

УДК 539.3

Математические модели динамики оболочек, частично заполненных жидкостью

И. Ю. Кононенко, У. Е. Огородник, Е. А. Стрельникова

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

Разработаны математические модели для анализа динамического поведения оболочек вращения, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью, построены дискретные модели для проведения численных экспериментов. Осуществлен переход от трехмерной задачи для определения давления жидкости к двумерной, а потом к одномерной. Усовершенствована дискретная модель на базе метода дискретных особенностей. Проведены численный эксперимент и сопоставление с теоретическими и экспериментальными данными других авторов.

Ключевые слова: оболочка вращения, идеальная несжимаемая жидкость, метод дискретных особенностей.

Розроблені математичні моделі для аналізу динамічної поведінки оболонок обертання, частково заповнених ідеальною нестисливою рідиною, та побудовані дискретні моделі для проведення чисельних експериментів. Здійснено перехід від тривимірної задачі для визначення тиску рідини на оболонку до двовимірної, а потім і до одновимірної. Удосконалено дискретну модель, що заснована на методі дискретних особливостей. Здійснено чисельний експеримент та порівняння з теоретичними та експериментальними даними інших авторів.

Ключові слова: оболонка обертання, ідеальна нестислива рідина, метод дискретних особливостей.

The mathematical models to analyze the dynamics of shells of revolution partially filled with an incompressible ideal liquid are elaborated. The discrete models for numerical simulation are proposed. The reduction of 3D problem to 2D was accomplished and thereafter the reduction to one-dimensional problem was done. The discrete model based on discrete singularity method was upgraded. The numerical simulation was accomplished including comparison with theoretical and experimental data of other authors.

Key words: shell of revolution, ideal incompressible liquid, discrete singularity method.

1. Введение.

В различных областях инженерной практики, таких как авиастроение, химическая промышленность, энергетическое машиностроение широко используются элементы конструкций в виде оболочек или тел вращения, которые функционируют в условиях повышенных технологических нагрузок и заполнены нефтью, легковоспламеняющимися или ядовитыми веществами. К их числу относятся топливные баки, цистерны, резервуары нефтехранилищ, топлива, сжиженного газа и др. Исследованию таких задач посвящена обширная научная литература [1-10]. Динамический анализ оболочечных конструкций часто выполняется при помощи конечно-элементных программ. Но трехмерный нелинейный анализ с учетом взаимодействия жидкости и грунта является сложной и чрезвычайно трудоёмкой задачей. Поэтому для проведения исследования прочности и устойчивости резервуаров при импульсных и сейсмических нагрузках принимаются упрощенные гипотезы. Предполагается,

например, что жидкость состоит из двух частей: движущейся вместе с емкостью как жесткое целое и части, движущейся со своей собственной частотой. Определение границ этих частей жидкости производится эмпирически. Не учитывается также упругость стенок резервуара. Однако вопросы динамики составных оболочек с жидкостью не достаточно изучены, не исследован характер поведения решений соответствующих интегральных уравнений при применении методов теории потенциала для решения задач такого класса. В данной работе рассматриваются задачи о свободных и вынужденных колебаниях составных оболочек вращения при частичном заполнении жидкостью. Алгоритм решения состоит из нескольких этапов, каждый из которых представляет самостоятельную задачу. Предложен подход, основанный на использовании метода граничных элементов, для решения задачи о собственных колебаниях упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью. Этот подход имеет определенные преимущества. В разрешающих уравнениях функции и их производные определяются только на границах области, что позволяет существенно уменьшать размерность систем уравнений. Этот метод дает также качественно новые возможности в моделировании связанной динамической задачи, именно он и будет применен в данном исследовании.

2. Постановка задачи.

Рассматривается задача о гидроупругих колебаниях составной оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. В общем случае уравнения движения упругой оболочки постоянной толщины можно записать в форме

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11}^{(k)}u + L_{12}^{(k)}v + L_{13}^{(k)}w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_1 \\ L_{21}^{(k)}u + L_{22}^{(k)}v + L_{23}^{(k)}w = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Q_2 \\ L_{31}^{(k)}u + L_{32}^{(k)}v + L_{33}^{(k)}w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P + Q_3 \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $L_{ij}^{(k)}$ ($i, j=1, 2, 3$) – дифференциальные операторы, соответствующие выбранной теории оболочек, $k = 1, 2, \dots, N_k$; N_k – количество частей, составляющих оболочку; u, v, w – продольное, окружное и нормальное перемещения оболочки; ρ – плотность материала, из которого изготовлена оболочка, h – ее толщина, Q_i ($i=1, 2, 3$) – компоненты вынуждающей силы, P – давление жидкости на оболочку.

Рассматриваются либо жестко заземленная оболочка, либо оболочка консольного типа, один торец которой закреплен жестко, а второй – свободен от нагрузок. Граничные условия следует дополнить условиями сопряжения на стыкующихся участках оболочек. Условия сопряжения заключаются в непрерывности, как обобщенных перемещений, так и силовых факторов при переходе от одной составляющей рассматриваемой оболочки к другой

$$\bar{U}|_{\Gamma_i} = \bar{U}|_{\Gamma_{i+1}}; \quad \bar{T}|_{\Gamma_i} = \bar{T}|_{\Gamma_{i+1}}; \quad i=1,2,\dots,N_{k-1}$$

Для определения функции давления $P = P(x, y, z, t)$, фигурирующей в правой части системы дифференциальных уравнений (1), использованы уравнения движения жидкой среды в напряжениях. Установлено, что давление жидкости на оболочку является суммой статического давления жидкости $P_{stat} = \rho_l g z$ и зависящей от времени составляющей давления p , возникающего в процессе колебаний оболочки и содержащейся в ней жидкости. Как статическая, так и динамическая составляющая давления являются гармоническими функциями.

В уравнениях (1) фигурирует суммарное давление P , статическая часть которого определена. Для нахождения динамической составляющей требуется решить уравнение Лапласа

$$\Delta p = 0 \quad (2)$$

в области Ω , занятой жидкостью, находящейся в оболочке, при следующих граничных условиях

$$\frac{\partial p}{\partial n} = F(M, t), \quad M \in S. \quad (3)$$

Здесь S – поверхность, ограничивающая жидкий объем Ω ; M – точка на поверхности S . Поверхность S состоит из двух частей $S = S_0 \cup \sigma$; S_0 представляет собой смоченную поверхность оболочки, а σ – свободную поверхность жидкости. В связи с этим функция $F(M, t)$ в (3) представляется в виде [7]

$$F(M, t) = \begin{cases} -\rho_l \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \vec{n} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} (\vec{r} \times \vec{n}) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]_{S_0}; \\ -\rho_l \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \vec{n} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} (\vec{r} \times \vec{n}) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right]_{\sigma}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь w – прогиб оболочки, \vec{v} и $\vec{\omega}$ – скорость подвижного начала и угловая скорость переносного движения, f – функция, описывающая поведение свободной поверхности, \vec{n} – вектор внешней нормали к рассматриваемой поверхности, \vec{r} – радиус-вектор частицы в подвижной системе координат.

Выражение (4) является следствием условия равенства нормальных составляющих ускорения. Решение краевой задачи Неймана (2)-(4) определяется с точностью до произвольной постоянной. Эту константу будем определять, исходя из условия, что давление на свободной поверхности жидкости равно атмосферному. Будем считать, что в начальный момент времени уравнение свободной поверхности σ_0 имеет вид $z = z_0$. В последующие моменты времени уравнение свободной поверхности описывается формулой $z = z_0 + f$. В рассматриваемом случае малых колебаний при решении краевой задачи

Неймана граничные условия будем задавать на невозмущенной поверхности σ_0 не только в начальный, но и во все последующие моменты времени. Условие равенства давления на свободной поверхности жидкости атмосферному принимает вид $p + \rho_l g z_0 + \rho_l g f + C = \rho_l g z_0$. Отсюда $p + \rho_l g f + C = 0$. Поскольку в начальный момент времени $p(M, 0) = 0$; $f(M, 0) = 0$, то $C = 0$, а при $t > 0$ на свободной поверхности должно быть выполнено равенство $p + \rho_l g f = 0$.

Требуется определить пять неизвестных функций u , v , w , p и f из системы дифференциальных уравнений (1),(2) при выполнении граничных условий на торцах оболочки, условий сопряжения на стыках, условия (3) на поверхности, ограничивающей жидкий объем. В правой части системы дифференциальных уравнений (1) присутствует статическая составляющая $\rho_l g z_0$. Поэтому следует отдельно рассмотреть решение статической задачи относительно u , v , w при соответствующих граничных условиях и условиях сопряжения. Решение связанной динамической задачи в целом будет представлять собой сумму решений статической и динамической задач.

Начальными условиями для рассматриваемой задачи при наличии отличной от нуля вынуждающей силы будут

$$\begin{aligned} u(0, M) = 0, \quad v(0, M) = 0, \quad w(0, M) = 0, \quad f(0, M) = 0; \\ u_t(0, M) = 0, \quad v_t(0, M) = 0, \quad w_t(0, M) = 0, \quad f_t(0, M) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, требуется решить начально-краевую задачу.

3. Метод решения связанной задачи гидроупругости

Для решения начально-краевой задачи (1)-(4) предложено представить неизвестные перемещения u, v, w в виде рядов по известным базисным функциям с неизвестными коэффициентами $c_k(t)$, зависящими лишь от времени

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) u_k; \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) v_k; \quad w = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k. \quad (5)$$

После решения краевых задач Неймана для базисных функций, определенных в (5), находим частоты и формы свободных колебаний пустых и заполненных оболочек, полагая $c_k(t) = e^{i\omega t}$. В данной работе использованы базисные функции в виде многочленов Лагранжа, и применен метод обобщенных квадратур [12]. Для исследования вынужденных колебаний в качестве базисных функций выбираются ортогональные формы свободных колебаний незаполненных и заполненных оболочек соответственно. Решение краевой задачи Неймана (2) для каждой базисной функции из (5) (для фиксированного k) ищем в виде тригонометрического ряда

$$P(s, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} [p_m^{(1)}(s) \cos m\phi + p_m^{(2)}(s) \sin m\phi].$$

Это позволяет для каждой гармоники свести исходную трехмерную задачу к двумерной. Интегральное представление для давления взято в виде потенциала простого слоя

$$p_m(r, z) = \int_l g_m(s') G_m(r, z, r', z') ds', (r', z') \in l, \quad (r, z) \in D,$$

где $G_m(r, z, r', z')$ - фундаментальное решение редуцированной краевой задачи Неймана, состоящее из суммы функций, одна из которых гладкая, а вторая имеет логарифмическую особенность. При этом давление определяется из следующего интегрального уравнения с логарифмической особенностью:

$$g_m(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_l \left(C_1 \ln \frac{1}{|M - M_0|} + Q_m(s_0, s) \right) g(s) ds + \frac{1}{\pi} F_m(s_0),$$

т.е. исходная задача сведена к одномерной. В качестве $N + 2$ точек коллокации выбираем N корней полиномов Чебышева второго рода и добавляем к ним концы интервала, т.е. выбираем набор точек коллокации по схеме Чебышева-Гаусса-Лобатто [7]. Приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^l S_{11i} U^{(i)} + \sum_{i=0}^l S_{12i} V^{(i)} + \sum_{i=0}^l S_{13i} W^{(i)} = -\rho h \Omega^2 U; & U = U^{(0)}; \\ \sum_{i=0}^l S_{21i} U^{(i)} + \sum_{i=0}^l S_{22i} V^{(i)} + \sum_{i=0}^l S_{23i} W^{(i)} = -\rho h \Omega^2 V; & V = V^{(0)}; \\ \sum_{i=0}^l S_{31i} U^{(i)} + \sum_{i=0}^l S_{32i} V^{(i)} + \sum_{i=0}^l S_{33i} W^{(i)} = -\rho h \Omega^2 W; & W = W^{(0)}. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь S_{ijk} $i=1,2,3$; $j=1,2,3$; $k=0,1,2,\dots,l$ - известные коэффициенты, зависящие от номера гармоники, главных кривизн оболочки и ее геометрических параметров, $U^{(i)}, V^{(i)}, W^{(i)}$, $i=0,1,2$ - значения неизвестных функций и их производных, l - порядок старшей производной в дифференциальном уравнении. Отметим, что выражения $U^{(i)}, V^{(i)}, W^{(i)}$, $i=0,1,2,\dots,l$ представляются в виде линейных комбинаций значений функций u, v, w в сетке Чебышева-Гаусса-Лобатто. Для определения свободных колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью, для каждой из функций базиса Лагранжа $L_i(r)$, $i=1,2,\dots,N$ получаем решение краевой задачи Неймана и далее сводим рассматриваемую задачу к решению обобщенной проблемы собственных значений. Анализ вынужденных колебаний пустых и заполненных оболочек сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Каждое из этих уравнений (вследствие условий ортогональности) содержит лишь одну неизвестную функцию.

4. Численный анализ колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью

В [8] описано экспериментальное исследование частот колебаний незаполненной стальной цилиндрической оболочки со следующими параметрами: $R = 0.2524$ м, $L = 0.733$ м, $h = 0.0035$ м; модуль упругости

$E=2,06 \cdot 10^5$ Мпа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.29$, плотность материала $\rho=7800$ кг/м³.

В табл. 1 приведено сравнение экспериментальных и теоретических результатов, полученных разными методами для различных гармоник n .

Табл.1. Сравнение теоретических и экспериментальных частот свободных колебаний незаполненной цилиндрической оболочки

n	[3] эксперимент	[3] Расчет МКЭ	Предложенный метод
3	269.0	282.2	279.3
4	315.0	323.0	326.1
5	327.1	366.8	349.6
6	420.8	431.7	434.0

На рис. 1 показаны формы колебаний, соответствующие полученным частотам.

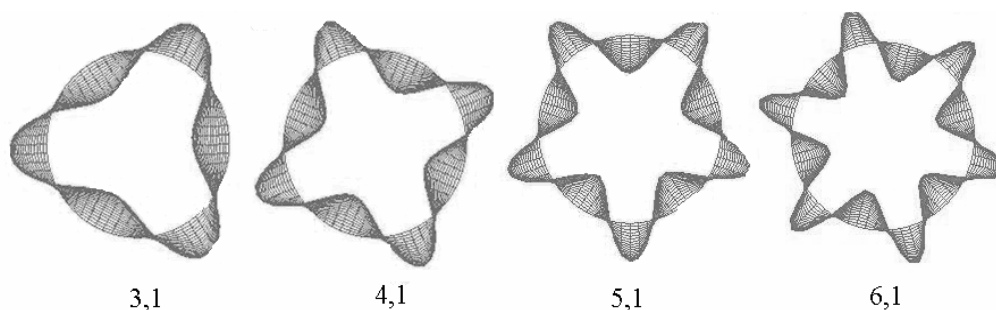


Рис.1. Формы колебаний цилиндрической оболочки для $n = 3, 4, 5, 6$, $m = 1$.

Наименьшая частота получена при $n = 1$, $m = 3$. Расчеты по предложенной методике проведены в предположении, что число базисных функций (многочленов Лагранжа) равно 21. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных говорит об удовлетворительной точности предложенного метода и свидетельствует о достоверности полученных результатов.

5. Выводы

Разработан эффективный численный метод анализа динамического поведения оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Проведены численные исследования динамики цилиндрического резервуара, заполненного несжимаемой жидкостью

7. Благодарности

Авторы выражают благодарность профессору Ганделю Юрию Владимировичу за его постоянную поддержку и интерес к нашей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dukowicz , J. K. , Dvinsky , and A. S., Approximate Factorization as a High Order Splitting for the Implicit Incompressible Flow Equations, *J. Comput. Phys.*, 102, pp. 330-336, 1992.
2. Amabili M., Païdoussis M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // *Applied Mechanics Review.* – 2003. – 56(4). – pp. 349-381.
3. Tezduyar T. E. Finite Element Methods for Fluid Dynamics with Moving Boundaries and Interfaces. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, (3): Fluids, pp.1-55, 2004.
4. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. - Cambridge University Press, 957p. ,2005.
5. Kubenko, V.D. & Koval'chuk, P.S., Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid. // *International Journal of Applied Mechanics*, 36(4), pp. 421–448, 2000.
6. Zhang, Y.L., Gorman, D.G. & Reese, J.M., Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid. // *Thin-Walled Structures*, 41, pp. 1103–1127, 2003.
7. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid // *International Journal of Applied Mechanics.* – 2000. – 36(4). – pp. 421-448.
8. Zhang, Y.L., Gorman, D.G. & Reese, J.M., Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid. *Thin-Walled Structures*, 41, pp. 1103–1127, 2003.
9. Ventsel E., Naumenko V, Strelnikova E., Yeseleva E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid. *Engineering analysis with boundary elements*, **34**, pp. 856-862, 2010.
10. Epureanu B.I., Tang L.S., Paidoussis M.P. Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels, *Int. J. of Non-lin. Mech.* 2004, **639**, 977-991.
11. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid *Proc. of XXXII Conference “Boundary elements and other mesh reduction methods”* WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, P. 203-211, 2010
12. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью.– М.: Машиностроение, 1967. – 359 с.
13. C. Shu. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, London, Springer-Verlag, January 2000, 340 p.
14. Alzahabi, B.; Natarajan, L. K. Correlation of Modal Characteristics of Circular Cylindrical Shells. // *The 1st International Conference on Finite Element Process*, Luxembourg City, LUXFEM, Luxembourg, P 234-240, 2003.