

УДК 519.87

Ідентифікація параметрів задачі багатокритеріальної оптимізації інвестиційного портфеля

М. В. Карпуша, О. М. Назаренко

Сумський державний університет, Україна

Розглянуто задачу багатокритеріальної оптимізації інвестиційного портфеля та методи її зведення до задачі оптимізації з однією скалярною цільовою функцією. Запропоновано методику параметричної ідентифікації параметрів отриманих завдань в умовах невизначеності. При цьому використовуються дискретно-неперервні моделі з фіктивними змінними і множинні логіт-модель та пробіт-модель. Апробація ефективності розглянутих алгоритмів проведена на статистичних даних функціонування реальних фінансових систем.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, ідентифікація, дискретно-неперервна модель, прогнозування.

Рассмотрена задача многокритериальной оптимизации инвестиционного портфеля и методы ее сведения к задаче оптимизации с одной скалярной целевой функцией. Предложена методика параметрической идентификации параметров полученных задач в условиях неопределенности. При этом используются дискретно-непрерывные модели с фиктивными переменными и множественная логит-модель и пробит-модель. Апробация рассмотренных алгоритмов проведена на статистических данных функционирования реальных финансовых систем.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, идентификация, дискретно-непрерывная модель, прогнозирование.

The problem of multi-criteria optimization of the investment portfolio and the methods of its reduction to an optimization problem with a single scalar objective function were considered. The method of parametric identification of parameters of considered problems under uncertainty was proposed. Discrete-continuous models with dummy variables and multinomial logit-model and the probit-model was used. Testing of algorithms were conducted using statistical data of real financials systems.

Key words: multi-objective optimization, identification, continuous-discrete model, forecast.

1. Вступ

У сучасних умовах технічні, біологічні, економічні та інші об'єкти характеризуються обмеженістю ресурсів, і тому актуальною є проблема їх оптимального використання. Задача розподілу обмежених ресурсів для досягнення сукупності конкуруючих цілей у деякий заданий момент часу відноситься до задач статичної оптимізації. На практиці виникають ситуації, коли необхідно мінімізувати не одну цільову, а дві або більше конфліктуючих функцій [1, 2]. У такому випадку розв'язується задача багатокритеріальної оптимізації, яка полягає в одночасній мінімізації деяких суперечливих цілей:

$$\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \rightarrow \min, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

де $f_i(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, k$ – конфліктуючі цільові функції, $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор невідомих параметрів, Ω – допустима множина. Всі цільові функції $f_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, k$ та допустима множина Ω вважаються випуклими.

У більшості випадків ідентифікація параметрів цільових функцій (1) є апіорно заданою і виникає з відомих законів функціонування досліджуваної системи [3]. Але для деяких систем ідентифікація параметрів має бути апостеріорною, тобто залежати не лише від аналізу статистичної інформації еволюції системи, а й враховувати фактор невизначеності в моделі (1) [1].

У даній роботі пропонується метод ідентифікації параметрів оптимізаційної задачі (1), яка виникає при визначенні оптимальних інвестиційних портфелів. Особливістю задач такого типу є те, що при використанні їх на практиці повинні бути враховані похибки у вхідних даних, що описують динаміку розвитку системи на історичному періоді і використовуються для ідентифікації параметрів оптимізаційної задачі. Фактором невизначеності при моделюванні таких систем є те, що для них невідомі закони їх еволюції, тому оптимізаційні моделі, що використовуються для їх аналізу, встановлюють раціональний компроміс між адекватністю та складністю моделі.

У випадку, якщо параметри цільової функції ідентифіковані, метою дослідження задачі багатокритеріальної оптимізації (1) є визначення множини оптимальних за Парето розв'язків (множини Парето). Точка $\mathbf{x}^* \in \Omega$ є оптимальним за Парето розв'язком задачі (1), якщо для деякого околу точки \mathbf{x}^* не існує такого $\Delta \mathbf{x}$, що $(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) \in \Omega$, $f_i(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*)$, $i = \{1, 2, \dots, k\}$ та $f_j(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}^*)$ для деякого $j \neq i$ [3]. Існує багато методів розв'язання оптимізаційної задачі (1) та знаходження множини Парето. Далі розглянуто найбільш відомі з них: метод зважених сум та метод ε – обмежень [4].

2. Постановка задачі

Виуклу задачу багатокритеріальної оптимізації розглянемо на прикладі задачі оптимізації портфеля інвестицій. Нехай на періоді $[-N, 0]$ відома статистична інформація про динаміку цін n активів P_{jt} , $j = 1, 2, \dots, n$, $t = -N, -N+1, \dots, 0$. Оскільки ціна є розмірною величиною, то при аналізі динаміки розвитку таких систем розглядають доходності активів замість ціни:

$$R_{jt} = \frac{P_{jt} - P_{j(t-1)}}{P_{j(t-1)}}, t = [-N+1, 0], j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Будемо використовувати наступні характеристики динаміки змін доходностей кожного з n активів [5]:

- $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – вектор очікуваних доходностей в наступний за періодом ідентифікації момент часу $t = 1$, компонентами якого є математичні сподівання поточних доходностей:

$$\mathbf{r}_j = (R_{j(-N+1)}, R_{j(-N+2)}, \dots, R_{j0})', j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

- \mathbf{Q} – коваріаційна матриця матриці \mathbf{r} , стовпцями якої є вектори \mathbf{r}_j .

Розглянемо задачу оптимізації портфеля в момент часу $t=1$. Нехай портфель інвестора складається з n активів, причому x_j – доля капіталу, вкладена в j -й актив ($j = 1, 2, \dots, n$). Тоді $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ – вектор, що визначає структуру

портфеля, причому $\sum_{j=1}^n x_j = 1$. Якщо дозволена операція короткого продажу, на компоненти вектора \mathbf{x} накладаються обмеження $-1 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n$. Короткий продаж – операція продажу цінного паперу, що інвестор запозичує у брокера. Згодом інвестор повертає борг, купуючи такий же цінний папір на торгах. На практиці, багатьом фондам та інституційним інвесторам заборонені операції короткого продажу, тому в таких випадках в модель додається обмеження $0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n$.

В момент часу $t=1$ доходність портфеля

$$R = \sum_{j=1}^n x_j c_j \quad (4)$$

є випадковою величиною з математичним сподіванням $m = \mathbf{x}'\mathbf{c}$ та дисперсією $\sigma^2 = \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}$. Величину σ називають ризиком портфеля.

Задача статичної оптимізації портфеля полягає в тому, щоб мінімізувати ризик та максимізувати доходність. Оскільки величини m та σ^2 мають різну розмірність, то на практиці замість них доцільно розглядати безрозмірні величини. Нехай $\mathbf{x}_p = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})'$ – портфель з рівними компонентами.

Виберемо

$$f_1(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}'\mathbf{c}}{\mathbf{x}'_p\mathbf{c}}, f_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'_p\mathbf{Q}\mathbf{x}_p}. \quad (5)$$

Задачу оптимізації інвестиційного портфеля можна записати як наступну задачу багатокритеріальної оптимізації:

$$\begin{cases} \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\} \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ -1 \leq x_j \leq 1 \text{ або } 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (6)$$

Методи, що використовуються для розв'язання задачі (6), дозволяють знайти точку або множину точок оптимальних за Парето. У подібних випадках часто використовують методи скаляризації [6]. Вектор цільових функцій задачі багатокритеріальної оптимізації перетворюють на скалярну функцію. Таким чином задача багатокритеріальної оптимізації зводиться до задачі оптимізації з однією скалярною цільовою функцією. Розглянемо два відомих методи скаляризації.

Метод зважених сум. Дана стратегія перетворює багатокритеріальну задачу мінімізації вектора в деяку скалярну задачу оптимізації шляхом побудови зважених сум для всіх компонент. Використовуючи цей метод, оптимізаційну задачу (6) можна звести до наступної задачі квадратичного програмування:

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{x}) + \lambda f_1(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ -1 \leq x_j \leq 1 \text{ або } 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (7)$$

Тут λ – скалярна величина, яка характеризує відношення інвестора до ризику. Перебираючи різні значення λ з вибраного з якихось міркувань проміжку, можна знайти множину оптимальних за Парето розв’язків.

Метод ε – обмежень. У цьому випадку здійснюється мінімізація однієї з цільових функцій, а інші цільові функції подаються у формі обмежень типу нерівностей. Тоді задача (6) може бути сформульована двома способами:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ f_2(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_1, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ -1 \leq x_j \leq 1 \text{ або } 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (8)$$

або

$$\begin{cases} f_2(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ f_1(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_2, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ -1 \leq x_j \leq 1 \text{ або } 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (9)$$

При розв’язанні сформульованих оптимізаційних задач особливе місце займає проблема стійкості розв’язків. Основні аспекти цієї проблеми розглянуті в роботах Беста М., Грауера Р., Чопра В., Зіемба В., Каллберга Ж. В [7] проводиться аналіз чутливості структури оптимального портфеля \mathbf{x}^* в залежності від незначної зміни компонент вектора \mathbf{c} , дисперсій (діагональні елементи матриці \mathbf{Q}) та коваріацій (недіагональні елементи матриці \mathbf{Q}). Показано, що неправильна ідентифікація компонент вектора \mathbf{c} набагато більше впливає на стійкість розв’язку \mathbf{x}^* , ніж неправильна ідентифікація елементів матриці \mathbf{Q} . Тому актуальним є отримання адекватних оцінок вектора \mathbf{c} , які забезпечують стійкі розв’язки оптимізаційних задач.

3. Ідентифікація компонент вектора \mathbf{c}

Першим етапом дослідження є попередня обробка статистичних даних. Оскільки для аналізу системи використовуються статистичні дані динаміки розвитку фінансових показників r_{jt} , $j = 1, 2, \dots, n$ в моменти часу $t = -N, -N+1, \dots, 0$, задача ідентифікації компонент вектора \mathbf{c} може бути розглянута в контексті моделювання та прогнозування відповідних часових

рядів. Саме через призму високоточних прогнозних значень в момент часу $t = 1$ слід розглядати правильність ідентифікації компонент вектора \mathbf{c} .

Моделювання прогнозних значень будемо здійснювати за допомогою дискретно-неперервної моделі [8]. В першу чергу необхідно дослідити часові ряди на стаціонарність. Аналіз часових рядів на стаціонарність чи нестаціонарність проводиться за допомогою розширеного тесту Дікі-Фуллера та тесту Філіпса-Перрона [9]. Для правильної специфікації нульової та альтернативних гіпотез у вказаних тестах використовується інформаційний критерій Шварца [10] та процедура Доладо [9].

Після зведення даного часового ряду до стаціонарного наступним етапом є побудова математичної моделі, яка б описувала динаміку неперервних та дискретних ефектів. У загальному вигляді відповідна регресійна модель для кожного з $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ може бути записана у вигляді:

$$r_t = f(t, \mathbf{a}) + \mathbf{d}'\mathbf{z} + \varepsilon_t, \quad (10)$$

де r_t – значення ряду в момент часу t , $f(t, \mathbf{a})$ – неперервна складова, $\mathbf{d}'\mathbf{z}$ – дискретна складова, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_l)'$, $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_m)'$ – вектори оцінювальних параметрів, $\mathbf{z} = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt})'$ – вектор змінних дискретної складової; ε_t – випадкове збурення.

Оскільки на практиці у досліджуваних часових рядах присутня кореляція між елементами вибірки [5, 9], у якості неперервної складової розглядаються авторегресійні моделі. При наявності змінного математичного сподівання у часовому ряді до неперервної складової включається тренд.

Недостатня складність у виборі неперервної складової моделі може бути компенсована за допомогою дискретних змінних, що визначаються ітераційним шляхом. Після оцінювання неперервної складової регресійної моделі (10) і обчислення залишків $\varepsilon_t^{(1)} = r_t - f(t, \hat{\mathbf{a}})$ на першому кроці дискретна змінна формується наступним чином:

$$z_{1t} = \begin{cases} +T^{(1)}, & \varepsilon_t^{(1)} > \xi^{(1)}, \\ 0, & -\xi^{(1)} \leq \varepsilon_t^{(1)} \leq \xi^{(1)}, \\ -S^{(1)}, & \varepsilon_t^{(1)} < -\xi^{(1)}. \end{cases} \quad (11)$$

Тут $\xi^{(1)}$ – точність наближення, $S^{(1)}$ і $T^{(1)}$ – кількість точок з даного проміжку, в яких виконуються нерівності $\varepsilon_t^{(1)} > \xi^{(1)}$ і $\varepsilon_t^{(1)} < -\xi^{(1)}$ відповідно (тоді середнє значення фіктивної змінної автоматично дорівнює нулю). Далі оцінюється регресійна модель $\varepsilon_t^{(1)} = d_1 z_{1t} + \varepsilon_t^{(2)}$. На k -кроці ($k=2, 3, \dots, m$) обчислюються залишки $\varepsilon_t^{(k)} = \varepsilon_t^{(k-1)} - \hat{\alpha}_{(k-1)} z_{(k-1)t}$, нова фіктивна змінна дорівнює

$$z_{kt} = \begin{cases} +T^{(k)}, \varepsilon_t^{(k)} > \xi^{(k)}, \\ 0, -\xi^{(k)} \leq \varepsilon_t^{(k)} \leq \xi^{(k)}, \\ -S^{(k)}, \varepsilon_t^{(k)} < -\xi^{(k)}, \end{cases} \quad (12)$$

і оцінюється регресійна модель $\varepsilon_t^{(k)} = d_k z_{kt} + \varepsilon_t^{(k+1)}$. Практичні дослідження показують, що для досягнення високого значення коефіцієнта детермінації R^2 регресійної моделі (10) достатньо 2-3 ітерації.

При визначенні кожної з фіктивних змінних невідомим залишається значення точності $\xi^{(k)}$, $k=1, \dots, m$ на кожному кроці ітерації. В [8] значення $\xi^{(k)}$ вибиралось рівним $0,01 \cdot (r_t^{\max} - r_t^{\min})$. З метою досягнення більш якісних прогнозних значень регресанта у даній роботі пропонується наступна процедура визначення точності $\xi^{(k)}$.

Нехай заданий деякий часовий ряд r_t , $t = -N, -N+1, \dots, 0$ і необхідно знайти прогнозне значення r_1^* в момент часу $t=1$. Для визначення невідомих значень точності $\xi^{(k)}$, $k=1, \dots, m$ кожної з фіктивних змінних проведемо ідентифікацію невідомих параметрів на періоді $[-N, -3]$ і побудуємо прогнозні значення $r_{(-2)}^*$, $r_{(-1)}^*$, r_0^* . З усіх можливих значень $\xi^{(k)}$, $k=1, \dots, m$ обираємо ті, для яких:

- значення $s = (r_{(-2)}^* - r_{(-2)})^2 + (r_{(-1)}^* - r_{(-1)})^2 + (r_0^* - r_0)^2$ є мінімальним;
- залишки відповідної регресійної моделі (10) неавтокорельовані, гомоскедастичні та нормально розподілені;
- оцінена регресійна модель є стійкою до незначних змін вхідної інформації. У цьому випадку індекс обумовленості матриці, що обертається в методі найменших квадратів, на практиці менше 20 [11].

Описана процедура вказує на те, що за допомогою вектора \mathbf{z} фіктивних змінних можна досягти необхідну точність апроксимації. Однак таке введення фіктивних змінних приводить до неоднозначності при визначенні прогнозного значення регресанта. Для прогнозної точки $t=1$ можливі $3m$ значень регресанта, оскільки кожна з фіктивних змінних в (10) може приймати одне із трьох значень, а кількість ітерацій дорівнює m . Для вибору оптимального значення фіктивної змінної в точці $t=1$ пропонується застосовувати множинну логіт-модель, яка використовує властивості функції логістичного розподілу, або пробіт-модель, що базується на функції нормального розподілу [12].

4. Практична частина

Розглянемо апробацію запропонованого методу ідентифікації задач (7), (8), (9) для портфеля, що може складатися з акцій українських компаній, що входять до індексу WIGUkraine Варшавської фондової біржі, а саме: Kernel Holding S.A. (KER), Astarta Holding N.V. (AST), Coal Energy S.A. (CLE), Milkiland N.V. (MLK), Agrotion Public Limited (AGT), KSG Agro S.A. (KSG), Industrial Milk

Company S.A. (IMC), Sadovaya Group S.A. (SGR), Ovostar Union N.V. (OVO), Westa ISIC S.A. (WES) (в дужках вказані котировки акцій на Варшавській фондовій біржі). Використовувалась статистична інформація за період з 03.10.2011 р. до 17.02.2012 р. (об'єм вибірки $N=100$) [13].

Розглянемо детально побудову прогнозного значення вектору ϵ на прикладі Kernel Holding S.A. (KER) та Ovostar Union N.V. (OVO). Дотримуючись методики, запропонованої в [8], спочатку проаналізуємо дані часові ряди на стаціонарність. Використовуючи розширений тест Дікі-Фуллера, метод Доладо та інформаційний критерій Шварца встановлюємо, що статистичні дані курсу акцій компанії KER є стаціонарним часовим рядом відносно лінійного детермінованого тренду, а статистичні дані курсу акції компанії OVO є нестаціонарним часовим рядом, тому диференціюємо його і в даному випадку отримуємо стаціонарний ряд.

Наступним етапом є побудова дискретно-неперервної моделі (10). Комп'ютерні розрахунки дають:

$$\begin{matrix} \hat{\epsilon}_t = 13,2919 - 0,0393t + 0,8388x_{t-1} + 0,0397z_1 + 0,0908z_2, & R^2 = 99,2\% & (13) \\ (c.n.) & (4,3220) & (0,0135) & (0,0524) & (0,0025) & (0,0079) \end{matrix}$$

для компанії KER;

$$\begin{matrix} \Delta \hat{\epsilon}_t = -0,0347 + 0,2944 \Delta x_{t-1} + 0,0314z_1 + 0,0264z_2 + 0,0603z_3, & R^2 = 97,6\% & (14) \\ (c.n.) & (0,1963) & (0,1168) & (0,0024) & (0,0017) & (0,0058) \end{matrix}$$

для компанії OVO.

На рис. 1 показані модельні та реальні значення цін акції компанії KER (а) та OVO (б) на досліджуваному проміжку часу.

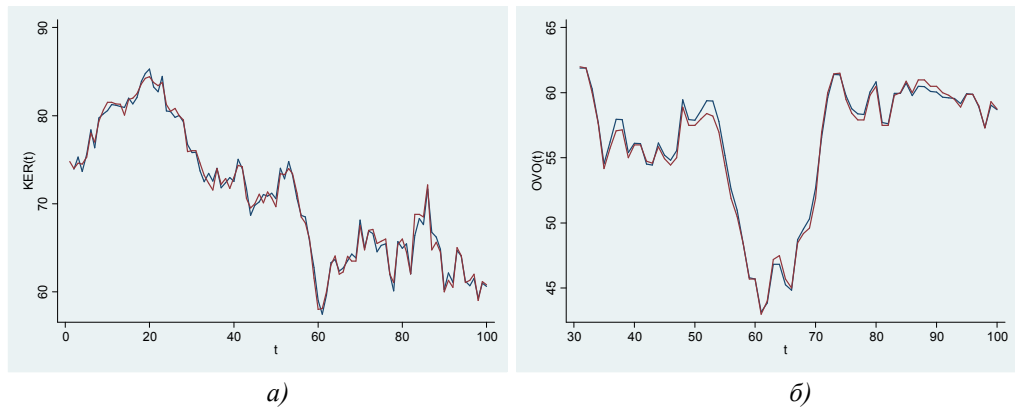


Рис. 1. Модельні та реальні значення цін

Аналіз отриманих результатів вказує на високу якість апроксимації, і тому побудовані моделі можуть бути використані для короткострокового прогнозування. Аналогічні розрахунки були проведені для решти компаній.

У табл. 1 подані реальні, прогнозні значення вектору ϵ та відносні похибки прогнозу (h) на два дні ($t^*=1$ та $t^*=2$, що відповідає 20.02.2012 р. та 21.02.2012 р.) для зазначених 10 українських компаній. В останньому рядку вказані усереднені значення відносних похибок прогнозів.

Зазначимо, що при практичних дослідженнях прогнозування часових рядів можна здійснювати за допомогою різних економетричних моделей (ARIMA, ARMAX, ARCH/GARCH, модель Прайса-Уінстена і т. п. [14]). Ефективність отриманих у даній роботі результатів перевіримо, порівнюючи їх з аналогічними результатами ARIMA моделі, які подані у табл. 2. У табл. 2 жирним шрифтом виділені більш якісніші прогнозні значення у порівнянні з відповідними значеннями табл. 1. Як видно, у більшості випадків точніші прогнозні значення відповідають дискретно-неперервним моделям, які розробляються у даній роботі. Усереднені значення похибок прогнозів ARIMA моделей на два наступні дні (1,50% та 1,66%) перевищують відповідні значення дискретно – неперервних моделей (0,62% та 0,87%).

Табл.1. Результати використання дискретно-неперервної моделі

	20.02.2012			21.02.2012		
	Реальні	Прогнозні	<i>h</i>	Реальні	Прогнозні	<i>h</i>
KER	71,10	71,77	0,94%	70,80	70,25	0,77%
AST	65,05	64,97	0,13%	65,05	65,26	0,33%
CLE	27,50	27,17	1,20%	27,00	26,65	1,29%
MLK	18,10	18,11	0,05%	18,50	18,38	0,63%
AGT	21,31	21,49	0,82%	21,45	21,40	0,22%
KSG	23,80	23,67	0,55%	24,15	23,94	0,87%
IMC	10,15	10,25	0,99%	10,15	10,25	1,02%
SGR	10,33	10,46	1,28%	10,44	10,45	0,07%
OVO	95,30	95,46	0,16%	95,30	96,19	0,93%
WES	4,47	4,46	0,12%	4,36	4,47	2,52%
			0,62%			0,87%

Табл.2. Результати використання ARIMA моделі

	20.02.2012			21.02.2012		
	Реальні	Прогнозні	<i>h</i>	Реальні	Прогнозні	<i>h</i>
KER	71,10	73,04	2,73%	70,8	73,24	3,45%
AST	65,05	64,37	1,04%	65,05	64,73	0,49%
CLE	27,5	26,42	3,93%	27	26,82	0,67%
MLK	18,10	17,68	2,32%	18,50	17,68	4,44%
AGT	21,31	21,35	0,16%	21,45	21,45	0,02%
KSG	23,80	23,76	0,15%	24,15	23,76	1,60%
IMC	10,15	10,24	0,88%	10,15	10,33	1,75%
SGR	10,33	10,26	0,72%	10,44	10,18	2,51%
OVO	95,30	95,29	0,01%	95,30	95,62	0,33%
WES	4,47	4,33	3,09%	4,36	4,31	1,20%
			1,50%			1,66%

Розв'яжемо тепер оптимізаційну задачу (6), розглядаючи її у вигляді (7), (8) або (9). Значення параметру λ в задачі (7) вибиралося від 2 до 100; при таких значеннях розв'язок буде добре диверсифікований [7]. В задачі (8) значення ε_1 – від 0,011 до 0,015, в задачі (9) значення ε_2 – від 0,02 до 0,07; при заданих

коридорах значень параметрів λ , ε_1 , ε_2 фронти ефективних портфелів [7] задач (7), (8), (9) збігаються.

У випадку обмеження $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, 10$ відповідний фронт ефективних портфелів зображено на рис. 2 а) штриховою лінією. На рис. 2 а) крапками приведено фронт ефективних портфелів, якщо вектор \mathbf{c} ідентифікований класичним методом (3); суцільною лінією, якщо у якості компонент вектора \mathbf{c} взяті їх реальні значення.

На рис. 2 б) приводяться аналогічні фронти ефективних портфелів задачі оптимізації (6) у випадку обмеження $-0,1 \leq x_j \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, 10$.

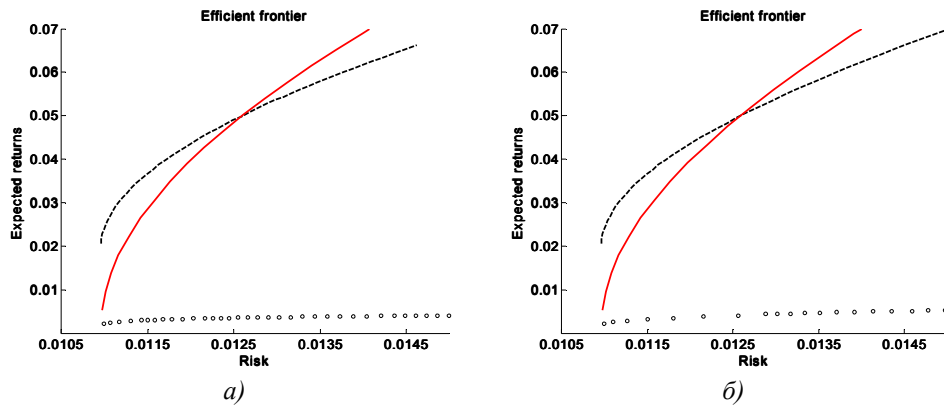


Рис.2. Фронти ефективних портфелів задачі (6)

Проаналізуємо реальну доходність, яку інвестор може отримати, використовуючи отриману нами множину оптимальних за Парето розв'язків. Нехай для інвестора максимальний рівень ризику складає 12,88% ($\varepsilon_1 = 0,0166$ для задачі (8)) і для його інвестиційних можливостей має місце обмеження $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, 10$. Розв'язок цієї задачі досягається у точці, для якої $\sigma^2 = 0,0115$, відповідного фронту ефективних портфелів (рис. 2 а)). У цьому випадку, якщо інвестор буде користуватись класичним методом (3), його інвестований капітал збільшиться на 1,15%, якщо ж буде дотримуватись запропонованої в роботі методики – на 1,34%.

Розглянемо тепер інвестора, для якого максимальний рівень ризику складає 15,13% ($\varepsilon_1 = 0,0229$ для задачі (8)) і для його інвестиційних можливостей має місце обмеження $-0,1 \leq x_j \leq 1$. Розв'язок такої задачі досягається у точці, для якої $\sigma^2 = 0,0145$, відповідного фронту ефективних портфелів (рис. 2 б)). Тоді згідно класичного підходу реальна доходність інвестора буде складати 0,18%, якщо ж він буде використовувати запропоновану методику – 3,46%.

Аналізуючи рис. 2, можна зробити висновок, що запропонований в роботі підхід дозволяє більш адекватніше моделювати реальні можливості інвестора. Так, при збільшенні допустимого для інвестора ризику (якщо рухатися по осі вправо) різниця між оптимальними розв'язками, отриманими класичним і

запропонованим підходами, зростає. Це означає, що на практиці класичний підхід приводить до заниженого значення доходності.

7. Висновки

Розглянуто задачу оптимізації інвестиційного портфеля як задачу багатокритеріальної оптимізації. Методи скаляризації зводять задачу багатокритеріальної оптимізації до однокритеріальних задач з обмеженнями на параметри. Запропоновано метод ідентифікації параметрів отриманих оптимізаційних задач за допомогою дискретно-неперервних моделей. Апробація запропонованих алгоритмів проведена на реальних статистичних даних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Островский Г. М., Волин Ю. М. Технологические системы в условиях неопределенности. Анализ гибкости и оптимизация. – М.: Бином, 2010. – 319 с.
2. Дилигенский Н. В., Дымова Л. Г., Севастьянов П. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. – М.: «Издательство Машиностроение – 1», 2004. – 397 с.
3. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
4. Sensor Y. Pareto Optimality in Multiobjective Problems // Applied Mathematics and Optimization. – 1977. – № 4. – pp. 41 – 59.
5. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. – М.: Фазис, 1998. – 512 с.
6. Кини Р., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М: Радио и связь, 1981. – 560 с.
7. Chopra V., Ziemba W. The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice // Journal of Portfolio Choice. – 1993. – № 2 (19). – pp. 6 – 11.
8. Назаренко О. М., Карпуша М. В. Моделивання та прогнозування нестационарних часових рядів // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – 2012. – №2. – С. 162 – 172.
9. Канторович Г. Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. – 2002. – № 3. – С. 379 – 401.
10. Rossen A. On the Predictive Content of Nonlinear Transformations of Lagged Autoregression Residuals and Time Series Observations // Hamburg Institute of International Economics, Research Paper 113. – 2011. – P. 1 – 24 .
11. Patterson K. An Introduction to Applied Econometrics: A Time Series Approach. –Palgrave, 2000. – 797 p.
12. Давнис В. В. Прогнозные модели экспертных предпочтений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248 с.
13. www.gpw.pl
14. Hamilton J. Time Series Analysis. – Princeton University Press, 1994. – 799 p.