УДК 519.6

# Математические модели и эволюционный метод решения задач стохастической оптимизации

А. А. Трончук, Е. М. Угрюмова
*Харьковский национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

Рассматриваются математические модели и метод решения задач стохастической оптимизации. Предложен эволюционный метод нахождения решений таких задач, основанный на генетическом алгоритме. Представлена методика синтеза нормального решения задач модификации в стохастической постановке со смешанными условиями методом регуляризации А. Н. Тихонова.

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, стохастическая оптимизация, эволюционный метод.*

Розглядаються математичні моделі та метод розв'язання задач стохастичної оптимізації. Запропоновано еволюційний метод знаходження рішень таких задач, заснований на генетичному алгоритмі. Представлена методика синтезу нормального рішення задач модифікації в стохастичній постановці зі змішаними умовами методом регуляризації А. Н. Тихонова.

**Ключові слова:** *математичне моделювання, стохастична оптимізація, еволюційний метод.*

Mathematical models and the method of stochastic optimization problems solutions are considered. The evolutionary method of a stochastic optimization problems solutions, based on genetic algorithm is offered. The method of normal solutions synthesis of mixed condition modification problems in the stochastic statement with the help of regularization method by A. N. Tikhonov is presented.

**Key words:** *mathematical modeling, stochastic optimization, evolutionary method.*

## 1. Введение

На современном этапе развития промышленных и информационных технологий все большее значение приобретает необходимость непрерывного совершенствования характеристик производимой продукции независимо от вида продукции и размеров выпущенной партии. Поэтому актуальной является проблема совершенствования существующих и разработки новых математических моделей и методов решения многокритериальных задач параметрической оптимизации (МЗПО).

При серийном производстве требуется учитывать ограниченную точность изготовления изделий. Таким образом, возникает необходимость учета стохастической природы параметров и переменных задачи (формулировать МЗПО в стохастической постановке). При создании методов синтеза решений МЗПО с учетом вышеизложенного возникают следующие требования:

– учет стохастической природы переменных и функций цели (ФЦ);
– возможность работы с большим количеством параметров и переменных задачи.

В настоящее время опубликовано множество работ, в которых сформулированы модели принятия решений в МЗПО и описаны методы синтеза их решений [1, 2]. В работах [3-10] выделяется отдельный класс методов синтеза решений задач оптимизации – эволюционные методы (ЭМ). В этих работах подробно рассмотрены общие положения теории ЭС, их преимущества и недостатки, а также возможности применения ЭС для решения практических задач. Следует отметить, что в большинстве приведенных работ отсутствует анализ возможности применения ЭМ для решения задач МЗПО в стохастической постановке. Несмотря на несомненные преимущества ЭМ, существуют и их недостатки – низкая эффективность на заключительном этапе оптимизации, а также отсутствие самоадаптации [3, 4, 8].

Данная работа посвящена разработке математических моделей и эволюционного метода синтеза решений МЗПО, основанного на генетическом алгоритме с учетом стохастической природы входных данных. Рассмотрены различные постановки задач стохастической оптимизации. Приведена методика синтеза нормального решения задач модификации в стохастической постановке со смешанными условиями методом регуляризации А. Н. Тихонова.

Представлено сравнение решений задачи оптимизации в детерминированной и в различных стохастических постановках. Показано, что решения, полученные в детерминированной постановке, могут отличаться на величины значимые с практической точки зрения от решений, полученных с учетом стохастической природы входных данных, что иллюстрирует актуальность применения представленных моделей и метода в инженерной практике.

**2. Постановки задач стохастической оптимизации**

Представим задачу стохастической оптимизации в виде $f(x) \to \min$, где $f$ – функция цели (ФЦ), вид которой зависит от условий рассматриваемой задачи, $x$ – случайная величина с заданным законом распределения. В данной работе рассматриваются переменные $x$ с нормальным или равномерным законами распределения. Однозначно определим переменную $x$, в случае нормального закона распределения, задав ее математическое ожидание $M[x] = x_c$ и дисперсию $D[x] = \pm_x^2$. Следует отметить, что если рассматривается задача многопараметрической оптимизации, то переменная $x$ и определяющие ее величины $x_c$ и $\pm_x$ являются векторами, размерность которых соответствует размерности решаемой задачи.

Вследствие случайной природы переменной $x$, ФЦ $f(x)$ также будет случайной величиной. Для представления случайной ФЦ определим ее математическое ожидание и дисперсию – $M[f(x)] = f_c$ и $D[f(x)] = \pm_f^2$. Для вычисления вероятности попадания значения ФЦ в заданный диапазон для заданных величин $x_c$ и $\pm_x$ случайным образом сформируем множество векторов $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$, вычислим соответствующие значения ФЦ $f_i \, (i = 1...n)$, и найдем количество элементов $i_f$, удовлетворяющих требованию $f_{\min} \le f(x_i) \le f_{\max}$. Полученное число нормируем путем деления на $n$.

Зачастую в выражение для ФЦ входит не одна переменная, а несколько. Допустим, ФЦ содержит $J$ переменных. В таком случае используется скалярная «свертка» переменных ФЦ $\hat{f}$. Для вычисления вероятности попадания значения ФЦ в заданный диапазон для элемента множества рассчитывается вектор $f = \{f_1, f_2, f_3, \dots f_J\}$. В этом случае для каждой переменной задаются свои ограничения, а вместо требования $f_{\min} \le f(x_i) \le f_{\max}$ – дизъюнкция требований вида $f_{j\min} \le f_j(x_i) \le f_{j\max}$, $j = 1 \dots J$.

В классе задач стохастической оптимизации обычно выделяют три модели принятия решений: M-задача (задача нахождения минимального математического ожидания ФЦ), V-задача (задача нахождения минимальной дисперсии ФЦ) и P-задача (задача нахождения максимальной вероятности достижения заданной ФЦ). Рассмотрим подробнее каждую из трёх задач.

M-задача: при заданном $\pm_x$ требуется найти такое $x_c$, которое обеспечивает минимальное математическое ожидание ФЦ $f_c$. Для решения задачи модификации целесообразно привести данную задачу к задаче минимизации значения функции вида $\left|f_c - f^*\right|$, где $f^*$ – заданное значение ФЦ. Данная задача наиболее близка к классическому виду оптимизационных задач. При игнорировании стохастической природы переменной $x$ и самой ФЦ задача сводится к классической.

V-задача: при заданном $\pm_x$ требуется найти такое $x_c$, которое обеспечивает минимальное значение $\pm_f$. Преобразование задачи оптимизации в задачу модификации можно выполнить аналогично преобразованию в M-задаче.

P-задача: при заданном $\pm_x$ требуется найти такое $x_c$, при котором вероятность $P\left(f_{\min} \le f(x) \le f_{\max}\right)$ достигает максимума.

Следует отметить, что часто в задачах стохастической оптимизации необходимо наблюдать за изменениями математического ожидания и дисперсии ФЦ одновременно, не допускать превышения ими заданных значений. Для решения этой проблемы рассматриваются модели со смешанными условиями. Обозначенные условия для двухкритериальной задачи могут вводиться, например, в виде скалярной «свертки» ФЦ на основе концепции степенных средних А.Н. Колмогорова –

$$\hat{f} = a^2_{\text{®}} + a^2_{\text{¦}} + \left(\frac{i_{\sim f}}{n_{\sim}} - P^*\right)^2 + \left[\sum_{m=1}^{M_k} a^2_{xm} + \frac{1}{n_{\sim}}\sum_{m=1}^{M_k}\left|\text{¡}^2_{xm} - n_{\sim}\right|\right], \qquad (1)$$

где $\Delta_{\text{®}} = \dfrac{M[\text{®}] - \text{®}^*}{\pm^*_{\text{®}}}$, $\Delta_{\text{¦}} = \dfrac{M[\text{¦}] - \text{¦}^*}{\pm^*_{\text{¦}}}$; $\text{®}^*, \text{¦}^*, \pm^*_{\text{®}}, \pm^*_{\text{¦}}$ – желаемые значения ФЦ и их средних квадратических отклонений, $i_{\sim f}$ – количество точек из $n_{\sim}$, попавших в заданный диапазон, $P^*$ – желаемая вероятность достижения заданной ФЦ;

$$\Delta_{xm} = \frac{M_{\sim}\left[x_m\right] - x_{m0}}{\pm_m^*},$$

$$\mathrm{i}_{xm}^{2} = \frac{n_{\sim} M_{\sim}\left[\left(M_{\sim}\left[x_m\right] - x_{m0}\right)^2\right]}{\left(\pm_m^*\right)^2},$$

$x_{m0}$ – значение переменной $x_m$ для прототипа,

$\pm_m^*$ – среднее квадратическое отклонение переменной $x_m$ .

Квазирешение поставленной задачи (нормальное решение) может быть найдено методом регуляризации А. Н. Тихонова [11]:

$$\hat{X}_p^{\circ} = \arg \inf_{X^{\circ} \in D_X} \hat{f}^{\circ}(X^{\circ}, \ \ _p),$$

при условии, что выбранная функция приспособленности – выпуклая функция.

Параметр $\beta_p$ выбирался ( $_{p+1} = \ \ _p / q, q > 1, p = 0,1,2,...)$ в соответствии с обобщенным принципом невязки для нелинейных задач [12, 13]. Рассматривались каждый раз какие-либо экстремали $\hat{X}_p^{\circ}, \hat{X}_{p+1}^{\circ}$ и проверялось выполнение условия

$$\left|\hat{f}_n^{\circ}(\hat{X}_p^{\circ})\right| - C\left(\P_n + h\left\|\Delta x_{m,p+1}^{\circ}\right\|\right) \geq 0, \ C > 1, \ n = 1...N_k,$$

где $\xi_n$ – погрешность определения $\Delta f_n^*$, $h$ – погрешность определения $\hat{f}^{\circ}$.

Если оно выполнялось, то в качестве приближения к квазирешению выбирали экстремаль, подчиненную требованию $\left|f_n^{\circ}(\hat{X}^{\circ})\right| \leq C(\P_n + h\left\|\Delta x_m^{\circ}\right\|)$. В противном случае экстремаль выбиралась из условия $\left|f_n^{\circ}(\hat{X}^{\circ})\right| > C(\P_n + h\left\|\Delta x_m^{\circ}\right\|)$.

**3. Эволюционный метод решения задач стохастической оптимизации**

Определим эволюционный метод как модификацию генетического алгоритма (ГА) для решения поставленной задачи. В данной работе представлены описание ГА и элементы новизны, отличающие предлагаемый эволюционный метод от классического ГА.

Работа ГА начинается с задания ограничений на управляющие переменные, с которыми манипулирует ГА. Обычно такие условия задаются системой неравенств, ограничивающих каждую управляющую переменную с двух сторон: $x_m^{,} \leq x_m \leq x_m^{,,}$, $m = 1...M_d$, где $x_m$ – набор из $M_d$ управляющих переменных; $x_m^{,}$ и $x_m^{,,}$ – их нижние и верхние границы, соответственно. В нашем случае ограничения задавались в виде $X^{\circ} \in O(P, R^{\circ})$, где $O(P, R^{\circ})$ – окружность с центром в точке $P$ и радиусом $R^{\circ}$. В ограниченной таким образом области поиска случайным образом с равномерным или нормальным распределением формируется начальный набор переменных. Набор переменных $x_m$, соответствующий какому-либо решению, будем называть особью, а общий набор особей – популяцией.

ГА манипулирует не десятичными числами, а их представлением в двоичном коде. Чтобы преобразовать число в двоичный вид, прежде всего, следует нормировать область определения кодируемого числа. Для этого сдвигаем область определения $[x_m^{'}, x_m^{''}]$ на величину $x_m^{'}$ (т.е. переходим к области $[0, x_m^{''} - x_m^{'}]$). Далее делим полученный интервал на $n_{\text{m}}$ частей. Число разбиений $n_{\text{m}}$ выбиралось как целая часть величины $n_m = 1/h_m + 1$ таким образом, чтобы целая часть величины $(x_m^{''} - x_m^{'})\text{n}_{\text{m}} + 1$ была кратной 2, где $h_m$ – шаг разбиения ($h_m < \pounds_m$), $\pounds_m$ – заданная погрешность вычислений. Заданному числу $x_m$ в новой области определения поставим в соответствие целую часть следующей величины: $(x_m^{''} - x_m^{'})\text{n}_{\text{m}}$. В итоге описанных преобразований получим неотрицательное целое число, которое далее преобразуем в двоичное число стандартным методом. В этом случае число разрядов двоичного представления $x_m$ будет равно не менее целой части величины $\log_2((x_m^{''} - x_m^{'})\text{n}_{\text{m}} + 1)$. Такое преобразование позволяет существенно уменьшить длину итоговой двоичной записи, и, как результат, уменьшить информационную сложность алгоритма.

Двоичную запись числа $x_m$ в дальнейшем будем называть геном. Последовательность генов, соответствующих $M_d$ управляющим переменным, образует хромосому. Таким образом, каждой особи ставится в соответствие хромосома.

После образования начальной выборки и ее кодирования начинается работа самого ГА (см. рис. 1).

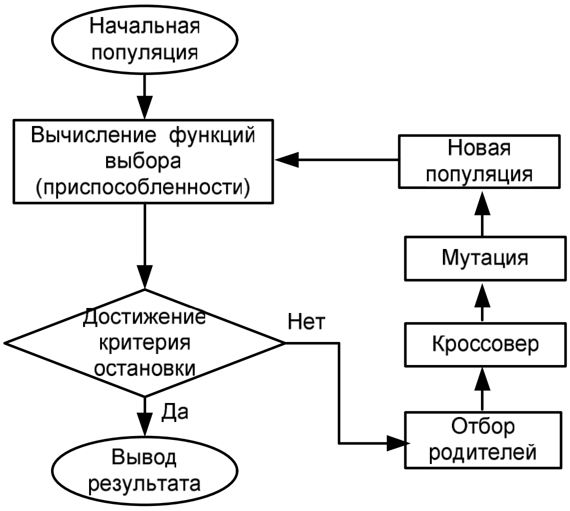



*Рис. 1. Схема работы генетического алгоритма*

В качестве эвристики при отборе родительских особей был выбран метод рулетки. Данный метод позволяет отбирать особи с лучшими значениями скалярной свертки функций выбора с большей вероятностью, чем при равномерной выборке. Для предохранения популяции от доминирования неоптимальной хромосомы и тем самым для предотвращения преждевременной сходимости ГА в случае поиска решений многокритериальных задач параметрической оптимизации (многокритериального принятия решений) использовалось масштабирование функций выбора (2) путем введения функции приспособленности $f_{fit}$ (Fitness function): $f_{fit}(\mathrm{d}) = 1 - \exp(-C \cdot \mathrm{d})$, $C > 1$, где $d$ – аргумент функции приспособленности ( $d > 0$ ).

Генетические операции – кроссовер и мутация в данном алгоритме были основаны на стандартной одноточечной схеме. Одноточечный кроссовер моделируется следующим образом. Пусть имеются две родительские особи с хромосомами $X = \{x_l, l \in [1, L]\}$ и $Y = \{y_l, l \in [1, L]\}$, где L – длина хромосомы особи. Случайным образом с равной вероятностью определяется точка (точка разрыва), разделяющая гены, внутри хромосомы, в которой обе хромосомы делятся на две части и обмениваются ими.

Одноточечная мутация моделируется путем изменения случайного гена в хромосоме особи. В случае двоичного кодирования информации мутация заключается в том, что случайный бит гена изменяется на противоположный.

После проведения операций кроссовера и мутации выбирается наиболее приспособленная особь (в случае поиска решений многокритериальных задач параметрической оптимизации (многокритериального принятия решений) – особь с наиболее подходящей скалярной сверткой функций выбора), которая и помещается в набор особей для следующей итерации алгоритма.

Дополнительно при создании новой популяции использовался также элитный отбор. В рассматриваемом случае для каждой новой популяции отбирались из предыдущей популяции особи, у которых скалярная свертка функций выбора $\hat{f}^{\circ}$ была меньше некоторого порогового значения $\hat{f}^{\circ} < \left\langle \hat{f}^{\circ} \right\rangle$, где $\left\langle \hat{f}^{\circ} \right\rangle$ – среднее значение скалярной свертки функций выбора популяции для текущей эпохи. Элитный отбор способствует быстрой сходимости алгоритма.

Итерации повторяются до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки. Данным условием может служить либо выполнение максимально допустимого количества итераций, либо отсутствие изменений с заданной погрешностью скалярной свертки функций выбора в популяции на протяжении определенного количества эпох. В последнем поколении в качестве рационального решения задачи выбиралась особь, для которой скалярная свертка функций выбора минимальна.

Особенностью классического ГА является быстрая сходимость на первых нескольких итерациях, и, в тоже время, невысокая точность нахождения экстремума для сложных функций выбора.

Одним из средств повышения скорости сходимости ГА является, как известно, кластеризация [5]. Для повышения скорости сходимости и точности нахождения экстремума была разработана процедура адаптации, реализующая идеи кластеризации. Суть этой процедуры заключается в следующем. Вначале происходит первый запуск ГА с равномерным распределением начальной популяции по всей области поиска $[x_m^{'}, x_m^{''}]$ с малым числом эпох. Получаем особь с наилучшей для данных настроек ГА скалярной сверткой функций выбора. Найденный экстремум $\hat{X}^{\circ}$ используется далее как центр новой области определения управляющих переменных алгоритма. Область определения следующей итерации эволюционного метода задаем в виде $\mathrm{D_U} = [\hat{x}_m - (x_m^{''} - x_m^{'})/k_x, \hat{x}_m + (x_m^{''} - x_m^{'})/k_x]$, где $k_x$ – параметр релаксации ($k_x \in [2,4]$). При этом учитывается, что новая область должна полностью лежать в исходной области определения. Поскольку известно, что в данной области экстремум находится около ее центра, то в дальнейшем начальная популяция формируется по нормальному закону распределения. Параметр функции приспособленности $f_{fit}$ для последующей итерации выбирается из условия – $C^{(\mathrm{n+1})} = k_n C^{(n)}$, $k_n$ – параметр релаксации ($\mathrm{k_n} > 1$). Погрешность вычислений в каждой последующей итерации уменьшается пропорционально уменьшению области определения управляющих переменных. Таким образом, последовательно производится запуск ГА с уменьшающимися областью определения управляющих переменных, погрешностью и увеличивающимся параметром функции приспособленности до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки.

Применение в разработанном ЭМ процедуры адаптации от итерации к итерации таких параметров ЭМ, как параметры релаксации и функции приспособленности, обеспечивает не менее чем на 30% информационную сложность предлагаемого ЭМ ниже, чем у классического ГА.

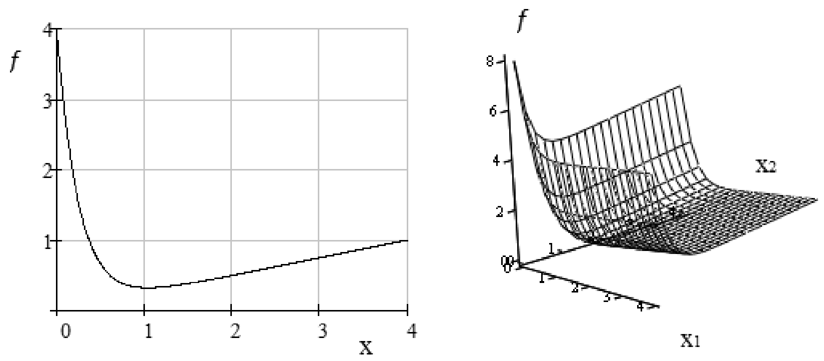
Для решения задач оптимизации или модификации в стохастических постановках необходимо рассчитывать математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ФЦ. Предложен следующий подход: поскольку заранее отсутствует информация о параметрах распределения случайной величины ФЦ, то для их определения для каждого набора управляющих переменных $x_m$ формируется выборка (мини-популяция) с заданными математическим ожиданием $x_{mc}$ и средним квадратическим отклонением $\pm_m$. Далее, на основе сформированной выборки рассчитывается множество значений ФЦ, по которому, в свою очередь, рассчитываются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ФЦ. Причем, чем больший объем выборки, тем более точно будут рассчитаны эти величины. В тоже время необходимо минимизировать размер такой выборки, поскольку даже единичный расчет ФЦ может требовать значительных вычислительных ресурсов. Проведен анализ зависимости точности расчета ФЦ от объема выборки. Рациональной является выборка (мини-популяция) объемом в 100-200 особей, поскольку дальнейшее увеличение выборки не приводит к повышению точности расчета параметров выборки.

**4. Результаты решения тестовых задач**

Рассмотрим пример реализации предложенного многошагового алгоритма решения задачи оптимизации в детерминированной постановке. В качестве тестовой выбрана функция вида

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{x_i}{4} + 4e^{-4x_i} \right), \qquad (2)$$

где n – количество аргументов ФЦ. Выбранная ФЦ при $n = 2$ имеет минимум в точке $\hat{x} = (1.04, 1.04)$: $f(\hat{x}) = 0.645$. Начальная область определения переменных (ООП) выбрана следующая: $D_0 = [0,4] \times [0,4]$. Графики ФЦ при n=1 (а) и n=2 (б) представлены на рис. 2.




*а* *б*

*Рис. 2. Вид ФЦ при n=1(а) и n=2(б)*

В качестве значений параметров настроек ГА в ЭМ были приняты следующие: максимальное количество эпох (итераций на каждом шаге алгоритма) – 10, вероятность кроссовера – 0,9; вероятность мутации – 0,6; размер популяции – 20 особей (мини-популяций), критерий остановки алгоритма – по выполнению заданного количества эпох, принцип отбора родительских особей – рулетка в совокупности с элитарным отбором, мутация и кроссовер – стандартные одноточечные.

На рис. 3 показано изменение ООП для нескольких шагов алгоритма. На рис. 4 показано изменение относительных значений ФЦ $\Delta_f = \frac{|f - \hat{f}|}{\hat{f}}$, где $f$ – значение ФЦ на $n$-том шаге алгоритма, $\hat{f}$ – значение минимума ФЦ, в процессе поиска решения ЭМ. Причем каждая ломаная линия является представлением работы ЭМ на каждом шаге алгоритма.

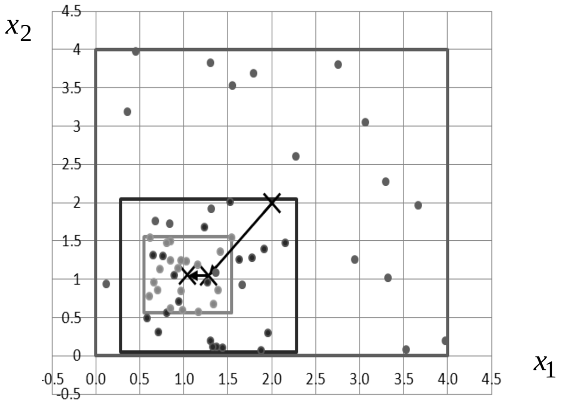



*Рис. 3. Изменение ООП переменных для нескольких шагов алгоритма: линии – области определения переменных $D_{X_k}$ для шага алгоритма, точки – результаты расчета с помощью ГА в пределах кластера, стрелки – направление поиска решения ЭМ*

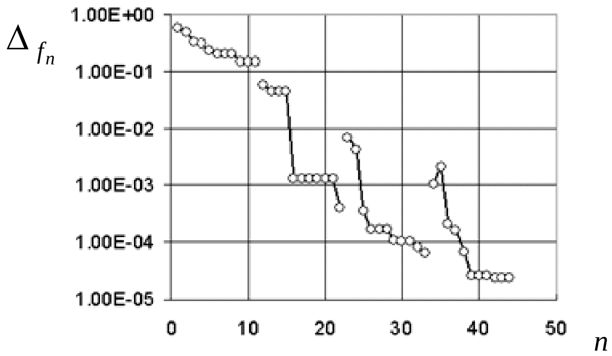



*Рис. 4. Изменение относительных значений ФЦ $\Delta_{f_n}$ от номера шага алгоритма n в процессе поиска решения*

Решением задачи оптимизации в детерминированной постановке является точка $\hat{x} = (1.04, 1.04)$, причем ФЦ в этой точке достигает минимума – $f(\hat{x}) = 0.645$.

Представляет интерес решение задачи модификации – нахождение аргументов, при которых значение ФЦ будет равно заданной величине $f^*$. Условию $f(\hat{x}) = f^* > f_{\min}$ будет соответствовать множество решений. Результаты решения задачи модификации в детерминированной постановке для $f^* = 1$ представлены на рис. 5.

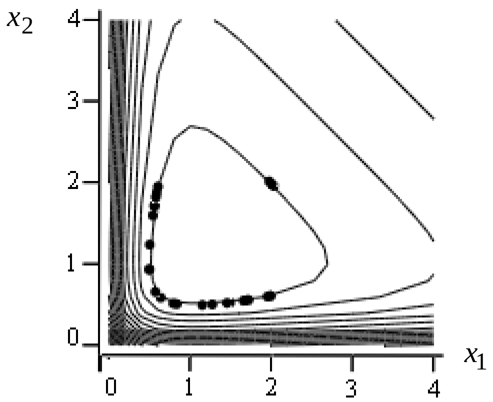
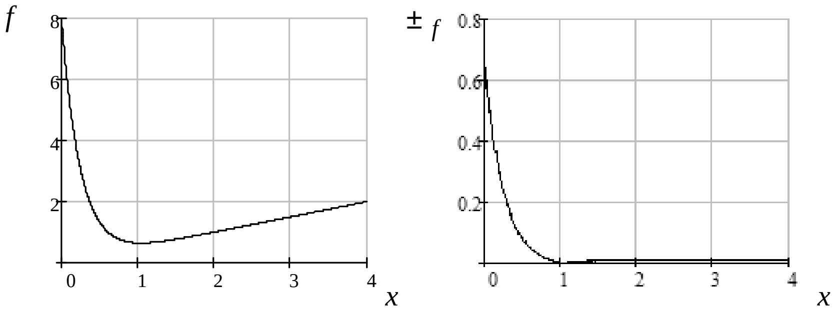



*Рис. 5. Результаты решения задачи модификации в детерминированной постановке для* $f^* = 1$

Для решения задачи модификации в стохастической постановке необходимо выбрать значения средних квадратических отклонений для аргументов ФЦ и желаемое значение среднего квадратического отклонения ФЦ. Выберем средние квадратические отклонения аргументов ФЦ при $n = 2$ : $\pm_x = (0.03, 0.03)$.

На рис. 6 представлен графики зависимостей значений ФЦ вида (2) при $n = 2$ $(x_1 = x_2)$ и ее среднего квадратического отклонения при $\pm_x = 0.03$ от аргумента.




*а* *б*

*Рис. 6. Зависимость значений ФЦ вида (2) при n=2* $(x_1 = x_2)$ *(а) и ее среднего квадратического отклонения (б) при* $\pm_x = 0.03$ *от аргумента*

График зависимости среднего квадратического отклонения ФЦ вида (2) при n=2 $(x_1 = x_2 = 0.611)$ от среднего квадратического отклонения аргумента представлен на рис. 7. Следует выделить, что значения аргументов $x_1 = x_2 = 0.611$ являются нормальным решением задачи модификации в детерминированной постановке методом регуляризации А. Н. Тихонова при $f^* = 1$ (см. рис. 6, а).

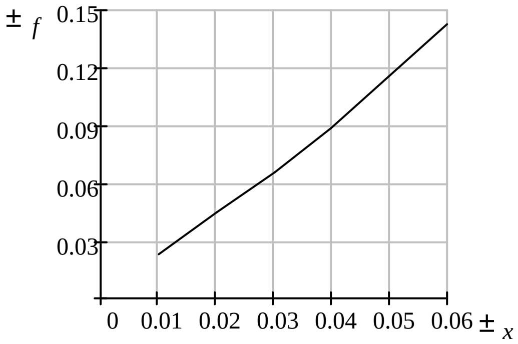



*Рис. 7. Зависимость среднего квадратического отклонения ФЦ вида (2) для n=2* $(x_1 = x_2 = 0.611)$ *от среднего квадратического отклонения аргумента*

Далее при нахождении решений задач модификации в стохастической постановке принималось $\pm_x = 0.03$. Определим значение $\pm_f^* < \pm_{\mathrm{f}}$, где $\pm_f$ – среднее квадратическое отклонение ФЦ вида (2) для n=2 $(x_1 = x_2 = 0.611)$ при $\pm_x = 0.03$. Выберем $\pm_f^* = 0.05$.

Результаты решения задачи модификации в М-постановке для $f^* = 1$ представлены на рис. 8.

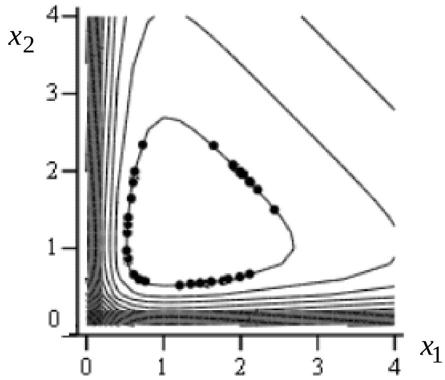



*Рис. 8. Результаты решения задачи модификации в М-постановке для* $f^* = 1$

Результаты решения V-задачи (оптимизации) совпадают с полученными ранее решениями задачи оптимизации в детерминированной и стохастической (М-задача) постановках, поскольку положение минимума значения ФЦ и минимума среднего квадратического отклонения ФЦ совпадают. Результаты решения задачи модификации в V-постановке для $\pm_f^* = 0.05$ представлены на рис. 9. Результаты решения М-задачи (черные точки) и V-задачи (серые точки) не совпадают.

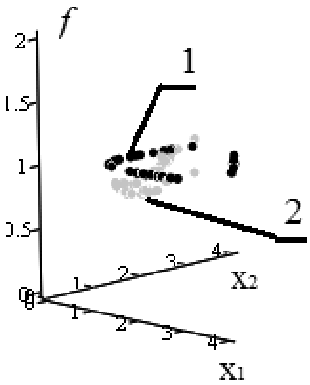



*Рис. 9. Сравнение результатов решения задач модификации в М (1) и V (2) постановках*

На рис. 10 представлены результаты решения ЗСОСУ при $= 0$ для $f^* = 1$ и $\pm_f^* = 0.05$. Для данной задачи характерно, что ее решения ограничены значениями решений М- и V- задач.

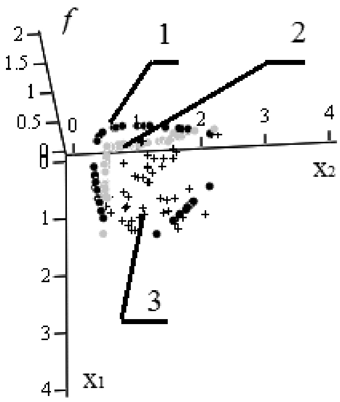



*Рис. 10. Результаты решения ЗСОСУ (множество 3)*

Представленные выше решения задач модификации в стохастической постановке представляют собой множества точек. Для получения нормального решения был использован метод регуляризации А. Н. Тихонова [11-13]. На рис. 11 представлены результаты решения задач модификации в стохастической постановке с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова при $f^* = 1$, $\pm_f^* = 0.05$, $x_{10} = x_{20} = 0.0$, $\pm_1^* = \pm_2^* = 0.03$. Нормальным решением ЗСОСУ является точка $\hat{x}_c = (0.665, 0.665)$, $\pm_x = (0.025, 0.025)$, причем ФЦ в этой точке достигает значения $f_c = 0.892$, $\pm_f = 0.029$ Из рисунка видно, что, хотя значения решений близки, но для всех задач получены разные решения. Причем разница между нормальными решениями в детерминированной постановке и ЗСОСУ составляет $\Delta = \frac{\left| |\bar{r}|_{дет} - |\bar{r}|_{ЗСОСУ} \right|}{|\bar{r}|_{ЗСОСУ}} \cdot 100\% = 8.4\%$, где $\bar{r}_{ЗСОСУ}$ – радиус-вектор нормального решения ЗСОСУ, а $\bar{r}_{дет}$ – радиус-вектор нормального решения в детерминированной постановке.

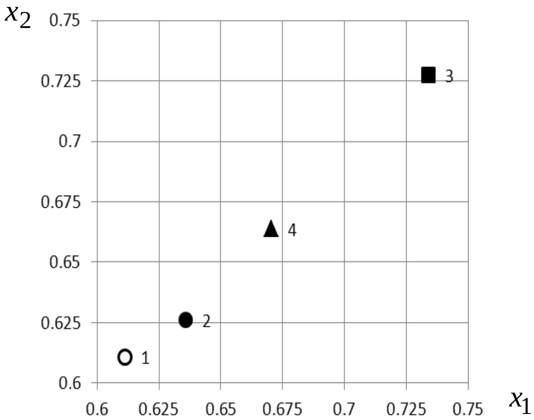



*Рис. 11. Сравнение решений задачи модификации в детерминированной и стохастических постановках с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова: 1–детерминированная постановка,2 – М-задача, 3 – V-задача, 4 – ЗСОСУ*

**5. Заключение**

Рассмотрены математические модели и метод решения задач стохастической оптимизации. Разработан ЭМ нахождения решений таких задач, основанный на ГА. Применение в разработанном ЭМ процедуры адаптации от итерации к итерации таких параметров ЭМ, как параметры релаксации и функции приспособленности, обеспечивает не менее чем на 30% информационную сложность предлагаемого ЭМ ниже, чем у классического ГА.

Представлена методика синтеза нормального решения задач модификации в стохастической постановке со смешанными условиями методом регуляризации А. Н. Тихонова.

Показано, что решения, полученные в детерминированной постановке, могут отличаться на величины значимые с практической точки зрения от решений, полученных с учетом стохастической природы входных данных, что иллюстрирует актуальность применения представленных моделей и метода в инженерной практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов И. А., Скворцов В. В., Мицитис А. К. Исследование и проектирование больших технических систем. – Киев: КИ ВВС, 1995. – 252с.
2. Тоценко В. Г. Методы и системы поддержки принятия решений. – К.: Наукова думка, 2002. – 377 с.

3. Курейчик В. М., Родзин С. И. Эволюционные алгоритмы: генетическое программирование. Обзор // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №1. – С. 127-137.
4. Курейчик В. М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1999. – №1. – С. 144-160.
5. Koza, J. R. Genetic Programming: On the Programming of Computers by means of Natural Selection. – Cambridge MA, MIT Press. – 1992. – 609 с.
6. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер. с польск. И.Д. Рудинского. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.
7. Мелихова О. А. Эволюционные вычисления в системах управления и прогнозирования / О. А. Мелихова, З. А. Мелихова // Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы. – 2007. – № 4. – С. 15-18 .
8. Олейник Д.В. Мультиагентная адаптация гибридного генетического алгоритма для обучения нейросетей / Д. В. Олейник, В. И. Шинкаренко // Искусственный интеллект. – 2008. – № 4. – С. 463-470.
9. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы: под ред. Ю. Ю. Тарасевича. – Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 873 с.
10. Снитюк В. Е. Аспекты эволюционного моделирования в задачах оптимизации / В. Е. Снитюк // Искусственный интеллект. – 2005. – № 4. – С. 284-291.
11. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я.Арсенин. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.
12. Леонов А. С. О выборе параметра регуляризации для нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором / А. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, № 6. – С. 1363-1376.
13. Леонов А. С. О связи метода обобщенной невязки и обобщенного принципа невязки для нелинейных некорректных задач / А. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1982. – Т. 22, №4. – С. 783-790.

Надійшла – 29.02.2012.