УДК 517.968+517.956

Математическое моделирование первой основной задачи динамики тонких упругих пластин методами теории потенциалов

Ю. С. Шувалова
Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Украина

Построена математическая модель динамики тонких упругих пластин в рамках модели Кирхгофа, которая основана на представлении решения задачи потенциалом двойного слоя. В основе модели лежит система интегральных уравнений. Проведен численный эксперимент, в ходе которого показана возможность решения данной системы уравнений при помощи метода дискретных особенностей – без использования методов типа конечных разностей или конечных элементов.

Ключевые слова: *тонкие упругие пластины, нестационарные системы граничных уравнений.*

Побудовано математичну модель динаміки тонкої пружної пластини в рамках моделі Кірхгофа, яка ґрунтується на зображенні розв’язку задачі потенціалом подвійного шару. В основі моделі лежить система інтегральних рівнянь. Проведено чисельний експеримент, в ході якого показано можливість рішення даної системи рівнянь за допомогою методу дискретних особливостей – без використання методів типу скінченних різниць або скінечнних елементів.

Ключові слова: *тонкі пружні пластини, нестаціонарні системи граничних рівнянь.*

A mathematical model of the dynamics of thin elastic plates in the Kirchhoff model was build. The model is based on representing the solution as the double-layer potential. It consists of a system of integral equations. Numerical experiment was carried out which showed the possibility of solving these equations with the discrete singularities method and without using finite differences or finite elements.

Key words: *thin elastic plate, non-stationary system of boundary equations.*

1. Применение метода потенциалов к моделированию динамических процессов

Рассмотрим первую основную задачу динамики тонких упругих пластин в рамках модели Кирхгофа для прямоугольной пластины (рис. 1.1).

$$
\begin{aligned}
&{}^{\circ}\, h\partial_t^2 u(x,t) + \hat{D}\Delta^2 u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega^{\pm} \times \mathrm{R}_+, \\
&u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega^{\pm}, \qquad (1.1) \\
&u(x,t) = f_1(x,t), \quad \partial_n u(x,t) = f_2(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma^{+},
\end{aligned}
$$

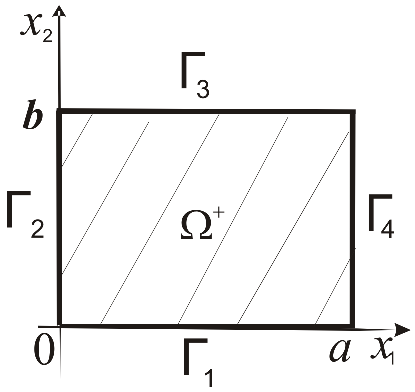

Рис. 1.1. Прямоугольная пластина

Решение задачи (1.1) можно представить в виде потенциала двойного слоя с двухкомпонентной плотностью $\vec{\varphi}(x,t)=(\varphi_1(x,t),\ \varphi_2(x,t))$ [1].

$$\left(W\vec{\varphi}\right)(x,t)=\int_{\Sigma}\left\{Q_y\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\varphi_1(y,\tau)-M_y\Phi\left(x-y,t-\tau\right)\varphi_2(y,\tau)\right\}ds_y d\tau, \quad (1.2)$$

где $\Phi(x,t)=-\dfrac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{D}}\displaystyle\int_{\frac{|x|^2}{4\sqrt{D}t}}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi$ – фундаментальное решение уравнения колебаний пластины.

Пусть $u(x,t)=(W\vec{\varphi})(x,t)$, учитывая геометрию границы, выбранной области, $\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{4}\Gamma_i$, $\Gamma_1=\left\{0\le x_1\le a, x_2=0\right\}$, $\Gamma_2=\left\{x_1=0, 0\le x_2\le b\right\}$, $\Gamma_3=\left\{0\le x_1\le a, x_2=b\right\}$, $\Gamma_4=\left\{x_1=a, 0\le x_2\le b\right\}$ был получен явный вид граничных уравнений

$$\begin{cases}\mp\dfrac{1}{2}\varphi_1(x,t)+\sum\limits_{k=1}^{2}\left[\int\limits_{\Gamma}\varphi_k(y,t)\mathrm{P}_k(x-y,t)ds_y+\right.\\ \left.+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{\varphi_k(y,t)-\varphi_k(y,\tau)}{(t-\tau)^2}\tilde{\mathrm{P}}_k(x-y,t-\tau)ds_y d\tau\right]=f_1(x,t),\quad x\in\Gamma;\\ \mp\dfrac{1}{2}\varphi_2(x,t)+\sum\limits_{k=1}^{2}\left[\int\limits_{\Gamma}\varphi_k(y,t)\Pi_k(x-y,t)ds_y+\right.\\ \left.+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{\varphi_k(y,t)-\varphi_k(y,\tau)}{(t-\tau)^2}\tilde{\Pi}_k(x-y,t-\tau)ds_y d\tau\right]=f_2(x,t),\quad x\in\Gamma;\end{cases} \quad (1.3)$$

Рассмотрим подробнее ядра этих уравнений. Пусть внешняя переменная $x=(x_1;0)\in\Gamma_1$, $0\le x_1\le a$. Например, для $y=(s,0)\in\Gamma_1$, $0\le s\le a$ получаем явный вид ядер первого уравнения (1.3)

$$P_1(x-y,t)=\begin{bmatrix} x=(x_1,0) \\ y=(s,0) \end{bmatrix}=\int_0^{\infty}\frac{¯(t-²)}{4®}\left(\text{s}_{0,x_1-s}\sin z_{0,x_1-s}-¶_{0,x_1-s}\cos z_{0,x_1-s}\right)d² =0$$

$$P_2(x-y,t)=\begin{bmatrix} x=(x_1,0) \\ y=(s,0) \end{bmatrix}=\int_0^{\infty}\frac{¯(t-²)}{4®}\left(¦_{0,x_1-s}\cos z_{0,x_1-s}-\text{g}_{0,x_1-s}\sin z_{0,x_1-s}\right)d² =$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{¯(t-²)}{4®}\left(\frac{¬(x_1-s)^2}{(t-²)(x_1-s)^2}\cos\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}(t-²)}+2\sqrt{D}\frac{(1-¬)(x_1-s)^2}{(x_1-s)^4}\sin\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}(t-²)}\right)d² =$$

$$=-\frac{¯(t)t¬\sqrt{D}}{®(x_1-s)^2}\sin\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}t}+\int_0^{\infty}\frac{¯(t-²)(1+¬)\sqrt{D}}{2®(x_1-s)^2}\sin\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}(t-²)}d² \approx$$

$$\approx\frac{¯(t)}{®}\left(-¬+\frac{1+¬}{8}\ln t+\frac{(x_1-s)^4}{1536Dt^2}(1+5¬)\right).$$

Ядра второго интегрального уравнения (1.3) имеют вид

$$\Pi_1(x-y,t)=\begin{bmatrix} x=(x_1,0) \\ y=(s,0) \end{bmatrix}=$$

$$=\partial_n\left(\int_0^{\infty}\frac{¯(t-²)}{4®}\left(\text{s}_{0,x_1-s}\sin z_{0,x_1-s}-¶_{0,x_1-s}\cos z_{0,x_1-s}\right)d² \right)=$$

$$=-\int_0^{\infty}\frac{¯(t-²)}{4®}\left(\left(\frac{2-¬}{2\sqrt{D}(t-²)^2}-\frac{12(1-¬)}{(x_1-s)^4}\right)\sin\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}(t-²)}+\right.$$

$$\left.+\frac{3(1-¬)}{(t-²)(x_1-s)^2}\cos\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}(t-²)}\right)d² =$$

$$=\frac{¯(t)}{®}\left(\frac{3\sqrt{D}(1-¬)}{(x_1-s)^4}\sin\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}t}-\frac{(2-¬)}{2(x_1-s)^2}\cos\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}t}\right)\approx$$

$$\approx\frac{¯(t)}{®}\left(\frac{1}{(x_1-s)^2}\left(\frac{3(1-¬)}{4t}-\frac{2-¬}{2}\right)+(x_1-s)^2\left(\frac{2-¬}{64Dt^2}-\frac{1-¬}{384Dt^3}\right)\right),$$

$$\Pi_2(x-y,t)=\begin{bmatrix} x=(x_1,0) \\ y=(s,0) \end{bmatrix}=$$

$$=\partial_n\left(\int_0^{\infty}\frac{¯(t-²)}{4®}\left(¦_{0,x_1-s}\cos z_{0,x_1-s}-\text{g}_{0,x_1-s}\sin z_{0,x_1-s}\right)d² \right)=0.$$

На остальных частях границы интегральные уравнения выписываются аналогично.

Для решения этих уравнений был применен метод дискретных особенностей. Граница Г разбивалась равные части так, чтоб угловые точки попали на стык отрезков разбиения. На каждом отрезке неизвестные компоненты плотности потенциала двойного слоя $\vec{\ }(y,t)=\{\ _1(y,t),\ _2(y,t)\}$ считались кусочно-постоянными ($_{1i}(y,t)=const,\quad _{2i}(y,t)=const,$). Это допущение приводит систему интегральных уравнений (1.3) к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных $_{1i}(y,t),\quad _{2i}(y,t)$.

Например, при интегрировании по Γ_1 интеграл первого уравнения (1.3) не имеет особенностей по пространственной переменной

$$\int\limits_{\Gamma_1}\ _2(y,t)\mathrm{P}_2(x-y,t)ds_y\approx\sum_{i=1}^{n}\ _{2i}\frac{\bar{\ }(t)}{®}\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i}\left(-\neg+\frac{1+\neg}{8}\ln t+\frac{(x_1-s)^4}{1536Dt^2}(1+5\neg)\right)ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ _{2i}\frac{\bar{\ }(t)}{®}\left[\frac{-8\neg+(1+\neg)\ln t}{8}s+\frac{(1+5\neg)(x_1-s)^5}{7680Dt^2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i}.$$

Второе уравнение (1.3) содержит гиперсингулярный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_1}\ _1(y,t)\Pi_1(x-y,t)ds_y\approx$$

$$\approx\sum_{i=1}^{n}\ _{1i}\frac{\bar{\ }(t)}{®}\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i}\left(\frac{1}{(x_1-s)^2}\left(\frac{3(1-\neg)}{4t}-\frac{2-\neg}{2}\right)+(x_1-s)^2\left(\frac{2-\neg}{64Dt^2}-\frac{1-\neg}{384Dt^3}\right)\right)ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ _{1i}\frac{\bar{\ }(t)}{®}\left[\frac{1}{(x_1-s)}\left(\frac{3(1-\neg)}{4t}-\frac{2-\neg}{2}\right)-\frac{(x_1-s)^3}{3}\left(\frac{2-\neg}{64Dt^2}-\frac{1-\neg}{384Dt^3}\right)\right]_{a_{i-1}}^{a_i}.$$

Первое слагаемое понимаем как интеграл в смысле Адамара [2]

$$\int\frac{dy}{y^2}=\mathrm{Re}\lim_{£\to0}\int\frac{dy}{(y+i£)^2}=\lim_{£\to0}\int\frac{y^2-£^2}{(y^2+£^2)^2}dy=\lim_{£\to0}\frac{1}{£}\cdot\frac{y£}{£^2+y^2}=-\frac{1}{y}+c.$$

При интегрировании по остальным частям границы были получены аналогичные результаты.

Решая систему (1.3), находим неизвестные компоненты плотности $_{1i}(y,t),\quad _{2i}(y,t)$, по ним строим потенциал двойного слоя (1.2), который дает решение исходной задачи (1.1).

Заметим, что рассмотрение однородного уравнения колебаний пластины и однородных начальных условий в задаче (1.1) не ограничивает общности задачи. Имеющиеся неоднородности с помощью объемного и начальных потенциалов с помощью стандартной процедуры можно перенести в граничные условия [1].

2. Численный эксперимент

Для получения численных результатов была рассмотрена стальная квадратная пластина с длиной стороны 1(м), толщина пластины $h=0,05$ (м), коэффициент Пуассона $\neg=0,3$, плотность пластины $°=7800$ (кг/м3), модуль Юнга $E=2,1\cdot105$ (МПа). Начальные условия нулевые. Края пластины жестко закреплены. Пластина находится под действием равномерно распределенной нестационарной нагрузки в виде гладкого импульса

$$q = \begin{cases} q_0 \sin^2 0{,}1\text{®} t, & t < 10; \\ 0 \qquad\qquad , & t \geq 10. \end{cases} \qquad (2.1)$$

На рисунке 2.1 изображено решение задачи (1.1) в средней точке пластины под действием нагрузки гладкий импульс (2.1).

Предложенный метод позволяет находить смещение в любой точке пластины в любой момент времени без использования методов типа конечных разностей или конечных элементов. На рисунках 2.2-2.5 изображена форма срединной плоскости пластины, находящейся под действием нестационарной нагрузки гладкий импульс (2.1), в различные моменты времени.

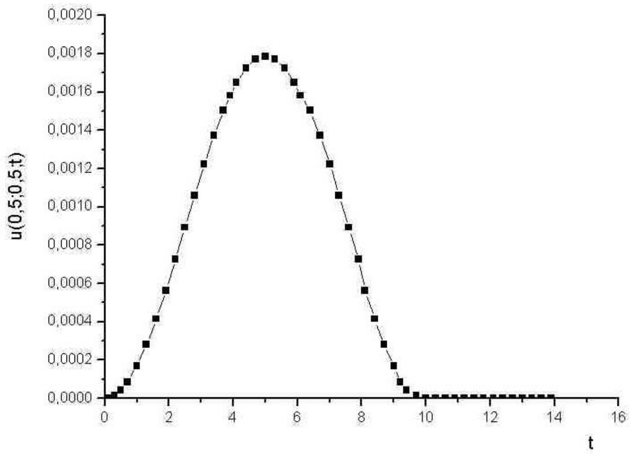

Рис. 2.1. Смещение в середине пластины

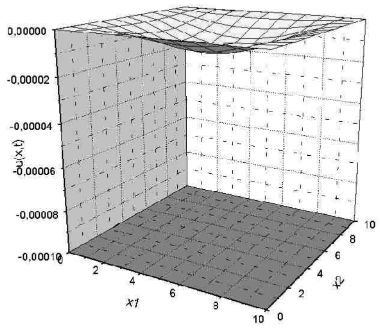

Рис. 2.2. Форма срединной плоскости пластины $t = 2c$

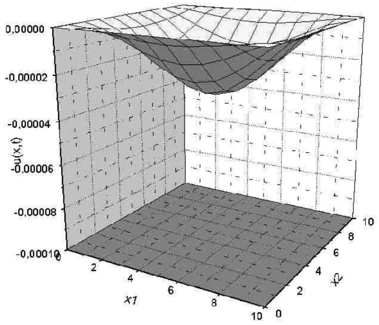

Рис. 2.3. Форма плоскости пластины $t = 4c$

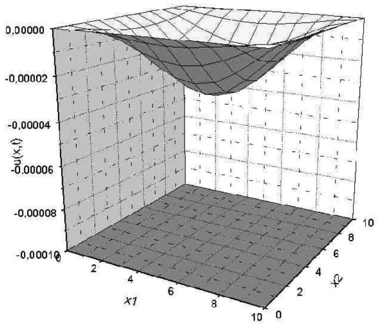

Рис. 2.4. Форма плоскости пластины $t = 6c$

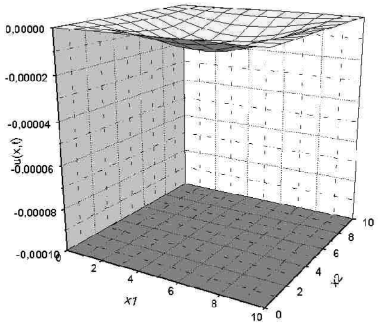

Рис. 2.5. Форма плоскости пластины $t = 8c$

ЛИТЕРАТУРА

1. Chudinovich I. Yu., Gassan Yu. S. Boundary Equations in basic Dynanic Problems for Thin Elastic Plates // Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – № 475. – С. 250-258.
2. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учеб. пособие. – Харьков: ХНУ, 2001. – 92 с.

Надійшла – 15.03.2012.