УДК 519.6

Оценка параметров нелинейных стохастических дифференциальных уравнений на основе нормализирующих преобразований

С. Б. Приходько
Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, Украина

Для оценки параметров нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) рассмотрен подход на основе нормализирующих преобразований. Применение нормализирующих преобразований существенно упрощает решение задачи оценивания параметров нелинейных СДУ при использовании известных классических методов, например, таких как, метод максимального правдоподобия, метод моментов, обобщенный метод моментов. В качестве нормализирующего преобразования предложено применять преобразование Джонсона. Рассмотрен пример оценки параметров нелинейного СДУ 2-го порядка обобщенным методом моментов.

Ключевые слова: *нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение, оценка параметров, нормализирующее преобразование.*

Для оцінювання параметрів нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) розглянуто підхід на основі нормалізуючих перетворень. Застосування нормалізуючих перетворень суттєво спрощує рішення задачі оцінювання параметрів нелінійних СДР при використанні відомих методів, наприклад, таких як метод максимальної правдоподібності, метод моментів, узагальнений метод моментів. У якості нормалізуючого перетворення запропоновано застосовувати перетворення Джонсона. Розглянуто приклад оцінювання параметрів нелінійного СДР 2-го порядку узагальненим методом моментів.

Ключові слова: *нелінійне стохастичне диференціальне рівняння, оцінювання параметрів, комп'ютерний експеримент, нормалізуюче перетворення.*

The approach based on normalizing transformations for estimation of parameters of nonlinear stochastic differential equations (SDE) is considered. The application of normalizing transformations greatly simplifies the solution of the problem of parameter estimation of nonlinear SDE by the well-known classical methods, such as the maximum likelihood method, method of moments, generalized method of moments. As a normalizing transformation has been proposed Johnson transformation. An example of estimation of the parameters of 2-th order nonlinear SDE by generalized method of moments is considered.

Key words: *nonlinear stochastic differential equation, parameter estimation, normalizing transformation.*

1. Введение

В последние годы для оценки параметров нелинейных СДУ, хотя и начинают использовать методы на основе гарантированного оценивания, нейронных сетей [1], оценок спектров высоких порядков [2], но при этом не прекращают искать возможности применения хорошо разработанных классических методов [3]: метода наименьших квадратов, метода максимального правдоподобия, метода моментов (ММ), обобщенного метода моментов (ОММ), методов нелинейной фильтрации и других методов. Однако использование классических методов, как правило, требует ввода предположения о нормальности (например, замыкание системы моментных уравнений в ММ на основе закона Гаусса, локальная гауссовская аппроксимация в расширенном фильтре Калмана), что на практике для нелинейных СДУ не всегда подтверждается.

В том случае, когда предположение о нормальности не применимо, для оценки параметров нелинейных СДУ может быть использован подход, базирующийся на построении СДУ для нормализованных случайных сигналов. При этом эти СДУ получают путем перехода от исходного нелинейного СДУ на основе нелинейного нормализирующего преобразования. В качестве такого преобразования в [4] реализовано одномерное преобразование Джонсона.

Хотя идея перехода от нелинейного СДУ к СДУ специального класса на основе нелинейного преобразования не нова, однако она реализована лишь в частных случаях. Так, в [5] было представлено обобщение многомерного преобразования для перехода от нелинейного СДУ с коэффициентом диффузии, который зависит от вектора состояния, к такому СДУ, где эта зависимость отсутствует. В [6] для нормализации математических моделей было предложено применять многомерные преобразования Джонсона, которые в [7] были применены для построения математических моделей нелинейных стохастических дифференциальных систем. Цель данной работы: показать, что применение нормализирующих преобразований позволяет существенно упростить решение задачи оценивания параметров нелинейных СДУ при использовании известных методов, таких как, ММ и ОММ.

2. Постановка задачи

Пусть заданы реализации компонент негауссовского случайного процесса $\mathbf{x}(t)=\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$. Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть решением СДУ

$$d\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)dt+\mathbf{G}(\mathbf{x},t)d\mathbf{W}(t) \qquad (2.1)$$

на $\Delta=[0,T]$ с начальным условием $\mathbf{x}(0)=\mathbf{v}$. Пусть коэффициенты сноса и диффузии в СДУ (2.1) зависят от вектора неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}$.

Пусть существует некоторое взаимно-однозначное многомерное нормализирующее преобразование

$$\mathbf{z}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \qquad (2.2)$$

такое, что $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})\in \mathrm{R}^n$, функция $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема на Δ по t, дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$. Причем компоненты вектора $\mathbf{z}=\mathbf{z}(t)=\{z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)\}^T$ – это стационарные в широком смысле гауссовские случайные процессы.

Пусть по преобразованию (2.2) компоненты $\mathbf{x}(t)$ могут быть преобразованы в соответствующие компоненты случайного процесса $\mathbf{z}(t)$ с нормальным распределением (нормализованные случайные сигналы). Необходимо по реализациям компонент $\mathbf{x}(t)$ для СДУ (2.1) найти точечные оценки компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$.

3. Решение задачи

Точечные оценки компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$ могут быть определены следующим образом. Сначала на основе нормализирующих преобразований по СДУ (2.1) необходимо найти СДУ для $\mathbf{z}(t)$ [4]. Далее – найти оценки неизвестных параметров (компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$) СДУ для $\mathbf{z}(t)$, используя один из известных методов, например, ОММ, суть которого состоит в решении следующей задачи:

$$\boldsymbol{\theta} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\}^T \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ – вектор моментных условий; $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ – весовая матрица; $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор статистических моментов.

Как известно, возникает проблема стремительного усложнения решения задачи (3.1) при увеличении компонент СДУ. Так, для СДУ 2-го порядка с негауссовскими компонентами и при учете статистических моментов до 4-го порядка включительно, вектор $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ состоит из 14 компонент, а матрица $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ имеет 196 элементов.

Для решения этой проблемы и строится нормализованное СДУ на основе нормализирующего преобразования (2.2) и СДУ (2.1). Указанный подход позволяет уменьшить размеры вектора моментных условий и весовой матрицы (или иными словами упростить решение задачи оценивания параметров). Так, при оценке параметров СДУ 2-го порядка вектор моментных условий уже состоит из 5 компонент, а весовой матрица имеет всего 25 элементов. При этом точность оценок параметров СДУ при применении нормализирующих преобразований изменяется незначительно.

Для примера рассмотрим нелинейное СДУ

$$\ddot{x} + b_1\dot{x} + c_1 x + c_3 x^3 = n(t), \quad (3.2)$$

где $n(t)$ – белый шум с коэффициентом интенсивности N_0.

Обозначив, $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, и преобразовав СДУ (3.2) в систему уравнений 1-го порядка, применяя метод Эйлера к этой системе, получаем разностные уравнения

$$\begin{aligned} x_{1_{i+1}} &= x_{1_i} + x_{2_i}\Delta t; \\ x_{2_{i+1}} &= x_{2_i} - \left(b_1 x_{2_i} + c_1 x_{1_i} + c_3 x_{1_i}^3\right)\Delta t + \zeta_i\sqrt{N_0\Delta t}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где ζ_i – i-е значение нормально распределенной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

На основе (3.3) осуществлялось компьютерное моделирование x_1 и x_2. Значения b_1, c_1, c_3, N_0, $x_1(0)$ и $x_2(0)$ соответственно были равны 0,02, 1, -1, $4{,}44\cdot10^{-4}$, 0,2323, $-0{,}3594$. На рис. 1 приведена гистограмма, построенная по значениям x_1.

Для x_1 подбиралось нормализирующее преобразование (2.2). В качестве такового использовалось преобразование Джонсона

$$z = \gamma + \eta h(x,\varphi,\lambda); \quad \eta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varphi < \infty, \quad (3.4)$$

которое имеет обратное преобразование

$$x = \varphi + \lambda h^{-1}(z,\gamma,\eta); \quad \eta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varphi < \infty,$$

где z – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией единица; x – случайная величина с распределением Джонсона; γ, η, λ, φ – параметры преобразования Джонсона; h и h^{-1} – функции определенного семейства:

$$h = \begin{cases} \ln(\tilde{x}), & x > \varphi, & \text{для семейства } S_L; \\ \ln[\tilde{x}/(1-\tilde{x})], & \varphi < x < \varphi + \lambda, & \text{для семейства } S_B; \\ \operatorname{Arsh}(\tilde{x}), & -\infty \le x \le +\infty, & \text{для семейства } S_U, \end{cases}$$

$$h^{-1} = \begin{cases} e^{\zeta}, & \text{для семейства } S_L; \\ 1/\left(1+e^{-\zeta}\right), & \text{для семейства } S_B; \\ \left(e^{\zeta}-e^{-\zeta}\right)/2, & \text{для семейства } S_U. \end{cases}$$

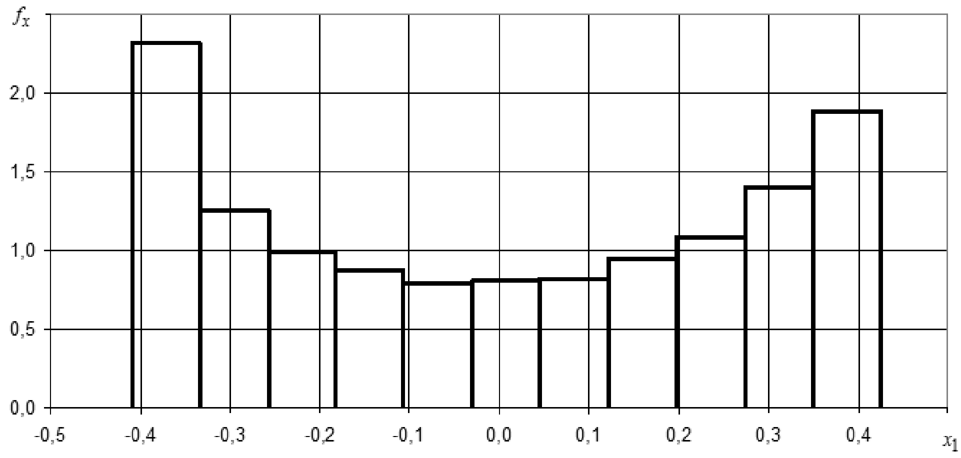

Рис. 1. Гистограмма x_1

По оценкам асимметрии $A_x = 0{,}00412$ и эксцесса $\varepsilon_x = 1{,}5098$ выбрано семейство S_B Джонсона. Были найдены параметры преобразования (3.4): γ=0,044211, $\eta = 0{,}461852$, $\lambda = 0{,}836413$ и $\varphi = -0{,}410213$, которые определялись из решения задачи математического программирования

$$\vartheta = \arg\min_{\vartheta} \left\{ A_z^2 + (\varepsilon_z - 3)^2 + \bar{z}^2 + \left(S_z^2 - 1\right)^2 \right\},$$

где $A_z = \dfrac{1}{nS_z^3} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^3$; $\varepsilon_z = \dfrac{1}{nS_z^4} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^4$; $\bar{z} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$; $S_z^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2$; ϑ – вектор неизвестных параметров для (3.4), $\vartheta = \{\gamma, \eta, \lambda, \varphi\}$; z_i – i-е значение величины z в выборке длиною n, $i \in [1, n]$, определяется по (3.4).

По (3.4) для семейства S_B вычислены значения z_1, гистограмма для которых приведена на рис. 2. Получено: $A_z = -0{,}01634$; $\varepsilon_z = 2{,}9924$; $\bar{z} = -4{,}557 \cdot 10^{-4}$; $S_z^2 = 0{,}99999$.

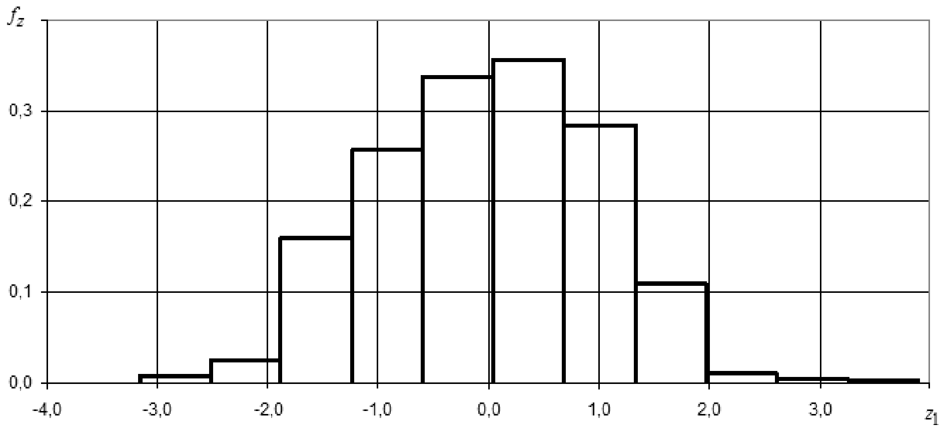

Рис. 2. Гистограмма z_1

Далее для СДУ (3.2) строим нормализованное СДУ. Сначала записываем для семейства S_B преобразование (2.2) и обратное к нему преобразование для компонент векторов **z** и **x**

$$z_1 = \gamma + \eta \ln\left[\tilde{x}/(1-\tilde{x})\right] = \gamma + 2\eta\, arth(2\tilde{x} - 1); \qquad z_2 = \frac{\lambda\eta x_2}{(x_1 - \varphi)(\lambda + \varphi - x_1)};$$

$$x_1 = \varphi + \frac{\lambda}{2}\left[1 + th\left(\frac{z_1 - \gamma}{2\eta}\right)\right]; \qquad x_2 = \frac{\lambda z_2}{4\eta}\left[1 + th\left(\frac{z_1 - \gamma}{2\eta}\right)\right]^2.$$

Формируем компоненты нормализованного СДУ

$$\dot{z}_1 = z_2;\ \dot{z}_2 = \frac{z_2^2}{\eta} th\left(\frac{\tilde{z}}{2}\right) - b_1 z_2 - \frac{4\eta}{\lambda\left[1 - th^2(\tilde{z}/2)\right]}\left(c_1\tilde{\varphi} + c_3\tilde{\varphi}^3\right) + \frac{4\eta}{\lambda\left[1 - th^2(\tilde{z}/2)\right]} n(t).$$

Учитывая, что $z_1 = z$ и $z_2 = \dot{z}$ получаем нормализованное СДУ 2-го порядка

$$\ddot{z} + b_1\dot{z} + \frac{4\eta}{\lambda\left[1 - th^2(\tilde{z}/2)\right]}\left(c_1\tilde{\varphi} + c_3\tilde{\varphi}^3\right) = \frac{4\eta}{\lambda\left[1 - th^2(\tilde{z}/2)\right]} n(t). \qquad (3.5)$$

Тут $\tilde{z} = (z - \gamma)/\eta$; $\tilde{\varphi} = \varphi + \lambda\left[1 + th(\tilde{z}/2)\right]/2$.

Оценки параметров СДУ (4) ОММ, реализованным на основе исходного СДУ (3.2) (линии с прямоугольниками) и нормализованного СДУ (3.5) (линии с треугольниками), приведены на рис. 3-5.

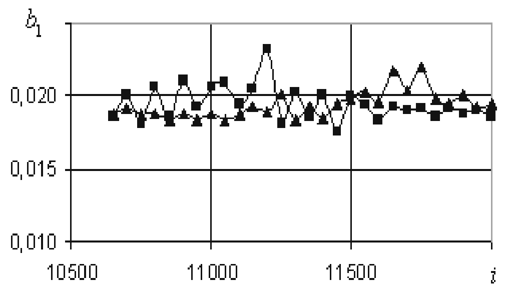

Рис. 3. Оценки b_1

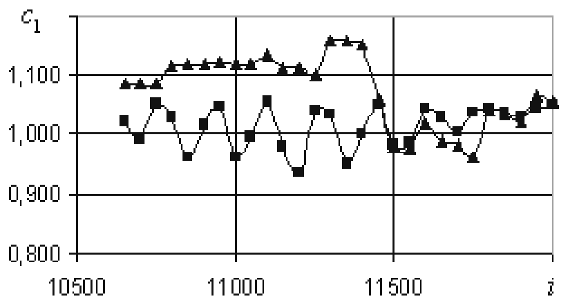

Рис. 4. Оценки c_1

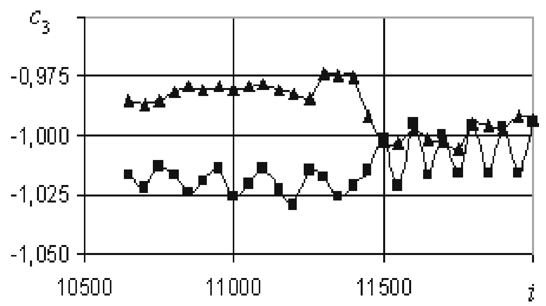

Рис. 5. Оценки c_3

4. Выводы

Получил дальнейшее развитие подход упрощения нелинейных СДУ путем перехода к СДУ специального класса на основе нормализирующего преобразования, который позволяет получать нормализированные СДУ и в конечном итоге упростить решение задачи оценивания параметров исходного нелинейного СДУ.

Применение нормализирующих преобразований позволяет существенно упростить решение задачи оценивания параметров нелинейных СДУ при использовании известных методов, например, таких как, ММ и ОММ.

В дальнейшем исследования планируется вести в направлении применения других нормализирующих преобразований для оценки параметров нелинейных СДУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Робастные методы оценивания, идентификации и адаптивного управления: [монография] / [Азарсков В. Н., Блохин Л. Н., Житецкий Л. С., Куссуль Н. Н.]. – К.: НАУ, 2004. – 500 с.
2. Vasta M., Roberts J. B. Stochastic parameters estimation of non-linear systems using only higher order spectra of measured response // Journal of Sound and Vibration. – 1998. – 213(2). – p.201-221.
3. Bishwal Jaya P. N. Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations. – Publisher: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 282 p.
4. Приходько С. Б. Методи побудови математичних моделей нормалізованих сигналів нелінійних стохастичних диференціальних систем // Науковий журнал “Математичне моделювання”. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2008. – № 2 (19) – С.3-6.
5. Nielsen J. N., Madsen H. Applying the EKF stochastic differential equations with level effects // Automatica. – 2001. – Vol. 37. – p.107-112.
6. Приходько С. Б. Багатовимірні перетворення для нормалізації математичних моделей нелінійних стохастичних диференціальних систем // Науковий журнал “Математичне моделювання”. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2009. – № 1 (20) – С.12-15.
7. Приходько С. Б. Применение нормализующих преобразований для построения математических моделей нелинейных стохастических дифференциальных систем // Электронное моделирование. – 2011. – Т.33. – № 2. – С.13-23.

Надійшла – 12.03.2012.