УДК 532.516

Численное моделирование сверхзвукового обтекания цилиндра

А. А. Приходько, Е. Б. Рогоза
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг»

Для численного моделирования поперечного обтекания цилиндра сверхзвуковым потоком газа применяются уравнения Навье-Стокса. Решение исходных уравнений получено методом контрольного объема. При дискретизации уравнений используются несколько алгоритмов расчета потока через грань контрольного объема. Анализируется ударно – волновая структура обтекания цилиндра.

Ключевые слова: *численное моделирование, уравнения Навье-Стокса, сверхзвуковое течение.*

Для чисельного моделювання поперечного обтікання циліндра надзвуковим потоком газу застосовуються рівняння Нав'є-Стокса. Розв'язок вихідних рівнянь отримано методом контрольного об'єму. При дискретизації рівнянь використовуються декілька алгоритмів розрахунків потоку через комірку контрольного об'єму. Аналізується ударно-хвильова структура обтікання циліндра.

Ключові слова: *чисельне моделювання, рівняння Нав'є-Стокса, надзвукова течія.*

The Navier – Stokes equations are applied to numerical simulation of a cross-section flow of cylinder by a supersonic flow. The solution of the equations is obtained by the control volume method. The discretizations of equations uses some algorithms of calculation through of flow face of control volume. The shock – wave structure of flow around with the cylinder is analyzed**.**

Key words: *Numerical simulations, the Navier-Stokes equations, supersonic flow.*

1. Введение

Исследование ударно-волновых структур, возникающих при движении плохообтекаемых тел в потоке сжимаемого газа, является актуальной проблемой современной аэродинамики. Интерес к течениям такого рода обусловлен тем, что здесь наблюдаются все основные явления, присущие вязко – невязким взаимодействиям [1]. С практической точки зрения, возникающие физические особенности поля течения оказывают существенное влияние на аэродинамические характеристики тел.

Численное моделирование с использованием уравнений Навье-Стокса позволяет анализировать вихревые структуры следа, положение точки отрыва, динамику вторичных вихрей, взаимодействие хвостовых скачков уплотнения с пограничным слоем и форму головной ударной волны [2]. Выбор эффективной методики расчета является определяющим фактором при численном моделировании.

В данной работе представлены результаты численного моделирования сверхзвукового поперечного обтекания цилиндра, при $M_\infty = 3.94$, $\mathrm{Re}_D = 6,7 \cdot 10^3$ и $M_\infty = 3,0$, $\mathrm{Re}_D = 10^5$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сверхзвуковое поперечное обтекание цилиндра (рис. 1), характеризующееся наличием головной ударной волны, хвостовых скачков уплотнения и сложной вихревой структурой течения в следе.

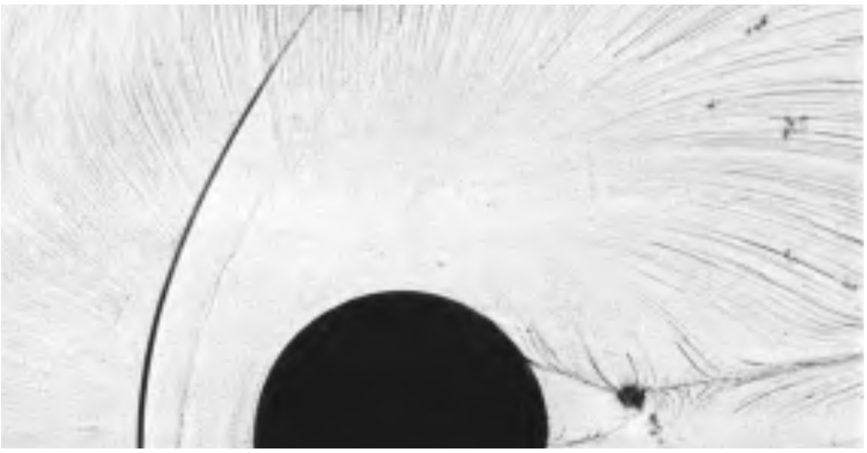


Рис. 1. Течение вокруг цилиндра, фотография из [3]

Воспользуемся двумерными нестационарными уравнениями Навье-Стокса. В безразмерном виде для произвольных неподвижных криволинейных координат уравнения имеют вид [2]:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} \right). \qquad (1)$$

Здесь $\hat{\mathbf{q}}$ – четырехкомпонентный вектор консервативных переменных, $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$ – векторы конвективных потоков, $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ – векторы диффузионных потоков, (ξ, η) – обобщенные криволинейные координаты

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{J}, \qquad \mathbf{q} = \left(\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ E \right)^T,$$

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$ – Якобиан преобразования координат.

Векторы потоков на грани контрольного объема определялись с помощью соотношений:

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{J}\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + n_x p \\ \rho v U + n_y p \\ (E+p)U \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{\mu\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)}{J}\begin{bmatrix} 0 \\ u_n + \frac{1}{3} n_x U_n \\ v_n + \frac{1}{3} n_x U_n \\ \frac{a_n^2}{\Pr(\gamma - 1)} + \left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)_n + \frac{1}{3} U U_n \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}}{J}\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + n_x p \\ \rho v U + n_y p \\ (E+p)U \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{\mu\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)}{J}\begin{bmatrix} 0 \\ u_n + \frac{1}{3} n_x U_n \\ v_n + \frac{1}{3} n_x U_n \\ \frac{a_n^2}{\Pr(\gamma - 1)} + \left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)_n + \frac{1}{3} U U_n \end{bmatrix}.$$

Для диффузионных потоков применяется приближение «тонкого слоя» [2].

Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{u^2+v^2}{2}\right). \qquad (2)$$

В уравнениях приняты следующие обозначения: ρ – плотность, u, v – декартовы компоненты вектора скорости, p – давление, E – полная удельная энергия единицы объема газа, $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ – местная скорость звука, $\gamma = 1{,}4$ – показатель адиабаты для воздуха, $\mu = \mu_\infty \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{0{,}76}$ – коэффициент динамической вязкости, Re – число Рейнольдса, $\Pr$ – число Прандтля,

$$U = n_x u + n_y v, \qquad U_n = n_x u_n + n_y v_n,$$

n_x, n_y – компоненты внешней нормали к грани контрольного объема,

$$u_n = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad v_n = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad a_n = \frac{\partial a}{\partial n}, \quad \left(u^2 + v^2\right)_n = \frac{\partial}{\partial n}\left(u^2 + v^2\right).$$

В качестве начальных условий задавались параметры невозмущенного сверхзвукового потока.

На поверхности цилиндра ставились условия прилипания. Значения параметров потока на внешней границе определялись на основе инвариантов Римана, как результат взаимодействия набегающего невозмущённого потока и возмущенного течения внутри расчетной области.

3. Численная методика

Дискретизация исходной системы дифференциальных уравнений (1) выполнена с помощью метода контрольного объема для криволинейных координат [2]:

$$\frac{\Delta\hat{\mathbf{q}}^n}{\Delta t}+\frac{\hat{\mathbf{E}}^n_{i+1/2,\,j}-\hat{\mathbf{E}}^n_{i-1/2,\,j}}{\Delta\P}+\frac{\hat{\mathbf{F}}^n_{i,\,j+1/2}-\hat{\mathbf{F}}^n_{i,\,j-1/2}}{\Delta\text{¦}}=$$
$$=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}^n_{i+1/2,\,j}-\hat{\mathbf{R}}^n_{i-1/2,\,j}}{\Delta\P}+\frac{\hat{\mathbf{S}}^n_{i,\,j+1/2}-\hat{\mathbf{S}}^n_{i,\,j-1/2}}{\Delta\text{¦}}\right), \qquad (3)$$

где Δt – шаг по времени, $\Delta\P$, $\Delta\text{¦}$ – шаги по пространству, $\Delta\hat{\mathbf{q}}^n=\hat{\mathbf{q}}^{n+1}-\hat{\mathbf{q}}^n$.

Вычисления конвективных потоков выполнялось с помощью алгоритмов:

1) ***Roe*** [4]: $$\hat{\mathbf{E}}_k=\frac{1}{2}\left[\hat{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{q}}_R\right)+\hat{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{q}}_L\right)-\left|\tilde{A}\right|(\mathbf{q}_R-\mathbf{q}_L)\right],$$

2) ***JST*** [5]: $$\hat{\mathbf{E}}_k=\frac{1}{2}\left[\hat{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{q}}_R\right)+\hat{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{q}}_L\right)-\left|\text{a}_{\max}\right|(\mathbf{q}_R-\mathbf{q}_L)\right],$$

3) ***AUSM*** [6]: $$\hat{\mathbf{E}}_k=\hat{\mathbf{E}}^+\left(\hat{\mathbf{q}}\right)+\hat{\mathbf{E}}^-\left(\hat{\mathbf{q}}\right),$$

4) ***CUSP*** [6]: $$\hat{\mathbf{E}}_k=\begin{cases}\hat{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{q}}_L\right), & U_k\ge a\\ \frac{1}{2}\left[\left(\circ u\right)_k\left(\hat{\mathbf{q}}^C_R+\hat{\mathbf{q}}^C_L\right)-\left|\circ u\right|_k\left(\hat{\mathbf{q}}^C_R-\hat{\mathbf{q}}^C_L\right)\right]+\hat{\mathbf{E}}^P_L+\hat{\mathbf{E}}^P_R, & \left|U_k\right|<a,\\ \hat{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{q}}_R\right), & U_k\le -a\end{cases}$$

5) ***Van-Leer***[7]: $$\hat{\mathbf{E}}_k=\begin{cases}\hat{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{q}}_L\right), & M_k\ge 1\\ \hat{\mathbf{E}}^+\left(\hat{\mathbf{q}}_R\right)+\hat{\mathbf{E}}^-\left(\hat{\mathbf{q}}_L\right), & \left|M_k\right|<1.\\ \hat{\mathbf{E}}\left(\hat{\mathbf{q}}_R\right), & M_k\le -1\end{cases}$$

Вектор консервативных переменных в окрестности грани контрольного объема (рис. 2) определяется с помощью ***MUSCL*** интерполяции [6]:

$$\mathbf{q}_L=\mathbf{q}_i+\cdot\;(\Delta\mathbf{q}_i,\Delta\mathbf{q}_{i+1}),$$
$$\mathbf{q}_R=\mathbf{q}_{i+1}-\cdot\;(\Delta\mathbf{q}_i,\Delta\mathbf{q}_{i+1}),$$

где

$$\cdot\;(u,v)=\frac{(u+v)}{4}\left[1-\left(\frac{u-v}{|u|+|v|}\right)^2\right].$$

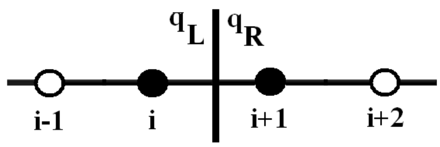


Рис. 2. Параметры потоков в окрестности грани контрольного объема

Вязкие слагаемые вычислялись с помощью центрально – разностной аппроксимации.

Алгоритм имеет второй порядок точности по пространству. Уравнения решались методом установления по времени.

Для адекватной передачи характеристик пограничного слоя проводилось сгущение сеточных узлов к поверхности цилиндра.

4. Тестирование расчетных методик

Важным этапом разработки методик вычислительной аэродинамики является тестирование расчетных модулей и программных комплексов.

В качестве тестового примера рассмотрена задача о взаимодействии ударных волн [8]. В момент времени $t = 0$ конфигурация (рис. 3, а) и интенсивность взаимодействующих однородных потоков определялась соответствующими начальными условиями. После взаимодействия потоков (рис. 3, б) образовалась пара симметричных ударных волн, с расширяющимся эллиптическим фронтом.

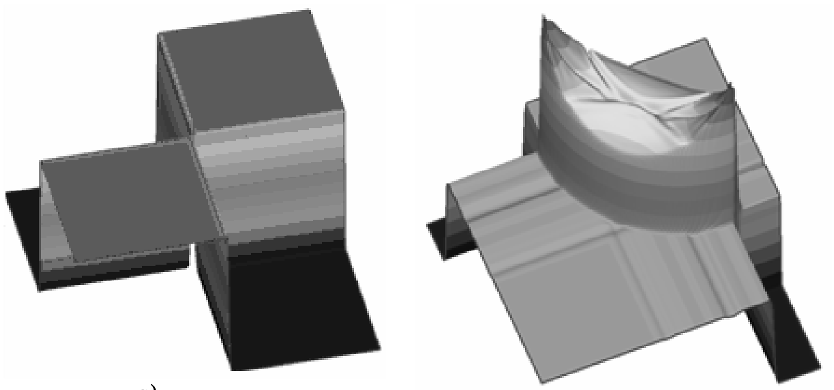
Сравнение рассмотренных методик было проведено по затратам времени счета на процессоре *Intel 3,0 ГГц* (табл. 1).

Табл. 1. Сравнение методик

Расчетная методика	тип схемы	Затраты времени на 2500 шагов
1) *Roe*	ПП	220 с
2) *JST*	ПП	225 с
3) *AUSM*	ЦР	240 с
4) *CUSP*	ЦР	268 с
5) *Van-Leer*	ЦР	256 с

где ***ПП*** – Противопоточная схема, ***ЦР*** – Центрально-разностная схема.

Из рассмотренных методик алгоритм ***Roe*** является более экономичным по затратам процессорного времени. Все дальнейшие расчеты выполнены с использованием методики ***Roe***, в которой диссипативные слагаемые вычисляются с использованием матрицы Якоби.



а)

б)

Рис. 3. Распределение плотности при взаимодействии ударных волн:
а) начальная конфигурация t=0, б) расположение ударных волн при t=2,5

5. Результаты расчетов

На рис. 4 приведено сравнение распределения коэффициента давления по поверхности цилиндра, полученное в результате численного расчета, с экспериментальными данными [9].

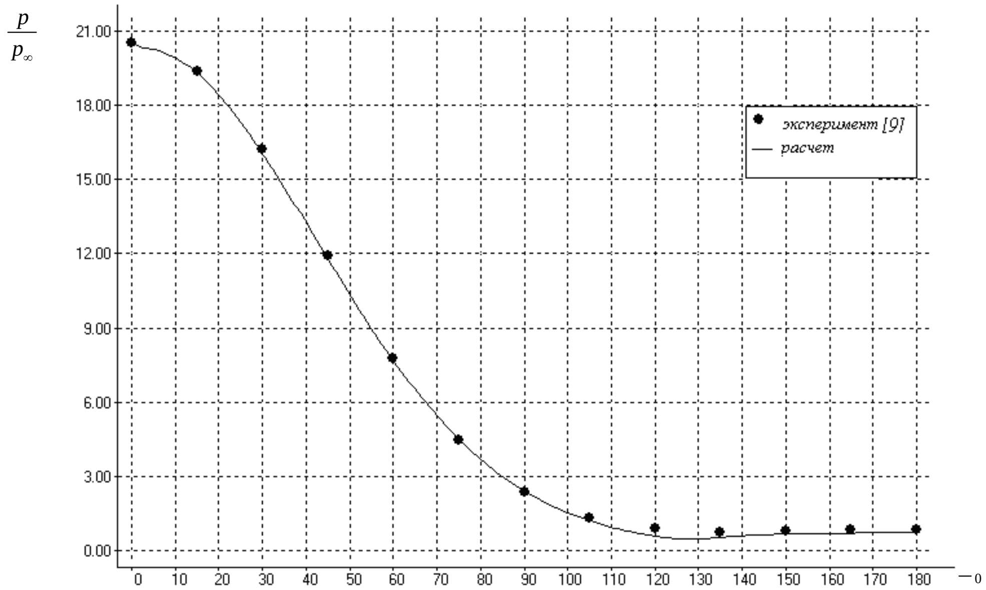
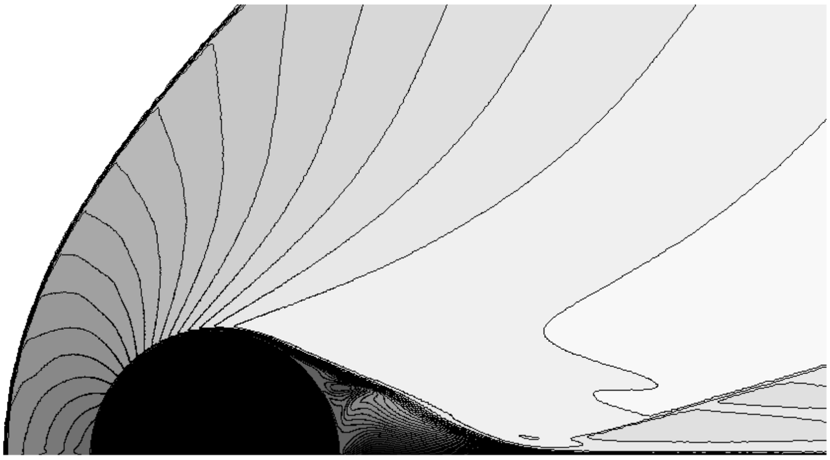


Рис. 4. Коэффициент давления по поверхности цилиндра M_∞=3,94, Re_D=6,7·10^3

Основные закономерности отрывного течения представлены на рис. 5. Поток натекает на цилиндр и его взаимодействие с обтекаемой поверхностью приводит к формированию головной ударной волны, а также области сжатия перед цилиндром. В донной области за цилиндром образуется веер волн разрежения и интенсивное вихревое течение. Сложная ударно-волновая структура обтекания формируется в результате взаимодействия хвостовых скачков уплотнения. При рассмотренных числах Маха и Рейнольдса в ближнем следе наблюдалась одно- и трехвихревая структура ближнего следа за цилиндром.

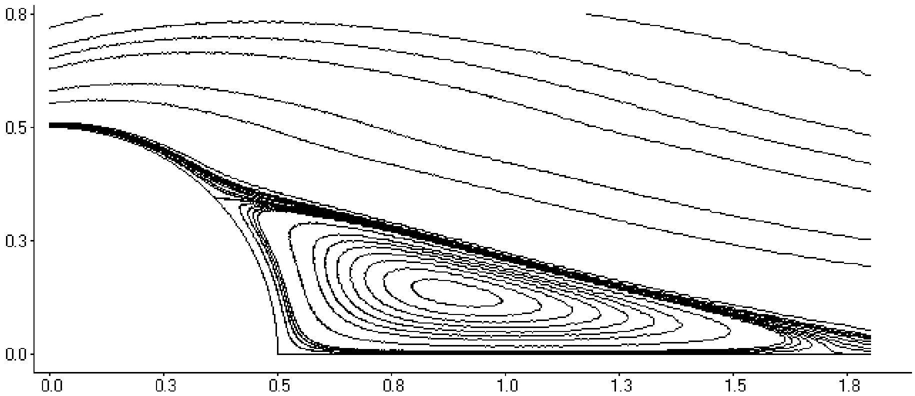


а)

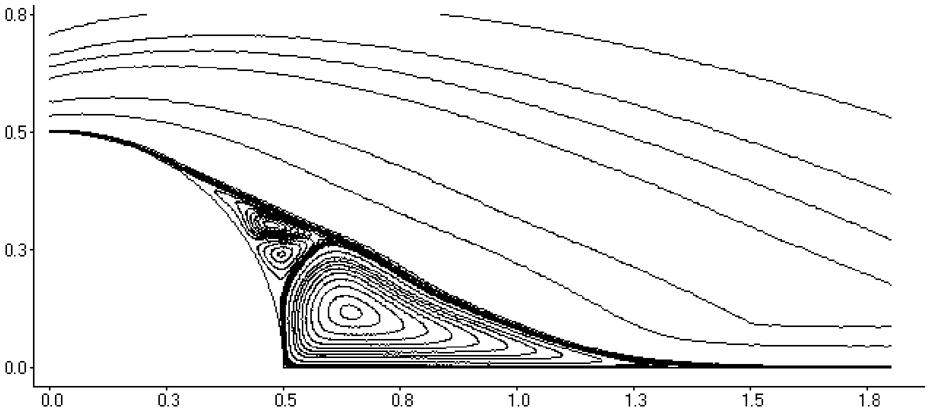
б)

Рис. 5. Распределение изолиний чисел Маха (а),
распределение изолиний компоненты v вектора скорости (б)

Положение точек отрыва и присоединения, определялись по распределению коэффициента трения на поверхности цилиндра, линий тока и завихренности в расчетной области. На рис. 6, а при $M_{\infty} = 3.94$, $\mathrm{Re}_D = 6,7 \cdot 10^3$ массивный вихрь, вращается по часовой стрелке, положение точки отрыва имело угловую координату $\overline{\ }_{sep} \approx 134^{\circ}$, длина отрывной зоны составляла $L_{sep} \approx 1,3D$. На рис. 6, б при $M_{\infty} = 3,0$, $\mathrm{Re}_D = 10^5$ два крайних вихря вращаются по часовой стрелке, а центральный вихрь вращается против часовой стрелки, интенсивность данного вихря во много раз меньше интенсивности крайних вихрей. Первичный отрыв потока находится в точке с угловой координатой $-_{sep}^{(1)} \approx 122^{\circ}$, а точка присоединения – $-_{con}^{(1)} \approx 154^{\circ}$, координата вторичного отрыва – $-_{sep}^{(2)} \approx 168^{\circ}$, длина отрывной зоны составляла $L_{sep} \approx 0{,}82D$.



а)



б)

Рис. 6. Вихревая структура следа: $M_{ã}$ =3,94, Re=6,7·10^{3} (а), $M_{ã}$ =3,0, Re=10^{5} (б)

Выводы

1. Разработано программно-методическое обеспечение для численного моделирования сверхзвуковых течений вязкого газа.
2. Выполнено сравнение распределения коэффициента давления по поверхности цилиндра с известными экспериментальными данными.
3. Определены положения точек отрыва и присоединения, а также длина отрывной зоны для двух чисел Рейнольдса.
4. Выполнен анализ вихревой структуры ближнего следа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чжен П. Отрывные течения. – М.: Мир, 1972 – 1973. – Т.1. – 300с.; Т.2. – 280 с.; Т.3. – 334 с.
2. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидромеханике и тепломасообмене. – Киев: Наукова думка, 2003. – 380 с.
3. Ван – Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
4. Roe P. L. Characteristic-based schemes for the Euler equations // Annual review of fluid mechanics. – 1986. – 18. – P. 327-336.
5. Jameson A., and Schmidt W. and Turkel E., Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge – Kutta Time Stepping Schemes , AIAA Paper, 1981, № 1259. – 12 p.
6. Liou M.-S., Steffen C. J., A new flux splitting scheme // Journal of Computational Physics. – 1993. – 107, N 1. – P. 23-39.
7. Van Leer B., Flux Vector Splitting for the Euler equations // Lecture Notes in Phys. – 1982. – 170. – P. 507-512.
8. Рогоза Е. Б. Конечно – объемные схемы расчета конвективных потоков повышенной разрешающей способности и их сравнение на двумерных задачах Римана / А. А. Приходько, Е. Б. Рогоза // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2010. – Вип. 14. – т. 2, № 5. – С. 100-110.
9. Goodwin G., Creager M. O., Wincler E. L. Investigation of Local Heat-Transfer and Pressure Drag Characteristics of a Yawed Circular Cylinder at Supersonic Speeds // NACA RM A55H31, 1956. – 45p.

Надійшла – 16.03.2012.