє (1) – (4).

Процес знаходження параметра керування $I(t)$ розпочинається із апріорного задання початкового наближення функції $I(t)$ – сталого значення I_0, задання якого достатньо для того, щоб задача (1) – (4) стала прямою задачею теплопровідності. Його знайдемо, прийнявши в (1) $a = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

На рисунку 1 зображені температурні розподіли уздовж змінної довжини циліндра для різних моментів часу при значеннях параметра джерела тепла, отриманих із розв'язку оберненої задачі до задачі (1)–(4) [6]. Параметр джерела тепла, що є параметром керування температурним полем визначається так, що із зменшенням зони нагрівання температура у кінці зони нагрівання, яка з часом зменшується, залишається сталою.

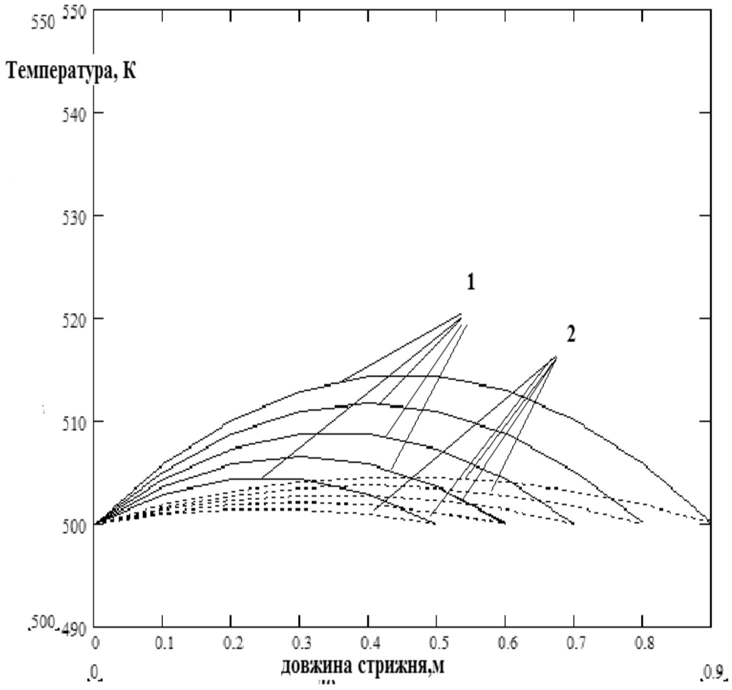

Рис. 1. Температурні розподіли, уздовж координати z, отримані із розв'язку задачі (1)-(4)

Суцільні криві 1 – температурні розподіли отримані при значенні струму $I_1(t)$

Пунктирні криві 2 – температурні розподіли отримані при значенні струму $I_2(t) < I_1(t)$.

Для розрахунків були взяті значення теплофізичних характеристик для матеріалу вольфрам.

6. Висновки

У вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності з рухомою за заданим законом межею побудовано математичну модель температурного поля стрижня циліндричної форми, що розігрівається внутрішнім постійно діючим залежним від часу джерелом тепла. Шляхом уведення заміни змінних криволінійна область зі змінною межею трансформована у прямокутну. Методом випрямлення фронтів отримано розв'язок крайової задачі, що описує температурний розподіл у середовищі з рухомою за заданим законом межею.

ЛІТЕРАТУРА

1. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами / Э.М. Карташов, Б.Я. Любое // Изв. АН СССР. Сер. энергетика и транспорт. – 1974. – № 6. – С. 83-111.
2. Крупин А.В. Пластическая деформация тугоплавких металлов / А.В.Крупин, В.Я. Соловьев – М.: Металлургия, 1971. – 352с.
3. Березовський С.А. Однофазные задачи Стефана в проблемах конденсации./ Березовський С.А., Комаров Г.Н., Яницкая Л.Н. // Тр. IX Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Орел (Россия), 2000. – С. 482-486.
4. Березовський А.А. Метод Роте в задачах з вільною межею при конденсації та випаровуванні. / А.А.Березовський, Г.Н.Комаров, Л.Н.Яницкая // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – 1998.– Вип. 1 – К.: Ін-т математики НАН України. – С. 3-12.
5. Базалій Б.В. Дехтярев С.П. О задаче Стефана с кинетическим и классическим условием на свободной границе/УМЖ. – 1992. – т. 44, №2. – С. 155-166.
6. Ляшенко В.П. Задача типу Стефана для циліндричної області / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – випуск 12. – С. 122-127.
7. Ляшенко В.П. Modeling and automation of temperature processes in powder metallurgy / Ляшенко В.П., Кирилаха Н.Г., Григорова Т.А., Настенко О.І. // Вестник национального технического университета «ХПИ», Харьков: ХПИ. – 2007. – Вып. 6/2007. – С. 35-41.

Надійшла – 01.02.2012.