УДК 519.6

Оператори кусково-сталої сплайн-інтерлінації та 2D коефіцієнти Фур'є на класі Гьольдера

О. П. Нечуйвітер
Українська інженерно-педагогічна академія, Україна

В статті побудовані кубатурні формули наближеного обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації на класі Гьольдера. Інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задана як слідами функції на взаємно-перпендикулярних лініях, так і значеннями функції в точках. Отримані оцінки похибки запропонованих кубатурних формул.

Ключові слова: *сплайн-інтерлінація, 2D коефіцієнти Фур'є, кубатурні формули.*

В статье построены кубатурные формулы приближенного вычисления 2D коэффициентов Фурье, которые используют в своем построении операторы кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации функций на классе Гельдера. Информация о неосциллирующем множителе подинтегральной функции задана как следами функции на взаимно-перпендикулярных линиях, так и значениями функции в точках. Получены оценки погрешности приближения предложенных кубатурных формул.

Ключевые слова: *сплайн-интерлинация, 2D коэффициенты Фурье, кубатурные формулы.*

In the paper the formulas of the evaluating of 2D Fourier's coefficients with using spline-interlineation were submitted. Cubature formulas are investigated in the case when information about function is set of values on the lines, set of knots on the Gelder's class. The estimation of error of approaching of cubature formulas are presented.

Key words: *spline-interlineation, 2D Fourier's coefficients, cubature formulas.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Сучасні задачі цифрової обробки сигналів вимагають вміння наближено обчислювати інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній, що перетинають досліджуваний об'єкт. Зокрема, задачу наближеного обчислення 2D – коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли вхідна інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації функцій [1] відповідно на різних класах функцій. Однією з недосліджених задач є обчислення 2D – коефіцієнтів Фур'є за допомогою операторів куско-сталої сплайн-інтерлінації на класі Гьольдера у випадку, коли інформація про функцію $f(x,y)$ задається як її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих, так і значеннями функції в точках.

2. Дослідження авторів

В [2]-[4] розглядалась задача наближеного обчислення 2D – коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про функцію $f(x,y)$ задається слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих, але вона розв'язувалась на класі диференційовних функцій. В [5] розглядалась побудова кубатурних формул обчислення 2D – коефіцієнтів Фур'є на класі Ліпшиця за допомогою оператора кусково-сталої інтерполяції, побудованого з використанням кусково-сталої інтерлінації у випадку, коли інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задається значеннями функції в точках. Однак актуальним є питання дослідження кубатурних формул на більш широкому класі функцій – на класі Гьольдера.

3. Нерозв'язані проблеми та цілі роботи

Обчислити наближено 2D – коефіцієнти Фур'є за допомогою кубатурних формул з використанням інтерлінації функцій на класі $C^2_{2,L,\sim}$, $0 < \sim \le 1$ – клас дійсних функцій двох змінних, визначених на $G = [0,1]^2$ і таких, що задовольняють наступним умовам Гьольдера:

$$\left| f(x_1,y) - f(x_2,y) \right| \le L|x_1 - x_2|^{\sim}, \quad \left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le L|y_1 - y_2|^{\sim},$$

$$\left| f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_2,y_2) \right| \le \tilde{L}|x_1 - x_2|^{\sim} |y_1 - y_2|^{\sim},$$

у випадку, коли інформація про функцію задана як її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих, так і значеннями функції в точках Отримати оцінку похибки побудованих кубатурних формул.

4. Обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій

Введемо позначення:

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ell}; \qquad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1,\ell},$$

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \; Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k,j = \overline{1,\ell}, \quad \Delta = 1/\ell.$$

Означення. Під слідом функції $f(x,y)$ на лінії розуміємо функцію однієї змінної, яка збігається з $f(x,y)$ у точках цієї лінії, наприклад,

$$f(x_k, y), \; 0 \le y \le 1, \quad f(x, y_j), \; 0 \le x \le 1.$$

Нехай $Jf(x,y)$ – оператор-інтерлінант

$$Jf(x,y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y),$$

для якого виконуються властивості [1]:

1. $Jf(x_k, y) = f(x_k, y), \quad k = \overline{1,\ell}, \quad Jf(x, y_j) = f(x, y_j), \quad j = \overline{1,\ell}$

2. $\left| f(x,y) - Jf(x,y) \right| = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right) = O(\Delta^2), \quad \forall (x,y) \in G.$

Для обчислення інтегралів $I_k^2(m,n)$, $k = 1,2,3$,

$$I_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin 2\circledR mx\sin 2\circledR nydxdy,$$
$$I_2^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\cos 2\circledR mx\cos 2\circledR nydxdy,$$
$$I_3^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{-i2\circledR mx}e^{-i2\circledR ny}dxdy$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y)\sin 2\circledR mx\sin 2\circledR nydxdy,$$
$$\Phi_2^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y)\cos 2\circledR mx\cos 2\circledR nydxdy,$$
$$\Phi_3^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y)e^{-i2\circledR mx}e^{-i2\circledR ny}dxdy.$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерлінанта $Jf(x,y)$ та отримаємо явний вигляд відповідних кубатурних формул, наприклад:

$$\Phi_1^2\left(m,n\right)=\sum_{k=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\sin 2\circledR mxdx\int_0^1 f(x_k,y)\sin 2\circledR nydy+$$
$$+\sum_{j=1}^{\ell}\int_0^1 f(x,y_j)\sin 2\circledR mxdx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\sin 2\circledR nydy-$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j)\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\sin 2\circledR mxdx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\sin 2\circledR nydy\,.$$

Теорема 1. Нехай функція $f(x,y)\in C^2_{2,L,\sim}$ задана $N=2\ell$ слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих $f\left(x_k,y\right),\ k=\overline{1,\ell},\quad f\left(x,y_j\right),\ j=\overline{1,\ell}$ в області $G=[0,1]^2$. Тоді кубатурна формула $\Phi_1^2\left(m,n\right)$для обчислення інтеграла $I_1^2\left(m,n\right)$ має наступну оцінку похибки при $\ell>2\circledR\max\left\{m,n\right\}$:

$$\left|I_1^2\left(m,n\right)-\Phi_1^2(m,n)\right|\le\frac{\tilde{L}}{\left(\sim+1\right)^2 2^{2\sim}}\frac{1}{\ell^{2\sim}}\,.$$

Доведення. Введемо оператори

$$J_1 f(x,y) = \sum_{k=1}^{\ell} f\left(x_k, y\right) h_{0k}(x),\ k = \overline{1,\ell}, \quad J_2 f(x,y) = \sum_{j=1}^{\ell} f\left(x, y_j\right) H_{0j}\left(y\right),\ j = \overline{1,\ell},$$

тоді для оператора-інтерлінанта $Jf(x,y)$ справедлива тотожність

$$Jf = \left(J_1 + J_2 - J_1 J_2\right) f \ .$$

Для кожної функції $f(x,y)$ виконується оцінка

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x,y) - Jf(x,y) \right) \sin 2® mx \sin 2® ny dxdy \right| \le$$

$$\le \int_0^1 \int_0^1 \left| f(x,y) - Jf(x,y) \right| dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \left| f(x,y) - \left(J_1 + J_2 - J_1 J_2\right) f\left(x,y\right) \right| dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| f\left(x,y\right) - f\left(x_k, y\right) - f\left(x, y_j\right) + f\left(x_k, y_j\right) \right| dxdy \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{L} \left| x - x_k \right|^{\sim} \left| y - y_j \right|^{\sim} dxdy =$$

$$= \tilde{L} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \left(- \frac{\left(x_k - x\right)^{\sim+1}}{\sim+1} \Bigg|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k} + \frac{\left(x - x_k\right)^{\sim+1}}{\sim+1} \Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \right) \times$$

$$\times \left(- \frac{\left(y_j - y\right)^{\sim+1}}{\sim+1} \Bigg|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j} + \frac{\left(y - y_j\right)^{\sim+1}}{\sim+1} \Bigg|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$= \tilde{L} \ell^2 \frac{\Delta^{\sim+1}}{(\sim+1) 2^{\sim}} \frac{\Delta^{\sim+1}}{(\sim+1) 2^{\sim}} = \frac{\tilde{L}}{(\sim+1)^2 2^{2\sim}} \frac{1}{\ell^{2\sim}} \ .$$

Теорема 1 доведена.

5. Обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерполяції на основі кусково-сталої інтерлінації

Введемо позначення:

$$\tilde{X}_{\tilde{k}} = \left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2} \right], \ \tilde{Y}_{\tilde{j}} = \left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2} \right],$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \tilde{X}_{\tilde{k}} \\ 0, x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1,\ell^2}; \quad \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1,\ell^2},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1,\ell^2},\quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Нехай $\tilde{J}f(x,y)$ – оператор-інтерполянт, побудований на основі сплайн-інтерлінанта $Jf\left(x,y\right)$:

$$\tilde{J}f\left(x,y\right) = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} f\left(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}\right) h_{0k}\left(x\right)\tilde{H}_{0\tilde{j}}\left(y\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j\right)\tilde{h}_{0\tilde{k}}\left(x\right)H_{0j}\left(y\right) - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f\left(x_k, y_j\right) h_{0k}\left(x\right)H_{0j}\left(y\right),$$

для якого виконуються властивості [1]:

1. $\tilde{J}f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j\right) = f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j\right),\quad \tilde{k} = \overline{1,\ell^2},\quad j = \overline{1,\ell},$

   $\tilde{J}f\left(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}\right) = f\left(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}\right),\quad j = \overline{1,\ell^2},\quad k = \overline{1,\ell};$

2. $\left|f(x,y) - \tilde{J}f(x,y)\right| = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right) = O\left(\Delta^2\right),\ \forall\left(x,y\right)\in G.$

Для обчислення інтегралів $I_k^2\left(m,n\right),\ k = 1,2,3$ пропонуються формули:

$$\tilde{\Phi}_1^2(m,n) = \int_0^1\int_0^1 \tilde{J}f(x,y)\sin 2® mx \sin 2® ny dxdy,$$

$$\tilde{\Phi}_2^2(m,n) = \int_0^1\int_0^1 \tilde{J}f(x,y)\cos 2® mx \cos 2® ny dxdy,$$

$$\tilde{\Phi}_3^2(m,n) = \int_0^1\int_0^1 \tilde{J}f(x,y)e^{-i2® mx}e^{-i2® ny} dxdy.$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерполянта $\tilde{J}f(x,y)$ та отримаємо явний вигляд відповідних кубатурних формул, наприклад:

$$\tilde{\Phi}_1^2(m,n) = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2® mx dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \sin 2® ny dy +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \sin 2® mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2® ny dy -$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2® mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2® ny dy .$$

Теорема 2. Нехай $f(x,y)\in C^2_{2,L,\sim}$ та значення $f_{kj}=f\left(x_k,y_j\right)$, $k=\overline{1,m_1}$, $j=\overline{1,m_2}$ задані не більше ніж $Q=m_1m_2$, $m_1=m_2=\ell^2$, $Q=\ell^4$ фіксованих вузлових точках $\left(x_k,y_j\right)\in G$. Тоді кубатурна формула $\tilde{\Phi}^2_1(m,n)$ для обчислення інтеграла $\tilde{I}^2_1(m,n)$ має наступну оцінку похибки при $\ell>2\text{®}\max\{m,n\}$:

$$\left|I^2_1(m,n)-\tilde{\Phi}^2_1(m,n)\right|\le\frac{\tilde{L}+(\sim+1)2^{\sim+1}L}{(\sim+1)^2\,2^{2\sim}}\frac{1}{\ell^{2\sim}}.$$

Доведення. Введемо оператори

$$J_1f(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell}f\left(x_k,y\right)h_{0k}(x),\quad J_2f(x,y)=\sum_{j=1}^{\ell}f\left(x,y_j\right)H_{0j}(y),$$

$$\tilde{J}_1f(x,y)=\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y\right)\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x),\quad \tilde{J}_2f(x,y)=\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}f\left(x,\tilde{y}_{\tilde{j}}\right)\tilde{H}_{0\tilde{j}}(y)$$

тоді для оператора-інтерполянта $\tilde{J}f(x,y)$, побудованого на основі оператора-інтерлінанта $Jf(x,y)$ справедлива тотожність

$$\tilde{J}f=\left(J_1\tilde{J}_2+\tilde{J}_1J_2-J_1J_2\right)f\,.$$

Для кожної функції $f(x,y)$ виконується оцінка

$$\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right)\sin 2\text{®}mx\sin 2\text{®}ny\,dxdy\right|=$$

$$=\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-Jf(x,y)+Jf(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right)\sin 2\text{®}mx\sin 2\text{®}ny\,dxdy\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-Jf(x,y)\right|dxdy+\int_0^1\int_0^1\left|Jf(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right|dxdy\,.$$

За теоремою 1 маємо: $\left|I^2_1(m,n)-\Phi^2_1(m,n)\right|\le\dfrac{\tilde{L}}{(\sim+1)^2\,2^{2\sim}}\dfrac{1}{\ell^{2\sim}}$.

Знайдемо оцінку величини для другого доданка:

$$\int_0^1\int_0^1\left|Jf(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right|dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left|\left(J_1+J_2-J_1J_2\right)f-\left(J_1\tilde{J}_2+J_2\tilde{J}_1-J_1J_2\right)f\right|dxdy\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|\left(J_1-J_1\tilde{J}_2\right)f+\left(J_2-J_2\tilde{J}_1\right)f\right|dxdy\le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_1 - J_1\tilde{J}_2\right) f\right| dxdy + \int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_2 - J_2\tilde{J}_1\right) f\right| dxdy \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k, y) - f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}})\right| dy +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \left| f(x, y_j) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j)\right| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \le$$

$$\le L\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \left|y - \tilde{y}_{\tilde{j}}\right|^{\sim} dy + L\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \left|x - \tilde{x}_{\tilde{k}}\right|^{\sim} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy =$$

$$= L\ell\Delta\frac{\Delta_1^{\sim+1}}{(\sim+1)2^{\sim}}\ell^2 + L\ell\Delta\frac{\Delta_1^{\sim+1}}{(\sim+1)2^{\sim}}\ell^2 = 2L\frac{\Delta_1^{\sim}}{(\sim+1)2^{\sim}} = \frac{L}{(\sim+1)2^{\sim-1}\ell^{2\sim}}.$$

Таким чином,

$$\left|I_1^2(m,n) - \tilde{\Phi}_1^2(m,n)\right| \le \left|I_1^2(m,n) - \Phi_1^2(m,n)\right| + \left|\Phi_1^2(m,n) - \tilde{\Phi}_1^2(m,n)\right| \le$$

$$\le \frac{\tilde{L}}{(\sim+1)^2 2^{2\sim}}\frac{1}{\ell^{2\sim}} + \frac{L}{(\sim+1)2^{\sim-1}}\frac{1}{\ell^{2\sim}} = \frac{\tilde{L} + (\sim+1)2^{\sim+1}L}{(\sim+1)^2 2^{2\sim}}\frac{1}{\ell^{2\sim}}.$$

Теорема 2 доведена.

Зауваження. Кубатурні формули $\tilde{\Phi}_k^2(m,n)$, $k = 1,2,3$, що побудовані з використанням інтерполянтів на основі кусково-сталої інтерлінації для досягнення точності $£ = \frac{\tilde{L} + (\sim+1)2^{\sim+1}L}{(\sim+1)^2 2^{2\sim}}\frac{1}{\ell^{2\sim}}$ використовують не $Q = \ell^4$ значень функції, а $\tilde{Q} = O\left(\ell^3\right)$.

6. Чисельний експеримент

В [6] показано, що для функції $g(u) = \arccos u$ виконується наступна нерівність:

$$\left|\arccos u_1 - \arccos u_2\right| \le \frac{®}{\sqrt{2}}\left|u_1 - u_2\right|^{\sim/2}, \quad \forall u_1, u_2 \in [-1,1],\ 0 < \sim < 1.$$

У випадку функцій двох змінних розглянемо функцію $f(x,y) \in C^2_{2,L,\sim}$:

$$f(x,y) = \arccos^2\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right).$$

Метою експерименту є показати, що $£ = \left| I_1^2(m,n) - \tilde{\Phi}_1^2(m,n) \right| \le$

$$\le \left| I_1^2(m,n) - \Phi_1^2(m,n) \right| + \left| \Phi_1^2(m,n) - \tilde{\Phi}_1^2(m,n) \right| = £_1 + £_2 = £ .$$

Табл. 1. Обчислення $I_1^2(m,n)$ *за кубатурною формулою* $\tilde{\Phi}_1^2(m,n)$

m	n	ℓ	$I_1^2(m,n)$	$\tilde{\Phi}_1^2(m,n)$
2	3	10	-0.015286618346109	-0.015290411046625
		20	-0.015286618346109	-0.015286853697802
		30	-0.015286618346109	-0.015286659986594
3	4	10	-0.008056465302083	-0.008059596324498
		20	-0.008056465302083	-0.008056653340502
		30	-0.008056465302083	-0.00805648897002
4	5	20	-0.004993788721127	-0.004993970112124
		30	-0.004993788721127	-0.00499381802974
		40	-0.004993788721127	-0.004993795668839

Табл. 2. Похибки обчислення $I_1^2(m,n)$ *за* $\Phi_1^2(m,n)$ *та* $\Phi_1^2(m,n)$ *за* $\tilde{\Phi}_1^2(m,n)$

m	n	ℓ	$£_1$	$£_2$
2	3	10	0.0000001049458	0.000003897646316
		20	0.000000053819045	0.000000289170738
		30	0.000000021649813	0.000000063290298
3	4	10	0.000000034044084	0.00000309697833
		20	0.000000041822528	0.000000229860947
		30	0.000000019568825	0.000000043236762
4	5	20	0.00000002601411	0.000000207405106
		30	0.000000013007693	0.000000042316307
		40	0.000000009453601	0.000000016401312

Табл. 3. Порівняння похибок $£$ *та* $£ = £_1 + £_2$

m	n	ℓ	$£$	$£_1 + £_2$
2	3	10	0.000003792700516	0.000004002592116
		20	0.000000235351693	0.000000342989783
		30	0.000000041640485	0.000000084940111
3	4	10	0.000003131022415	0.000003131022415
		20	0.000000188038419	0.000000271683476
		30	0.000000023667937	0.000000062805587
4	5	20	0.000000181390996	0.000000233419216
		30	0.000000029308613	0.000000055324
		40	0.000000006947712	0.000000025854913

Аналіз табл. 1, табл. 2 та табл. 3 показує справедливість теоретичних тверджень.

7. Висновки за результатами та напрямки подальших досліджень

Досліджені кубатурні формули наближеного обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації на класі Гьольдера. Інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задана як слідами функції на взаємно-перпендикулярних лініях, так і значеннями функції в точках. Кубатурні формули, що побудовані з використанням інтерполянтів на основі кусково-сталої інтерлінації для досягнення точності £ використовують не $Q = \ell^4$ значень функції, як класичні, а $\tilde{Q} = O\left(\ell^3\right)$. Отримані оцінки похибки запропонованих кубатурних формул. Чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат.

Результати даної роботи будуть використані при досліджені кубатурних формул наближеного обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням оператора кусково-сталої сплайн-інтерфлетації на класі Гьольдера.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування, – Х.: Основа, 2002. – 544 с.
2. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації. Праці науково-технічної конференції з міжнародною участю "Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях", 18-21 трав., 2010р., Харків, Ч.1. – 2010. – С. 211-213.
3. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій. // Доповіді НАН України. – 2010. – № 3. – С. 24-29.
4. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула для обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій. // Вісник ХНУ. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". – 2010. – № 926. – С.153-160.
5. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій. – Х.: 2009. – 136 с.
6. Gal S. G., Szabados J. On the preservation of global smoothness by some interpolation operators // Studio, Scientiarum Mathematicarum Hungarica 35 (1999), 391'1, 14, P. 397-414.

Надійшла – 10.02.2012.