УДК 517.958

Граничные интегральные уравнения задач дифракции поляризованных волн на экранированной многослойной системе импедансных лент

В. Д. Душкин
Академия ВВ МВС Украины, г. Харьков, Украина

Получена система граничных интегральных уравнений задач дифракции монохроматических E-поляризованных и H-поляризованных волн на экранированной многослойной системе лент. При получении интегральных уравнений был применён метод параметрических представлений интегральных преобразований. Полученную систему уравнений можно численно решить с помощью метода дискретных особенностей.

Ключевые слова: *краевые задачи, метод параметрических представлений интегральных преобразований, граничные интегральные уравнения.*

Отримано систему граничних інтегральних рівнянь задач дифракції монохроматичних E-поляризовних та H-поляризовних хвиль на екранованій багатошаровій системі стрічок. При виведенні інтегральних рівнянь був застосований метод параметричних уявлень інтегральних перетворень. Отриману систему інтегральних рівнянь можна розв'язати чисельно за допомогою методу дискретних особливостей.

Ключові слова: *крайові задачі, метод параметричних уявлень інтегральних перетворень, граничні інтегральні рівняння.*

The system of boundary integral equations of polarized waves' diffraction problems on a shielded multi-layered system of impedance strips had been obtained. The method of parametric representations of integral transforms was applied for reception of integral equations. The obtained system of equations can be solved numerically using the method of discrete singularities.

Key words: *boundary problems, the method of parametric representations of integral transforms, boundary integral equations.*

1. Актуальность проблемы. Истоки исследования.

В последние десятилетия интерес исследователей, вызывают разнообразные электродинамические устройства, которые позволяют получить значительное увеличение значений электромагнитных полей в отдельных точках пространства $[1-4]$. Такой эффект достигается в большинстве случаев за счет специального расположение различных элементов структур в пространстве и специально выбранного соотношение между геометрическими размерами элементов структур. Также необходимая структура поля достигается за счет специального выбора материалов, из которых изготавливаются элементы структуры и учета конечной проводимости материалов $[5,6]$.

Поэтому построение математических моделей процессов рассеяния электромагнитных волн на структурах, которые состоят из большого количества элементов и учитывают электродинамические свойства материалов, из которых изготовлены решетки, является актуальной задачей для исследователей.

Одним из эффективных способов, который позволяет построить математические модели рассеяния электромагнитных волн на структурах сложной геометрической формы является метод параметрических представлений интегральных преобразований $[7-9]$. Этот метод позволяет свести выходные краевые задачи для уравнений Максвелла к эквивалентным системам интегральных уравнений. Полученные системы интегральных уравнений решаются численно с помощью метода дискретных особенностей $[9-11]$.

С помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований разработано большое количество математических моделей различных электродинамических процессов и проведен численный эксперимент на их основе. В частности, в работе $[12]$ были получены граничные интегральные уравнения задачи дифракции на многослойной системе импедансных лент. Основываясь на идеях этой работы можно построить математическую модель рассеяния электромагнитных волн экранированной системой импедансных лент.

Цель статьи - с помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований получить систему граничных интегральных уравнений задач дифракции монохроматических Е-поляризованных и Н-поляризованных волн на экранированной многослойной системе лент.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую дифракционную структуру (см. рис. 1). В однородной изотропной среде с параметрами $\varepsilon=1$, $\mu=1$ располагается электродинамическая структура, состоящая из конечного числа бесконечно тонких импедансных лент и экрана. Эти ленты расположены в N плоскостях над экраном. Все элементы дифракционной структуры имеют одинаковую конечную проводимость. Введем декартову систему координат так, чтобы координатная плоскость XOY , была параллельна плоскостям лент, а ось OX - параллельна к ребрам лент. Введем следующие обозначения $L_{pq}=(\alpha_{pq},\beta_{pq})$ - проекций на ось OY лент с индексом q, лежащих в плоскости $z=z_p$. Экран расположен в плоскости $z=z_0$.

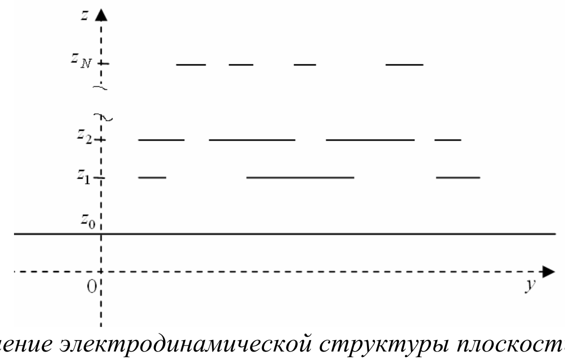

Рис. 1 Сечение электродинамической структуры плоскостью YOZ.

Пусть из бесконечности сверху на описанную дифракционную структуру наклонно падает Н-поляризованная плоская электромагнитная волна единичной амплитуды:

$$U(y,z)=H_x(y,z)=\exp\bigl(ik\bigl(y\cdot\sin\varphi-z\cdot\cos\varphi\bigr)\bigr),\quad k=\omega\cdot c^{-1}. \tag{1}$$

Зависимость поля от времени даётся множителем $e^{-i\omega t}$.

В задаче необходимо найти полное поле $u(y,z)$, которое возникло в результате дифракции волны на решетке. Полное поле $u(y,z)$ является решением уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u+k^2u=0, \tag{2}$$

в области Ω, которая представляет часть пространства вне лент. Это решение удовлетворяет импедансным граничным условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial n}-h\cdot u_{(y,z)\in\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

которые являются следствием граничных условий Щукина-Леонтовича, и условию конечности энергии в любой ограниченной области плоскости. Также разность полного и падающего поля удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда. Заметим, что в случае Е-поляризации задача для единственной отличной от нуля компоненты электрического поля $E_x(y,z)$ ставится аналогично.

Введем функцию $u_0(y,z)$, которая имеет вид:

$$u_0(y,z)=\exp\bigl(ik\bigl(y\cdot\sin\varphi-z\cdot\cos\varphi\bigr)\bigr)+\frac{ik+h}{ik-h}\exp\bigl(ik\bigl(y\cdot\sin\varphi+z\cdot\cos\varphi-2z_0\bigr)\bigr) \tag{4}$$

и обладает свойством:

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}(y,z_0)-h\cdot u_0(y,z_0)=0. \tag{5}$$

Определим области

$$\Omega_q=\bigl\{(\mathrm{y,z})\big|\quad z_q<z<z_{q+1},\quad q=0,\dots,N\bigr\}, \tag{6}$$

где $z_{N+1}=+\infty$. Полное поле $u(y,z)$ в каждой из областей Ω_q будем искать в виде:

$$u(y,z)=u_0(y,z)+u_q(y,z),\quad (y,z)\in\Omega_q; \tag{7}$$

где

$$u_q(y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(C_q^+(\lambda)\cdot e^{\gamma(\lambda)(z_q-z)}+C_q^-(\lambda)\cdot e^{\gamma(\lambda)(z-z_{q+1})}\right)\cdot e^{i\lambda y}d\lambda, \tag{8}$$

$$q=0,\dots,N;$$

$$\gamma(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-k^2},\quad \lambda\in R. \tag{9}$$

Условия излучения Зоммерфельда будут выполнены, если

$$\mathrm{Re}\bigl(\gamma(\lambda)\bigr)\ge 0,\quad \mathrm{Im}\bigl(\gamma(\lambda)\bigr)\le 0,\quad C_N^-(\lambda)=0,\quad \lambda\in R. \tag{10}$$

Следствием граничных условий на экране (3), (6) является равенство:

$$C_0^+(\lambda)=M(\lambda)\cdot\exp\bigl(-\gamma(\lambda)h_{0,1}\bigr)\cdot C_0^-(\lambda),\quad M(\lambda)=\frac{\gamma(\lambda)-h}{\gamma(\lambda)+h}. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$F_q(y)=\frac{\partial}{\partial y}\bigl[u_q-u_{q-1}\bigr]_{z=z_q},\qquad G_q(y)=\frac{\partial}{\partial z}\bigl[u_q-u_{q-1}\bigr]_{z=z_q}. \tag{12}$$

Из условий непрерывности поля и его производных повсюду вне лент следуют равенства:

$$F_q(y) = G_q(y) = 0, \qquad y \notin L_q; \tag{13}$$

$$\left(u_q - u_{q-1}\right)\Big|_{z=z_q} = \int_{-\infty}^{y} F_q(\eta)\, d\eta, \quad y \in L_q. \tag{14}$$

Функции $F_q(y)$ и $G_q(y)$ имеют следующие интегральные представления:

$$F_q(y) = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda \left(C_q^+(\lambda) + C_q^-(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda) h_{q,q+1}} \right) \cdot e^{i\lambda y}\, d\lambda$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda \left(C_{q-1}^+(\lambda) \cdot e^{\gamma(\lambda) h_{q-1,q}} + C_{q-1}^-(\lambda) \right) \cdot e^{i\lambda y}; \tag{15}$$

$$G_q(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) \left(-C_q^+(\lambda) + C_q^-(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda) h_{q,q+1}} \right) \cdot e^{i\lambda y}\, d\lambda -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) \left(-C_{q-1}^+(\lambda) \cdot e^{\gamma(\lambda) h_{q-1,q}} + C_{q-1}^-(\lambda) \right) \cdot e^{i\lambda y}\, d\lambda; \tag{16}$$

где $h_{s,q} = \left| z_s - z_q \right|$.

С помощью обратного преобразования Фурье, из (15), (16) находим:

$$\left(C_q^+(\lambda) + C_q^-(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda) h_{q,q+1}} \right) - \left(C_{q-1}^+(\lambda) \cdot e^{\gamma(\lambda) h_{q-1,q}} + C_{q-1}^-(\lambda) \right) =$$

$$= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_q(\eta)}{\lambda} \cdot e^{-i\lambda\eta}\, d\eta, \tag{17}$$

$$\left(-C_q^+(\lambda) + C_q^-(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda) h_{q,q+1}} \right) - \left(-C_{q-1}^+(\lambda) \cdot e^{\gamma(\lambda) h_{q-1,q}} + C_{q-1}^-(\lambda) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_q(\eta)}{\gamma(\lambda)} \cdot e^{-i\lambda\eta}\, d\eta. \tag{18}$$

Из (17), (18) следует, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i \frac{F_q(\eta)}{\lambda} + \frac{G_q(\eta)}{\gamma(\lambda)} \right\} \cdot e^{-i\lambda\eta}\, d\eta = e^{-\gamma(\lambda) h_{q,q+1}} \cdot C_q^-(\lambda) - C_{q-1}^-(\lambda), \quad \lambda \in R; \tag{19}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i \frac{F_q(\eta)}{\lambda} - \frac{G_q(\eta)}{\gamma(\lambda)} \right\} \cdot e^{-i\lambda\eta}\, d\eta = C_q^+(\lambda) - C_{q-1}^+(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda) h_{q-1,q}}, \quad \lambda \in R. \tag{20}$$

Добавив к системе уравнений (19) равенство $C_N^-(\lambda) = 0, \ \lambda \in R$, получаем соотношения

$$C_{q-1}^-(\lambda) = -\sum_{l=q}^{N} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i \frac{F_l(\eta)}{\lambda} + \frac{G_l(\eta)}{\gamma(\lambda)} \right\} \cdot e^{-i\lambda\eta - \gamma(\lambda) \cdot h_{q,l}}\, d\eta, \quad \lambda \in R; \tag{21}$$

в частности

$$C_0^-(\lambda) = -\sum_{l=1}^{N} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i\frac{F_l(\eta)}{\lambda} + \frac{G_l(\eta)}{\gamma(\lambda)} \right\} \cdot e^{-i\lambda\eta - \gamma(\lambda)h_{1,l}} d\eta, \quad \lambda \in R. \tag{22}$$

Учитывая, что $C_0^+(\lambda) = M \exp(-\gamma(\lambda)h_{0,1}) \cdot C_0^-(\lambda)$ и решая систему уравнений (18) последовательно относительно $C_q^+(\lambda)$ получаем

$$C_q^+(\lambda) = -M \cdot \exp(-\gamma(\lambda)h_{0,q}) \cdot \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i\frac{F_l(\eta)}{\lambda} + \frac{G_l(\eta)}{\gamma(\lambda)} \right\} \cdot e^{-i\lambda\eta} d\eta \cdot \exp(-\gamma(\lambda)h_{0,l}) +$$

$$+\sum_{s=1}^{q} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i\frac{F_s(\eta)}{\lambda} - \frac{G_s(\eta)}{\gamma(\lambda)} \right\} \cdot e^{-i\lambda\eta} d\eta \cdot \exp(-\gamma(\lambda)h_{s,q}), \quad \lambda \in R. \tag{23}$$

Следствием формул (21)-(23) являются равенства:

$$C_q^-(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda)h_{q,q+1}} + C_{q-1}^+(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda)h_{q-1,q}} =$$

$$= -\sum_{s=1}^{N} \frac{A_{qs} - \delta_{sq}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\frac{F_s(\eta)}{\lambda} \cdot e^{-i\lambda\eta - \gamma(\lambda)h_{s,q}} d\eta -$$

$$-\sum_{s=1}^{N} \frac{B_{qs} - \delta_{sq}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\eta)}{\gamma(\lambda)} \cdot e^{-i\lambda\eta - \gamma(\lambda)h_{s,q}} d\eta; \tag{24}$$

$$C_{q-1}^+(\lambda) \cdot e^{\gamma(\lambda)h_{q-1,q}} + C_{q-1}^-(\lambda) = -\sum_{s=1}^{N} \frac{A_{qs}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\eta)}{\gamma(\lambda)} \cdot e^{-i\lambda\eta} d\eta \cdot \exp(-\gamma(\lambda)h_{s,q}) +$$

$$+\sum_{s=1}^{N} \frac{B_{qs}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\frac{F_s(\eta)}{\lambda} \cdot e^{-i\lambda\eta} d\eta \cdot \exp(-\gamma(\lambda)h_{s,q}); \tag{25}$$

где

$$A_{qs} = 1 + M \cdot \exp(-\gamma(\lambda)h_{0,q}), \quad B_{qs} = M \cdot \exp(-\gamma(\lambda)h_{0,q}) + sign(s-q) + \delta_{s,q}. \tag{26}$$

Из (12), (14) и граничных условий (3) следуют соотношения:

$$G_q(y) - h\int_{-\infty}^{y} F_q(\eta) d\eta - 2h \cdot u_{q-1}\Big|_{z=z_q} = 2f_q(y), \quad y \in L_q; \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_q + u_{q-1}\right)\Big|_{z=z_q} - h\int_{-\infty}^{y} F_q(\eta) d\eta = -2g_q(y), \quad y \in L_q; \tag{28}$$

где

$$2hU_q(y, z_q) = 2f_q(y), \quad 2h\frac{\partial}{\partial z}U_q(y, z_q) = 2g_q(y), \quad y \in L_q. \tag{29}$$

Из параметрического свойства преобразования Гильберта [8,9] интегрального представления (14) функции $F_q(y)$ и следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_q(y)dt}{t-y} = -\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| \cdot \left(C_q^+(\lambda) + C_q^-(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda)h_{q,q+1}} \right) \cdot e^{i\lambda t} d\lambda +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| \cdot \left(C_{q-1}^+(\lambda) \cdot e^{-\gamma(\lambda)h_{q-1,q}} + C_{q-1}^-(\lambda) \right) \cdot e^{i\lambda t} d\lambda. \tag{30}$$

Введём обозначения:

$$MF_{pq}(z)=\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma(\lambda)h_{p,q}}}{\lambda}\sin(\lambda z)d\lambda, \quad MG_{pq}(z)=\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma(\lambda)h_{p,q}}}{\gamma(\lambda)}\cos(\lambda z)d\lambda, \tag{31}$$

$$KF_{pq}(z)=\int_0^\infty \frac{\gamma(\lambda)e^{-\gamma(\lambda)h_{p,q}}}{\lambda}\sin(\lambda z)d\lambda, \quad KG_{pq}(z)=\int_0^\infty e^{-\gamma(\lambda)h_{p,q}}\cos(\lambda z)d\lambda. \tag{32}$$

Из (24)-(32) следует, что функции $F_q(y)$ и $G_q(y)$ являются решениями системы уравнений:

$$G_q(y)-h\int_{-\infty}^{y}F_q(\eta)d\eta+h\sum_{s=1}^{N}\frac{A_{qs}}{\pi}\int_{L_q}MG_{pq}(\eta-y)\cdot G_s(\eta)d\eta-$$

$$-h\sum_{s=1}^{N}\frac{B_{qs}}{\pi}\int_{L_q}MF_{pq}(\eta-y)\cdot F_s(\eta)d\eta=2f_q(y), \quad y\in L_q; \tag{33}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_q}\frac{F_q(\eta)d\eta}{\eta-y}+\frac{1}{\pi}\int_{L_q}\int_0^\infty\left(\frac{\gamma(\lambda)}{\lambda}-1\right)\cdot\sin(\lambda(y-\eta))\cdot d\lambda\cdot F_q(\eta)d\eta-h\int_{-\infty}^{y}F_q(\eta)d\eta+$$

$$+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq q}}^{N}\frac{A_{qs}-\delta_{sq}}{\pi}\int_{L_q}KF_{qs}(\eta-y)F_s(\eta)d\eta-\sum_{\substack{s=1\\ s\neq q}}^{N}\frac{B_{qs}-\delta_{sq}}{\pi}\int_{L_q}KG_{qs}(\eta-y)\cdot G_s(\eta)d\eta=-2g_q(y), \quad y\in L_q; \tag{34}$$

где

$$\int_{L_{qp}}F_q(\eta)d\eta=0, \quad \forall L_{qp}\in L. \tag{35}$$

3. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований.

Полученная система граничных интегральных уравнений (33)-(35) отличается от систем интегральных уравнений задачи дифракции на многослойной системе лент выражением непрерывных слагаемых подынтегральных функций.

Поэтому численное решение системы интегральных уравнений (33)-(35) можно выполнять с помощью метода дискретных особенностей $[9-11]$ с использованием квадратурных формул интерполяционного типа.

В дальнейшем предполагается рассмотреть многослойную электродинамическую систему, состоящую из произвольного конечного числа экранов, между которыми находятся слои диэлектрического материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nosich A.A., Altintas A., Gandel Yu.V., Magath T. Numerical analysis and synthesis of 2-D quasioptical reflectors and beam waveguides based on an integral-equation approach with Nystrom's discretization // Journal of Optical Society of America A. – 2007. – Vol. 24, no 9. – P. 2831 – 2836.

2. Nosich A.A., Gandel Yu.V. Numerical analysis of quasioptical multi-reflector antennas in 2-D with the method of discrete singularities // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2007. – Vol. 57, no 2. – P. 399 – 406.
3. Nosich A.A., Gandel Yu.V., Matsushima A., Sauleau R. Collimation and Focusing of Wave Beams with Metal-Plate Lens Antennas Analyzed Using Nystrom-Type MDS Algorithm // Proc. 2008 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (IEEE APS 2008). — San Diego, 2008. — Session 237.10.
4. Nosich A.A., Gandel Yu.V., Matsushima A., Sauleau R. Accurate modeling and optimization of metallic-plate waveguide lenses // Proc. European Conf. Antennas and Propagation (EuCAP-09). — Berlin, 2009. — P. 2167 — 2170.
5. Ильинский А.С, Слепян Г.Я.- Колебания и волны в электродинамических системах с потерями.— М. : Изд-во МГУ, 1983.— 231 с.
6. Кравченко В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 280 с.
7. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения, Киев: Институт математики НАН Украины, 1995, С. 65–66.
8. Gandel' Yu.V. Parametric representations of integral and psevdodifferential operators in diffraction problems // Conf. Proc., 10th Int.Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14-17, 2004, P. 57 - 62.
9. Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: монография / Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин. – Х. Акад. ВВ МВД Украины, 2012. –544с.
10. Gandel’ Yu.V., Lifanov I.K., Polyanskaya. T.S. On the Justification of the Method of Discrete Singularities for Two-Dimensional Diffraction Problems // Differential Equations, Vol. 31, № 9, 1995, P. 1491-1497.
11. Lifanov I.K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices. – Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996, 475 p.
12. Борзенков И.А. Интегральные уравнения задачи дифракции в системе тонких сверхпроводящих лент/ Электромагнитные волны и электронные системы. – М. Т.4, № 2, 1999. – С. 17 – 21.

Надійшла – 21.11.2012.