УДК 517.911

Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике

М. С. Филипковская
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье рассматривается продолжение решений дифференциальных уравнений, а также дифференциально-алгебраических уравнений с выделенной линейной частью и регулярным характеристическим пучком матриц. Используется метод функций Ляпунова и Ла-Салля для продолжения решений с ограниченного интервала времени на положительную временную полуось. Результаты применяются в системах нелинейной радиотехники при анализе переходных режимов на любом временном интервале.

Ключевые слова: *дифференциальное и дифференциально-алгебраическое уравнение, неограниченная область, неограниченно продолжаемое решение, регулярный пучок, сжимающее отображение.*

В статі розглядається продовження розв'язків диференціальних рівнянь, а також диференціально-алгебраїчних рівнянь з відокремленою лінійною частиною і регулярним характеристичним жмутком матриць. Використовується метод функцій Ляпунова та Ла-Саля для продовження розв'язків з обмеженого часового інтервалу на додатню часову піввісь. Результати застосовуються у системах нелінійної радіотехніки при аналізі перехідних режимів на будь-якому часовому інтервалі.

Ключові слова: *диференціальне та диференціально-алгебраїчне рівняння, необмежена область, необмежено продовжуваний розв'язок, регулярний пучок, стискальне відображення.*

Continuation of solutions of differential equations and differential-algebraic equations with a linear part and a regular characteristic beam of matrixes is considered in the paper. The method of functions of Lyapunov and La Salle to continue solutions from a limited time interval on the positive part of the time axis is used. The results are applied to nonlinear radiotechnics systems to analyze transient states in any time interval.

Key words: *differential and differential-algebraic equation, unbounded domain, indefinitely continuable solution, regular beam, contraction mapping.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В данной работе исследуются продолжения решений дифференциальных уравнений вида $\dot{x} = Sx + \Phi(t,x) + e(t)$ и дифференциально-алгебраических уравнений вида $\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = f(t,x) + e(t)$ для случая регулярного пучка матриц $\lambda A + B$. Дифференциальные уравнения такого вида возникают в радиотехнике, математической физике, экономике, при математическом моделировании электрических и механических систем и других процессов [5, 6, 10]. Целью работы является получение условий продолжения локальных решений уравнений на всю положительную полуось.

Рассмотрены приложения к нелинейным радиотехническим цепям. Получены ограничения на физические параметры, которые обеспечивают гладкую эволюцию системы в течение сколь угодно большого временного периода.

2. Истоки исследования авторов

Предварительно дано обобщение теоремы Ла-Салля и Лефшеца [3] о продолжении решений, ослабляющее ограничения на нелинейную правую часть дифференциального уравнения и позволяющее применить метод Ляпунова [2] для получения признаков ограниченности решений в любом конечном интервале времени. Для доказательства теоремы о продолжении решений полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения использованы спектральные проекторы типа Рисса характеристического пучка матриц, введенные А. Г. Руткасом [5,7], а также специальная матрица G, введенная Власенко Л. А. [7].

3. Продолжение решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием методов Ляпунова

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = F(t,x),\ t \ge 0 \tag{3.1}$$

$$x(0) = x^0, \tag{3.2}$$

где функция $F(t,x) \in C\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ имеет производную $\frac{\partial F}{\partial x}$, непрерывную на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Решением задачи (3.1), (3.2) будем называть непрерывно дифференцируемую n-мерную функцию $x(t)$, определенную на некотором интервале $[0,T)$, удовлетворяющую системе (3.1) и начальному условию (3.2).

Решение $x(t)$ задачи (3.1), (3.2) называется *неограниченно продолжаемым*, если оно может быть продолжено для всех $t \ge 0$. Если решение $x(t)$ имеет *конечное время определения*, то есть не продолжаемо на всю ось $0 \le t < \infty$, то существует такое $T > 0$, что $\lim\limits_{t\to T-0} \|x(t)\| = \infty$ [3].

Согласно [3], скалярная функция $W(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *положительно определена*, если:

а) функция $W(x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в $\mathbb{R}^n$;

б) $W(0) = 0$;

в) $W(x) > 0$, $x \ne 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Скалярная функция $V(t,x)$, $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ *положительно определена*, если:

а) функция $V(t,x)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$;

б) $V(t,0) \equiv 0$ при всех $t \ge 0$;

в) существует такая положительно определенная функция $W(x)$, что $W(x) \le V(t,x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \ge 0$.

В дальнейшем будем рассматривать скалярную положительно определенную функцию $V(t,x)$. Производная функции V в силу системы (3.1) определяется как

$$\dot{V}\Big|_{(3.1)} = \frac{\partial V}{\partial x_1}F_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}F_n + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(gradV, F\right).$$

Для произвольного $T > 0$ введем срезку $F_T(t,x) = \begin{cases} F(t,x), & 0 \le t \le T \\ F(T,x), & t > T \end{cases}$ функции $F(t,x)$ из (3.1), систему

$$\dot{x} = F_T(t,x),\ T < \infty \qquad (3.3)$$

и производную функции V в силу системы (3.3)

$$\dot{V}\Big|_{(3.3)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(gradV, F_T\right).$$

Заметим, что гладкость функции $F_T(t,x)$ такая же, как и у функции $F(t,x)$.

Через Ω^c будем обозначать дополнение произвольного множества Ω в $\mathbb{R}^n$. В работе будет использоваться следующее обобщение теоремы Ла-Салля, Лефшеца [3, гл.IV, теорема XIII] о продолжении решений, позволяющее применить метод Ляпунова [2] для получения признаков ограниченности решений в любом конечном интервале времени.

Лемма 3.1. *Пусть* $\{\Omega_T\}$, $0 < T < \infty$ *– семейство ограниченных множеств из* $\mathbb{R}^n$, *содержащих начало координат. Пусть существуют функции* $V(t,x) \in C^1\left(\left[0,\infty\right) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$, $G(t,v) \in C\left(\left[0,\infty\right) \times \left(0,\infty\right), \mathbb{R}\right)$ *такие, что выполнены следующие условия:*

1) $V(t,x) \to +\infty$, $\|x\| \to \infty$ *равномерно по* t *на каждом конечном интервале* $[a,b)$ ($b > a \ge 0$)*;*

2) *для любого* T, $0 < T < \infty$ *найдется* Ω_T *такое, что*

$$\dot{V}\Big|_{(3.3)} \le G\left(t, V(t,x)\right),\ x \in \Omega_T^c,\ t \ge 0;$$

3) *дифференциальное неравенство* $\dot{v} \le G(t,v)$, $t \ge 0$ *не имеет ни одного положительного решения* $v(t)$ *с конечным временем определения.*

Тогда каждое решение $x(t)$ *системы* (3.1) *неограниченно продолжаемо.*

Доказательство.

Рассмотрим систему (3.3) при фиксированном $T < \infty$. На основании [3, гл.IV, теорема XIII] каждое решение $x_T(t)$ системы (3.3) неограниченно продолжаемо. В силу определения функции $F_T(t,x)$ каждое решение $x_T(t)$ уравнения (3.3) в интервале $[0,T]$ является также решением $x(t)$ системы (3.1) в том же интервале, причем справедливо и обратное заключение. Допустим, решение $x(t)$ системы (3.1) имеет конечное время определения. Тогда существует $\tilde{T} < \infty$ такое, что $\lim\limits_{t \to \tilde{T} - 0} \|x(t)\| = \infty$. Решение $x_{\tilde{T}}(t)$ системы (3.3) совпадает с решением $x(t)$ на $[0, \tilde{T})$, следовательно, $x_{\tilde{T}}(t)$ имеет конечное время определения. Но по доказанному выше, в силу произвольности выбора $T < \infty$, решение $x_{\tilde{T}}(t)$ неограниченно продолжаемо, что приводит нас к противоречию.

Лемма доказана.

4. Достаточное условие продолжаемости решений обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^n$, в котором аддитивно выделено внешнее воздействие, не зависящее от состояния x:

$$\dot{x} = Sx + \Phi(t, x) + e(t), \; t \ge 0 . \qquad (4.1)$$

Выделение в правой части уравнения слагаемого, зависящего только от времени t, обусловлено тем, что в практических задачах нелинейная функция $F(t, x)$ в (3.1) часто имеет вид $F(t, x) = \varphi(x) + f(t)$.

Теорема 4.1. *Пусть* $e(t) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, $\Phi(t, x) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *и* $\dfrac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x}$ *непрерывна по совокупности переменных. Пусть существует постоянная матрица* $H = H^* > 0$ *такая, что для любого конечного интервала* $0 \le t \le T$ ($T < \infty$) *найдется шар в* $\mathbb{R}^n$ *радиуса* $R = R(T)$ *с центром в начале координат, вне которого выполнено следующее условие:*

$$(Hx, \Phi(t, x)) \le 0, \; \|x\| \ge R(T), \; 0 \le t \le T . \qquad (4.2)$$

Тогда для любого $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *существует решение уравнения* (4.1) *на полуоси* $0 \le t < \infty$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$x(0) = x^0 , \qquad (4.3)$$

причем решение единственно на некотором интервале $0 \le t < \varepsilon$.

Доказательство.

Вследствие указанной гладкости функций $e(t)$ и $\Phi(t, x)$ функция $\Psi(t, x) = Sx + \Phi(t, x) + e(t)$ является непрерывной и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}$, $i, j = \overline{1, n}$ на множестве $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Поэтому для любого $x^0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное локальное решение $x(t)$ уравнения (4.1) на некотором интервале $0 \le t < \varepsilon$, удовлетворяющее начальному условию (4.3) [4, с.22, теорема 2].

Рассмотрим функцию $V(x) = \dfrac{1}{2}(Hx, x)$. Очевидно, $V(x)$ положительно определена и $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Градиент функции V равен $gradV(x) = Hx$, производная функции V в силу системы (4.1) имеет вид:

$$\dot{V}\Big|_{(4.1)} = \left(gradV, Sx + \Phi(t,x) + e(t)\right) = \left(Hx, Sx + \Phi(t,x)\right) + \left(Hx, e(t)\right).$$

Для произвольного фиксированного числа $T \in (0,\infty)$ введем срезку функции $\Phi(t,x)$ по переменной t

$$\Phi_T(t,x) = \begin{cases} \Phi(t,x), & 0 \le t \le T \\ \Phi(T,x), & t > T \end{cases}$$

и рассмотрим систему

$$\dot{x} = Sx + \Phi_T(t,x) + e(t). \tag{4.4}$$

Поскольку $H = H^* > 0$, то существует H^{-1} и $H^{\frac{1}{2}} = \left(H^{\frac{1}{2}}\right)^*$, причем

$$\left|(Hx, Sx)\right| \le \|H\|\|S\|\|x\|^2 = \|H\|\|S\|\left(H^{-1}Hx, x\right) \le \|H\|\|S\|\left\|H^{-1}\right\|\left\|H^{\frac{1}{2}}x\right\|^2 = \|H\|\|S\|\left\|H^{-1}\right\|(Hx, x)$$

Выбирая радиус $R = R(T)$ из условия (4.2) и увеличивая его, если необходимо, так чтобы выполнялось неравенство $R(T) \ge \sqrt{\left\|H^{-1}\right\|}$, получаем оценки для производной функции $V(x)$ в силу системы (4.4):

$$\dot{V}\Big|_{(4.4)} = \left(Hx, Sx + \Phi_T(t,x)\right) + \left(Hx, e(t)\right) \le \left|(Hx, Sx)\right| + \left|(Hx, e(t))\right| \le \|H\|\|S\|\left\|H^{-1}\right\|(Hx, x) +$$

$$+ \sqrt{(Hx, x)}\sqrt{(He(t), e(t))} \le \left[\|H\|\|S\|\left\|H^{-1}\right\| + \sqrt{(He(t), e(t))}\right](Hx, x) =$$

$= 2\left[\|H\|\|S\|\left\|H^{-1}\right\| + \sqrt{(He(t), e(t))}\right]V(x)$ для всех x таких, что $\|x\| \ge R(T)$, $R(T) \ge \sqrt{\left\|H^{-1}\right\|}$ и всех $t \ge 0$. Здесь использовано свойство

$$\|x\| \ge R \ge \sqrt{\left\|H^{-1}\right\|} \Rightarrow (Hx, x) \ge \frac{R}{\sqrt{\left\|H^{-1}\right\|}} \ge 1.$$

Обозначим $k(t) = 2\left[\|H\|\|S\|\left\|H^{-1}\right\| + \sqrt{(He(t), e(t))}\right]$, $G(t,V) = k(t)V$. Так как неравенство $\dot{v} \le G(t,v)$, $t \ge 0$ не имеет ни одного положительного решения $v(t)$ с конечным временем определения, то по лемме 3.1. каждое решение $x(t)$ системы (4.1) неограниченно продолжаемо.

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 4.1. при $S = 0$ получаются условия продолжаемости решений для дифференциального уравнения в $\mathbb{R}^n$ вида:

$$\dot{x} = F(t,x) + e(t), \quad t \ge 0. \tag{4.5}$$

Следствие 4.1. *Решение задачи Коши* (4.1), (4.3) *в теореме 4.1 существует и единственно на всей полуоси* $0 \le t < \infty$.

Доказательство.

Решение $x(t)$ задачи (4.1), (4.3) единственно на некотором интервале $0 \le t < \varepsilon$ и неограниченно продолжаемо. Предположим, решение не единственно на $0 \le t < \infty$. Тогда существует $t_1 \ge \varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $x(t)$, $\hat{x}(t)$ с общим значением $x^1 = x(t_1) = \hat{x}(t_1)$. В то же время на некотором интервале $t_1 \le t \le t_2$, $t_2 > t_1$ должно существовать единственное решение дифференциального уравнения (4.1) с начальным значением $x(t_1) = x^1$, что противоречит предположению.

Следствие доказано.

5. Продолжение решений полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения с регулярным пучком

Рассмотрим вырожденное дифференциально-алгебраическое уравнение в пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = f(t,x) + e(t),\ t \ge 0 \tag{5.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x^0. \tag{5.2}$$

Пусть A, B – вещественные матрицы размерности $n \times n$, $\det A = 0$, регулярный матричный пучок $\lambda A + B$ $(\det(\lambda A + B) \not\equiv 0)$ имеет индекс 1: существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что резольвента $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ допускает оценку $\|R(\lambda)\| \le C_1$, $|\lambda| \ge C_2$.

Функция $x(t)$ называется решением задачи (5.1), (5.2) на $[0,T)$, если $x(t) \in C([0,T), \mathbb{R}^n)$, $Ax(t) \in C^1([0,T), \mathbb{R}^n)$, $x(0) = x^0$, $x(t)$ удовлетворяет (5.1) на $[0,T)$.

Обозначим через E единичную матрицу в $\mathbb{R}^n$. В [5,7] введены спектральные проекторы типа Рисса

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda| = C_2} R(\lambda)\, d\lambda A, \quad P_2 = E - P_1$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda| = C_2} AR(\lambda)\, d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1.$$

Пространство $\mathbb{R}^n$ распадается в прямые суммы подпространств [5,7]:

$$\mathbb{R}^n = X_1 \dot{+} X_2 = Y_1 \dot{+} Y_2, \quad X_j = P_j \mathbb{R}^n, \quad Y_j = Q_j \mathbb{R}^n, \quad j = 1,2.$$

В [7] введена обратимая матрица

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B, \quad GX_j = Y_j, \quad j = 1,2.$$

Следующие свойства матрицы G используются в дальнейшем (см. [7, 10]):

$$G^{-1}AP_1 = P_1, \quad G^{-1}BP_2 = P_2, \quad AG^{-1}Q_1 = Q_1, \quad BG^{-1}Q_2 = Q_2.$$

Применяя к уравнению (5.1) проекционные матрицы Q_1, Q_2, а затем матрицу G^{-1}, получаем пару уравнений, эквивалентную одному уравнению (5.1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1(t)}{dt} + G^{-1}Bx^1(t) = G^{-1}Q_1 f\left(t, x^1 + x^2\right) + G^{-1}Q_1 e(t) & (5.3) \\ x^2(t) = G^{-1}Q_2 f\left(t, x^1 + x^2\right) + G^{-1}Q_2 e(t), & (5.4) \end{cases}$$

где $x^1 = P_1 x$, $x^2 = P_2 x$. Пусть в уравнении (5.1) $e(t) \in C\left([0,\infty), \mathbb{R}^n\right)$, $f(t,x) \in C\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ и $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Заметим, что (5.4) эквивалентно уравнению

$$BP_2 x = Q_2\left(f(t,x) + e(t)\right). \qquad (5.5)$$

Алгебраическое уравнение (5.4) трактуется как уравнение $x^2 = \Phi_{x^1}\left(x^2\right)$ относительно функции $x^2(t)$ в пространстве $C\left([0,\infty), P_2\mathbb{R}^n\right)$, где отображение $\Phi_{x^1}\left(x^2\right) = G^{-1}Q_2 f\left(\cdot, x^1 + x^2\right) + G^{-1}Q_2 e(\cdot)$ зависит от параметра x^1.

Пусть существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что для любых $y, z \in C\left([0,\infty), \mathbb{R}^n\right)$ выполнено

$$\left\| G^{-1}Q_2\left(f\left(t, x^1 + P_2 y\right) - f\left(t, x^1 + P_2 z\right)\right)\right\| \le \alpha \left\| P_2 y - P_2 z \right\|, \ t \ge 0, \qquad (5.6)$$

при любом значении параметра $x^1 \in P_1\mathbb{R}^n$.

Тогда по принципу сжимающих отображений существует неподвижная точка $x^2 = \Phi_{x^1}\left(x^2\right)$, $x^2 = \bar{x}^2\left(t, x^1\right)$ при каждом значении параметра $x^1 \in P_1 \mathbb{R}^n$. Функция $\bar{x}^2\left(t, x^1\right)$ – решение уравнения (5.4). Применение теорем о неявной функции [8] гарантирует непрерывность функции $\bar{x}^2\left(t, x^1\right)$, а также существование и непрерывность производной $\dfrac{\partial \bar{x}^2\left(t, x^1\right)}{\partial x^1}$ по совокупности переменных на $[0,\infty)\times P_1\mathbb{R}^n$.

Подставляя $\bar{x}^2$ в (5.3), и обозначая $g\left(t, x^1\right) = G^{-1}Q_1 f\left(t, x^1 + \bar{x}^2\left(t, x^1\right)\right)$, получаем уравнение:

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = -G^{-1}Bx^1(t) + g\left(t, x^1\right) + G^{-1}Q_1 e(t). \qquad (5.7)$$

В силу свойств $f(t,x)$ и $\bar{x}^2\left(t, x^1\right)$ функции $g\left(t, x^1\right)$ и $\dfrac{\partial g\left(t, x^1\right)}{\partial x}$ непрерывны на $[0,\infty)\times P_1\mathbb{R}^n$ по совокупности переменных. Пусть существует постоянная матрица $H = H^* > 0$ такая, что для любого конечного интервала $0 \le t \le T$

($T<\infty$) найдется шар в $P_1\mathbb{R}^n$ радиуса $R=R(T)$ с центром в начале координат, вне которого выполнено следующее условие:

$$\left(Hx^1, g\left(x^1,t\right)\right)\le 0\,,\ \left\|x^1\right\|\ge R(T),\ 0\le t\le T$$

либо, в терминах предыдущих обозначений:

$$\left(HP_1x, G^{-1}Q_1 f\left(t, P_1x+\bar{x}^2\left(t,P_1x\right)\right)\right)\le 0\,,\ \left\|P_1x\right\|\ge R(T),\ 0\le t\le T\,.$$

Пусть начальный элемент x^0 удовлетворяет условию согласования, которое обеспечивает выполнение алгебраического уравнения (5.4) в начальный момент $t_0=0$:

$$BP_2x^0=Q_2\left(f\left(0,x^0\right)+e(0)\right). \qquad (5.8)$$

Тогда по теореме 4.1 существует решение уравнения (5.7) на полуоси $0\le t<\infty$, удовлетворяющее начальному условию $x^1(0)=P_1x^0$.

Доказана

Теорема 5.1. *Пусть в уравнении* (5.1) $f(t,x)\in C\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$, $e(t)\in C\left([0,\infty),\mathbb{R}^n\right)$ *и производная* $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ *непрерывна на* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. *Далее, пусть существует* $\alpha\in(0,1)$ *такое, что для любых* $y,z\in C\left([0,\infty),\mathbb{R}^n\right)$ *выполнено* (5.6) *при каждом* $x^1\in P_1\mathbb{R}^n$, *и существует постоянная матрица* $H=H^*>0$ *такая, что для любого конечного интервала* $0\le t\le T$ ($T<\infty$) *найдется шар в* $P_1\mathbb{R}^n$ *радиуса* $R=R(T)$ *с центром в начале координат, вне которого выполнено условие*

$$\left(HP_1x, G^{-1}Q_1 f(t,x)\right)\le 0\,,\ \left\|P_1x\right\|\ge R(T),\ 0\le t\le T \qquad (5.9)$$

для всех точек $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих* (5.5).

Тогда для любого $x^0\in\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющего условию согласования* (5.8), *существует решение уравнения* (5.1) *на полуоси* $0\le t<\infty$ *с начальным условием* (5.2).

6. Приложения в нелинейной радиотехнике

Пример 1. С помощью теоремы 4.1 докажем существование глобального решения для системы, полученной при рассмотрении импедансной задачи для четырехполюсника (рис. 6.1). Заданы внешние токи $I_1(t)$, $I_2(t)$ и вещественные положительные параметры L, C, r_1, r_2, g_0. Здесь L – индуктивность, C – емкость конденсатора, r_1, r_2 – линейные сопротивления, g_0 – проводимость. Функции φ_1, φ_2 задают нелинейные сопротивления, h – нелинейную проводимость.

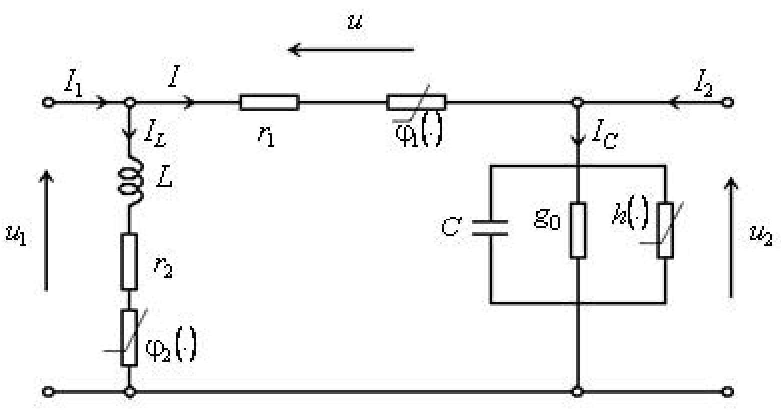

Рис. 6.1. Схема электрической цепи четырехполюсника

Данная цепь описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} L\dfrac{dI_L}{dt} - r_1 I + r_2 I_L - u_2 = \text{¤}_1\left(I\right) - \text{¤}_2\left(I_L\right) \\ C\dfrac{du_2}{dt} - I + g_0 u_2 = I_2 - h\left(u_2\right) \\ I + I_L = I_1 \end{cases}$$

Пусть $\varphi_i(x) = \alpha_i x^3$, $i = 1{,}2$, $h(x) = \alpha_3 x^3$, $\alpha_i > 0$. Обозначим $x = \left(I, I_L, u_2\right)^t = \left(x_1, x_2, x_3\right)^t$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} L\dot{x}_2 - r_1 x_1 + r_2 x_2 - x_3 = \sim_1 x_1^3 - \sim_2 x_2^3 & (6.1) \\ C\dot{x}_3 - x_1 + g_0 x_3 = I_2\left(t\right) - \sim_3 x_3^3 & (6.2) \\ x_1 + x_2 = I_1\left(t\right). & (6.3) \end{cases}$$

Подставляя $x_1 = I_1(t) - x_2$ в (6.1), (6.2) и обозначая $x_2 = u$, $x_3 = v$, получим систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{1}{L}\left[-\left(r_1 + r_2\right)u + v + \sim_1\left(I_1\left(t\right) - u\right)^3 - \sim_2 u^3 + r_1 I_1\left(t\right)\right] \\ \dot{v} = \dfrac{1}{C}\left[-g_0 v - u - \sim_3 v^3 + I_1\left(t\right) + I_2\left(t\right)\right]. \end{cases} \quad (6.4)$$

Обозначим

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -\dfrac{r_1 + r_2}{L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{g_0}{C} \end{pmatrix}, \quad \Phi(t, z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L}\left(\alpha_1\left(I_1(t) - u\right)^3 - \alpha_2 u^3\right) \\ -\dfrac{\alpha_3}{C} v^3 \end{pmatrix},$$

$$e(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{r_1}{L} I_1(t) \\ \dfrac{1}{C}\left(I_1(t) + I_2(t)\right) \end{pmatrix}.$$

Система (6.4) принимает вид:

$$\dot{z} = Sz + \Phi(z,t) + e(t). \qquad (6.5)$$

Поскольку $I_1(t), I_2(t) \in C\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)$, то $e(t) \in C\left([0,\infty),\mathbb{R}^2\right)$, $\Phi(t,z) \in C\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$, $\dfrac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}$ непрерывна по совокупности переменных.

Возьмем $H = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Так как $I_1(t) \in C\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)$, то $|I_1(t)| \le I_T < \infty$, $0 \le t \le T$, для любого $T < \infty$. Тогда для любого конечного интервала $0 \le t \le T$ существует число $R = R(T)$ такое, что

$$(Hz,\Phi(t,z)) = -\left(\alpha_2 u^4 + \alpha_3 v^4\right) + \alpha_1 u\left(I_1(t) - u\right)^3 \le -\left[(\alpha_1 + \alpha_2)u^4 + \alpha_3 v^4\right] +$$
$$+ 3\alpha_1 I_1(t) u^3 + \alpha_1 I_1^3(t) u \le 0, \ \|x\| \ge R(T), \ 0 \le t \le T.$$

По теореме 4.1 для любого $z^0 \in \mathbb{R}^2$ и условия Коши $z(0) = z^0$, существует решение уравнения (6.5) на $0 \le t < \infty$. Следовательно, существует решение системы (6.1), (6.2), (6.3) на $0 \le t < \infty$ с начальным условием $x(0) = x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)^t$ таким, что $x_1^0 + x_2^0 = I_1(0)$.

Пример 2. С помощью теоремы 5.1 докажем существование глобального решения для системы, полученной в гибридной задаче для четырехполюсника рис. 6.1. Пусть заданы внешний ток $I_2(t)$, напряжение $u_1(t)$ и вещественные положительные параметры L, C, r_1, r_2, g_0. Данной цепи соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} L\dfrac{dI_L}{dt} - r_1 I + r_2 I_L - u_2 = ¤_1(I) - ¤_2(I_L) \\ C\dfrac{du_2}{dt} - I + g_0 u_2 = I_2 - h(u_2) \\ u_2 + r_1 I = u_1 - ¤_1(I). \end{cases}$$

Обозначим $x = \left(I, I_L, u_2\right)^t = \left(x_1, x_2, x_3\right)^t$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} L\dot{x}_2 - r_1 x_1 + r_2 x_2 - x_3 = ¤_1(x_1) - ¤_2(x_2) \\ C\dot{x}_3 - x_1 + g_0 x_3 = I_2(t) - h(x_3) \\ x_3 + r_1 x_1 = u_1(t) - ¤_1(x_1) \end{cases} \qquad (6.6)$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g_0 \\ r_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix}$,

$$f(t,x) = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ -h(x_3) \\ -\varphi_1(x_1) \end{pmatrix}.$$

Представим (6.6) в векторном виде

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = \Phi(x) + e(t) \tag{6.7}$$

с начальным условием $x(0) = x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)^t$.

Пусть $I_2(t), u_1(t) \in C\left([0,\infty), \mathbb{R}\right)$, $h(x_3), \varphi_1(x_1)$, ¤$_2(x_2) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, тогда $e(t) \in C\left([0,\infty), \mathbb{R}^3\right)$ и $\Phi(x) \in C^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right)$.

Далее,

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} -r_1 & \lambda L + r_2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda C + g_0 \\ r_1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det(\lambda A + B) = \lambda^2 LCr_1 + \lambda\left(Lg_0 r_1 + L + Cr_2 r_1\right) + r_2\left(1 + g_0 r_1\right) \not\equiv 0$, следовательно, пучок $\lambda A + B$ регулярный. Очевидно резольвента

$$R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} = \frac{1}{\det(\lambda A + B)} \begin{pmatrix} 0 & -(\lambda L + r_2) & (\lambda C + g_0)(\lambda L + r_2) \\ \lambda C r_1 + g_0 r_1 + 1 & 0 & \lambda C r_1 + g_0 r_1 + 1 \\ 0 & \lambda L r_1 + r_1 r_2 & \lambda L + r_2 \end{pmatrix}$$

ограничена для больших λ.

Спектральные проекторы, матрицы G, G^{-1} и проекции x^1, x^2 из пункта 5 легко вычисляются:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & r_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -r_1^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{Cr_1} & \dfrac{Cr_1 - 1}{Cr_1^2} \\ L^{-1} & 0 & L^{-1} \\ 0 & \dfrac{1}{C} & \dfrac{1}{Cr_1} \end{pmatrix},\ x^1 = P_1 x = \begin{pmatrix} -r_1^{-1} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ x^2 = P_2 x = \begin{pmatrix} x_1 + r_1^{-1} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условий теоремы 5.1.

Если

$$\exists\alpha\in(0,1)\ \forall\ u, v\in\mathbb{R}:\ \left|\varphi_1(u)-\varphi_1(v)\right|\le r_1\alpha\left|u-v\right|, \qquad (6.8)$$

то для любых $y,z\in C\left([0,\infty),\mathbb{R}^3\right)$ выполнено

$$\left\|G^{-1}Q_2\left[\Phi\left(x^1+P_2y\right)-\Phi\left(x^2+P_2z\right)\right]\right\|=\frac{1}{r_1}\left\|\begin{pmatrix}\varphi_1\left(y_1+r_1^{-1}y_3-r_1^{-1}x_3\right)-\varphi_1\left(z_1+r_1^{-1}z_3-r_1^{-1}x_3\right)\\0\\0\end{pmatrix}\right\|$$

$$\le\alpha\left\|\begin{pmatrix}y_1+r_1^{-1}y_3\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z_1+r_1^{-1}z_3\\0\\0\end{pmatrix}\right\|=\alpha\left\|P_2y-P_2z\right\| \text{ при каждом } x^1\in P_1\mathbb{R}^3.$$

Выберем $H=\begin{pmatrix}Cr_1&0&0\\0&L&0\\0&0&Cr_1\end{pmatrix}$. Очевидно,

$$H=H^*>0,\ HP_1x=\begin{pmatrix}-Cx_3\\Lx_2\\Cr_1x_3\end{pmatrix}.\ G^{-1}Q_1\Phi(x)=\begin{pmatrix}C^{-1}r_1^{-2}\left[r_1h(x_3)+\varphi_1(x_1)\right]\\-\frac{1}{L}\varphi_2(x_2)\\-(Cr_1)^{-1}\left[r_1h(x_3)+\varphi_1(x_1)\right]\end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi_2(x_2)=ax_2^3,\ h(x_3)=bx_3^3,\ a,b>0$.

Покажем, что для любого конечного интервала $0\le t\le T$ найдется $R=R(T)$, для которого $\left(HP_1x,G^{-1}Q_1\Phi(x)\right)=-\left(r_1^{-2}+1\right)x_3\left[r_1h(x_3)+\varphi_1(x_1)\right]-x_2\varphi_2(x_2)=$ $=-\left(r_1^{-2}+1\right)r_1bx_3^4-ax_2^4-\left(r_1^{-2}+1\right)x_3\varphi_1(x_1)\le 0$ при $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ таких, что $\left\|P_1x\right\|=\sqrt{x_2^2+x_3^2\left(r_1^{-2}+1\right)}\ge R(T)$ и

$$x_3=-r_1x_1-\varphi_1(x_1)+u_1(t). \qquad (6.9)$$

Потребуем, чтобы $\operatorname{sgn}\varphi_1(x_1)=\operatorname{sgn}x_1$; это верно для пассивного сопротивления, которое является линейным, кубическим и др. Из (6.8) следует, что $\left|\varphi_1(u)\right|\le r_1\alpha\left|u\right|$. Функция $u_1(t)$ ограничена на $0\le t\le T$. В силу равенства (6.9) функции x_1 и x_3 ограничены или неограничены одновременно на $0\le t\le T$. Если x_1 – некоторая ограниченная функция, то в силу ограниченности x_3 и неравенства $\sqrt{x_2^2+x_3^2\left(r_1^{-2}+1\right)}\ge R$ компонента $x_2\to\infty$ при $R\to\infty$. Но при $x_1\to\infty$ компонента $x_3\to\infty$, причем $\left|x_3\right|\approx\tilde{r}\left|x_1\right|$, где $\tilde{r}>0$ – некоторая постоянная, $0\le t\le T$. Получаем:

$$\left(HP_1x,G^{-1}Q_1\Phi(x)\right)\le-\left(r_1^{-2}+1\right)r_1bx_3^4-ax_2^4+\left(r_1^{-2}+1\right)r_1\alpha\left|x_3\right|\left|x_1\right|\le 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Следовательно, существует достаточно большое R такое, что выполнено условие (5.9) для всех точек $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению $BP_2x=Q_2\big(f(t,x)+e(t)\big)$ или (6.9).

По теореме 5.1 для любого $x^0\in\mathbb{R}^3$, удовлетворяющего условию согласования $BP_2x^0=Q_2f(0,x^0)+Q_2e(0)$, существует решение уравнения (6.7) на полуоси $0\le t<\infty$ с начальным условием $x(0)=x^0$ для нелинейных сопротивлений $\varphi_2(x_2)=ax_2^3$, $h(x_3)=bx_3^3$, $a,b>0$ и φ_1 такого, что $\operatorname{sgn}\varphi_1(x_1)=\operatorname{sgn}x_1$ и выполнено (6.8). Заметим, что от функций φ_2 и h достаточно потребовать выполнение следующих условий: $\varphi_2(x_2)$, $h(x_3)$ – непрерывно дифференцируемые функции, такие что $x_2\varphi_2(x_2)\ge 0$, $x_3h(x_3)\ge 0$ и $-\left(r_1^{-2}+1\right)r_1x_3h(x_3)-x_2\varphi_2(x_2)\le\left(r_1^{-2}+1\right)x_3\varphi_1(x_1)$ для $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ таких, что $\|P_1x\|=\sqrt{x_2^2+x_3^2\left(r_1^{-2}+1\right)}\ge R(T)$, выполнено (6.9). В частности, этим условиям удовлетворяют функции вида dw^{2k+1}, $d>0$, $w\in\mathbb{R}$ при любом натуральном k.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

В работе получены условия неограниченной продолжаемости решений дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным характеристическим пучком. Результаты применяются к анализу непериодических колебаний двух нелинейных радиотехнических цепей, указываются ограничения на их нелинейные параметры и функции внешних источников, гарантирующие существование непрерывных колебаний на положительной полуоси времени с корректной зависимостью от начальных данных.

В дальнейшем предполагается получение более общих условий продолжаемости решений с ослаблением ограничений и расширением класса исследуемых уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 475 с.
2. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
3. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
5. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения Ax′(t)+Bx(t)=f(t) // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т.11, № 11. – С. 1996-2010.

6. Favini A., Rutkas A. Existence and uniqueness of solutions of some degenerate nonlinear equations // Differential and Integral Equations. – 1999. – Vol. 12, N 3. – P. 373-394.
7. Rutkas A. G., Vlasenko L. A. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // Nonlinear Analysis. TMA. – 2003. – Vol. 55, N 1-2. – P. 125-139.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ – М.: Наука, 1984. – 752 с.
9. Филипковская М. С. О продолжении решений полулинейного вырожденного уравнения // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях.: тезисы докладов межд. конференции. – Х.: Вировец А. П. «Апостроф», 2011. – С. 242-243.
10. Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006. – 273 с.

Надійшла – 16.03.2012.