

УДК 519.6

## Моделирование неустойчивости движущегося в плазме сгустка заряженных частиц

А. В. Мишин, А. В. Приймак

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

Проведен анализ и верификация математической модели, описывающей динамику коротких 1D одиночных моноэнергетических сгустков заряженных частиц, распространяющихся в плазме. Расчеты проведены с использованием технологии CUDA. Если размер сгустка в направлении его движения превышает несколько длин волн возбуждаемых плазменных колебаний, накопления поля в его объеме не происходит, динамика сгустка определяется развитием двухпоточковой неустойчивости диссипативного типа. Области максимума поля, возбуждаемые движущимися сгустками частиц, в лабораторной системе отсчета локализованы в месте их образования.

**Ключевые слова:** сгустки заряженных частиц, двухпоточковая неустойчивость, поля кильватерного следа.

Проведено аналіз та верифікацію математичної моделі, що представляє еволюцію коротких одномірних моноенергетичних згустків заряджених часток, що рухаються у плазмі. Розрахунки виконані з використанням технології CUDA. Коли розмір згустку в напрямку руху перебільшує декілька довжин плазмових коливань, що збуджуються, накопичення поля в його об'ємі не відбувається. Динаміка згустку обумовлена розвитком дисипативної нестійкості двох потоків. Області максимуму амплітуди коливань локалізовані там, де вони були сформовані в лабораторній системі відліку.

**Ключові слова:** згустки заряджених часток, нестійкість двох потоків, поля кильватерного сліду.

The verification and investigation of mathematical model of short 1D single monoenergetic bunches of charges particles, which have being moved in plasma, are examined. The computation have been done by the instrumentality of CUDA technology. The accumulation of the field energy is not happened, when the size of bunch exceed several wave length of excited plasma oscillations. The evolution of the bunch become formed by two-stream dissipative instability. The maximum amplitude regions remain allocated in laboratory system of coordinates.

**Key words:** bunches of charges particles, two-stream instability, field of the wake.

### 1. Введение

Применение высокоэнергетических и сильноточных коротких электронных пучков – сгустков, движущихся в плазме для ускорения ионов [1,2], поставили перед исследователями две проблемы: как добиться наибольшей амплитуды кильватерного поля за электронным сгустком и каким образом обеспечить устойчивость его наиболее эффективной конфигурации, которую, как полагали, нужно специальным образом приготовить. В настоящей работе рассмотрим применимость и проведем верификацию математической модели, используемой для изучения динамики коротких пучков - сгустков заряженных частиц, которые инжектируются в холодную плазму. На основе результатов моделирования обсудим характер излучения и устойчивость движущихся в холодной плазме одномерных сгустков заряженных частиц одной энергии. Будем полагать число частиц в сгустках разного размера фиксированным. В отличие от предыдущих

исследований [3,4], число моделирующих частиц увеличено. Кроме того, в данной работе, вследствие применения более мощной расчетной схемы, основанной на технологии CUDA, использован более обширный инструментарий диагностики результатов моделирования.

## 2. Математическая модель процесса эволюции движущегося сгустка заряженных частиц

Нетрудно видеть, что кильватерное поле излучения отдельной частицы представляет собой результат ее спонтанного излучения. Спонтанные поля отдельных частиц сгустка (при их однородном распределении и при отсутствии внешних механизмов синхронизации), отличаются фазой, которая, вообще говоря, по крайней мере, в начальный момент, случайная, то есть спонтанное излучение однородно распределенных и не сфазированных  $n$  излучателей - некогерентное. Изменение энергии спонтанного излучения в единицу времени пропорционально числу излучателей, то есть  $\propto n$ . На каждую частицу действует ее собственное поле и поле частиц, которые находятся впереди нее.

Поле спонтанного излучения в замкнутом объеме растет линейно со временем [5], в открытой системе – в сгустке рост поля ограничен выносом энергии за пределы сгустка. Но начиная с некоторого момента группировка излучателей может оказаться такой, что инициативу воздействия на частицы способно перехватить излучение, порожденное сгруппированными частицами. Растет степень когерентности и в общем излучении сгустка, то есть фазы многих отдельных излучателей слабо отличаются друг от друга. Изменение энергии поля в единицу времени в этом случае пропорционально квадрату числа синхронизованных осцилляторов. Причем подобная синхронизация происходит под действием излучаемой волны и управляется ею.

Суммируя поля всех частиц сгустка получим выражение для поля [6]:

$$E(\xi) = -\frac{2}{N} \sum_{\alpha} f_{\alpha} \cos[2\pi g_{\alpha}(\xi - \xi_{\alpha})] \Theta(\xi_{\alpha} - \xi), \quad (1)$$

К выражению следует добавить уравнения движения для частиц:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = E(\xi), \quad (2)$$

где  $2\pi\xi = K_0(z - V_0t)$ ,  $v = K_0(V - V_0)/2\pi\gamma_L$ ,  $\gamma_L^2 = e^2 K_0 M / m_e$ ,  $g = (1 + \Delta \cdot v)^{-1}$ ,  $\Delta = 2\pi\gamma_L / K_0 V_0$ ,  $\tau = \gamma_L t$ , и  $M$  - общее число частиц в сгустке в единичном сечении;

$E = eK_0 E / 2\pi m_e \gamma_L^2$ ,  $E$  - напряженность электрического поля;

$f_{\alpha}$  - статистический вес крупной частицы, моделирующей пучок;

$e$ ,  $m_e$ ,  $K_0 = \omega_{pe} / V_0$  - заряд, масса электронов и волновое число кильватерного поля.

### 3. Реализация программы

Программа, реализующая математическую модель задачи, создана с использованием технологии java compute unified device architecture (JCUDA). JCUDA обеспечивает взаимодействие с технологией CUDA [7] из Java-программы.

Созданная JCUDA-программа обеспечивает выполнение из Java-программы программного кода на графическом процессоре (graphics processing unit (GPU)), написанного на языке программирования C со вставками кода, характерными для технологии CUDA.

Программный код, который выполняется параллельно на GPU, записан в файле с расширением `‘.cu‘` и в скомпилированном виде в файле с расширением `‘.cubin‘`.

Управление выполнением кода на GPU задается в Java-программе:

- особенности распараллеливания программы при выполнении на GPU;
- создание указателей на массивы, расположенные в памяти GPU, и выделение для них памяти;
- помещение переменных и массивов и извлечение массивов из памяти GPU;
- освобождение памяти.

Вычисления производятся на GPU GeForce 8600 GT с 32 ядрами CUDA (с частотой ядра 0,54ГГц) и на одном ядре двухядерного центрального процессора (central processing unit (CPU)) AMD Athlon64 X2 (с частотой ядра 2,2ГГц).

При выполнении программы не все вычисления выполняются на GPU. На CPU выполняется расчет координат  $V$  и  $\xi$  для начального момента времени и обработка полученных на GPU результатов вычислений. Тем не менее, основное время затрачивается именно на вычисления на GPU. В это время не включается также время, затраченное на выделение памяти на GPU, помещение массива в эту память и извлечение массива с результатами вычислений из памяти GPU. При увеличении числа частиц доля времени вычисления на GPU от общего времени выполнения программы стремится к 100%. Это показывает, что в созданном алгоритме расчета на JCUDA не имеется резервов для повышения скорости выполнения программы путем переноса вычислений на GPU.

Другой вариант программы производит вычисления полностью на CPU. Затем сравниваются результаты вычислений, выполненных на GPU и CPU. На CPU вычисления производятся на языке Java, который медленнее языка C до нескольких раз, поэтому ускорение на GPU по сравнению с CPU является достаточно большим – до 70 раз (Табл. 1).

Вычисления на GPU выполняются в одинарной точности. В связи с этим возникают отклонения в результатах, от результатов, полученных при вычислениях в двойной точности, выполненных на CPU. Однако для данной задачи при выбранных параметрах счета отклонения невелики и находятся в пределах десятитысячных долей единицы. При необходимости повышение точности вычислений на GPU должно быть обеспечено использованием современной GPU с поддержкой двойной точности вычислений. Использование современной GPU даст еще большую скорость вычислений на GPU по сравнению с CPU.

Табл. 1. Время расчета на CPU и GPU при числе интервалов изменения положения частиц равном 50.

число частиц N	время расчета на CPU, с	время расчета на GPU, с	ускорение на GPU по сравнению с CPU, раз
1000	4,3	0,2	20,6
2000	18	0,6	32,8
3000	40,6	1	40,2
4000	86,3	1,7	49,8
5000	146,7	2,5	58,7
6000	218	3,3	64,8
7000	297	4,5	65,3
8000	390	5,8	66,2
9000	495	7,2	69,2
10000	613	8,8	70

На основе полученных результатов строится график ускорения вычислений на GPU по сравнению с CPU в зависимости от числа частиц:

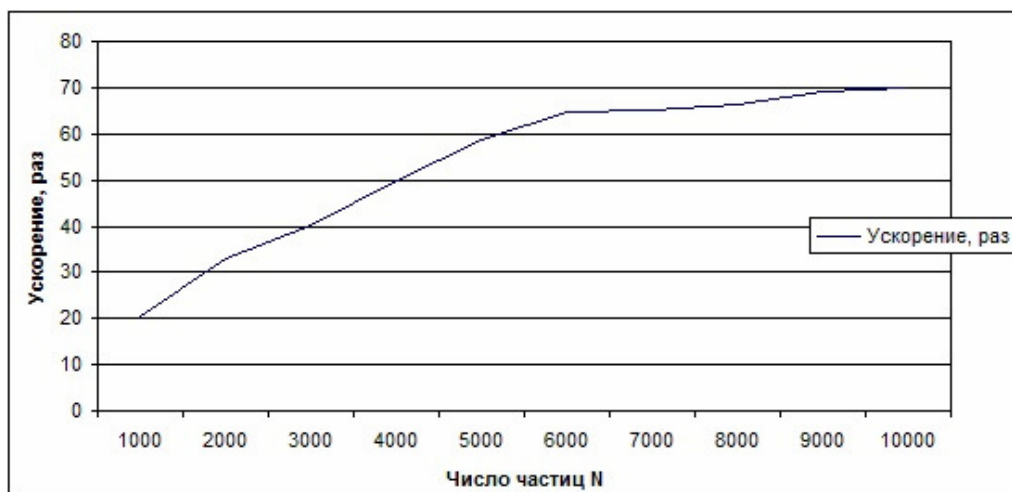


Рис. 1. Ускорение вычислений на GPU по сравнению с CPU

Оперативная память компьютера, на котором происходят вычисления, составляет 1Гб. Максимальный размер памяти, который может быть использован виртуальной машиной Java равен 247,5Мб. Во время выполнения Java-программе выделяется еще меньше памяти, и часть выделенной памяти остается свободной.

Прогнозирование времени выполнения программы для наиболее производительных современных GPU делается путем сравнения теоретической производительности для одинарной точности GPU (измеряемой в Гигафлопс (GFLOPS)), на которой происходят вычисления, с теоретической производительностью других GPU. Наиболее быстрый результат при расчете в

одинарної точності с числом часових інтервалів рівном 1 і числом частиць рівном 1000 000 повинна показати GPU GeForce GTX 580 с 512 ядрами CUDA – 105 секунд по порівнянню с 1470 секунд на GPU GeForce 8600 GT.

#### 4. Моделирование процесса неустойчивости сгустка

Уравнения (1), (2) описывают нелинейную динамику короткого одномерного электронного сгустка, распространяющегося сквозь плотную плазму в системе его покоя [6]. Не трудно показать, что эта система уравнений практически полностью эквивалентна системе уравнений для диссипативной пучковой неустойчивости [5], где изменением огибающей амплитуды поля со временем можно пренебречь, то есть  $\partial E / E \partial t \ll \delta_D$ , в сравнении с декрементом поглощения, который в этом случае равен  $\delta_D = V_0 / a$ . Таким образом, данная модель, как показано в работах [4,5], корректно описывает динамику одномерного короткого моноэнергетического пучка заряженных частиц, распространяющегося в плазме. Энергия поля за время  $a / V_0$  выносится из объема сгустка, а рост амплитуды за это время пропорционален  $\exp\{(a / V_0) \cdot [\omega_{pe} (\omega_{be} / \omega_{pe})^{2/3} / \Theta^{1/2}] \approx 1 - (1 / \Theta^{3/2})\}$  и весьма незначителен. Таким образом, рост поля в объеме пучка обусловлен в большей степени группировкой частиц и повышением когерентности их излучения [4,5].

**Сгустки малой плотности.** Рассмотрим динамику сгустков малой плотности (при этом можно положить  $\Delta = 0$ ), размер которых превышает в несколько раз длину излучаемой волны. Из-за большого уровня излучения из объема пучка неустойчивость приобретает ярко выраженный диссипативный характер. Амплитуда поля быстро возрастает и ограничение этого роста обусловлено эффектом захвата частиц в потенциальную яму волны. При этом частота осцилляций захваченных частиц  $\Omega_{TR} = \sqrt{eK_0 E / m_e}$  оказывается порядка величины линейного инкремента неустойчивости  $\gamma_L = \sqrt{e^2 K_0 M / m_e}$ .

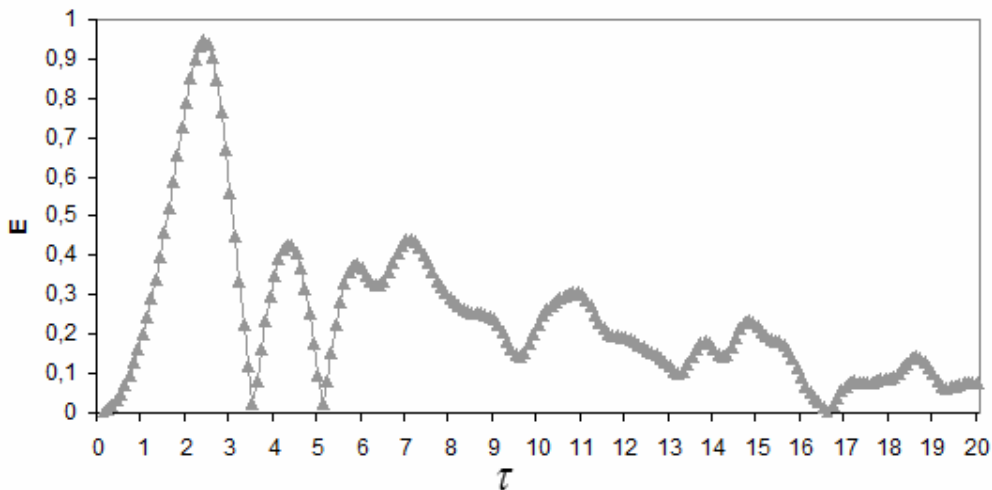


Рис.2. Максимальная амплитуда поля  $E$  за сгустком  $L=5$ ,  $\Delta = 0$ .

Ниже представлено положение частиц короткого пучка - сгустка из 1000 частиц на фазовой плоскости  $(v, \xi)$ , поле и плотность сгустка для двух моментов времени  $\tau = 2.39$  и  $\tau = 5.12$ , когда достигается максимум и минимум амплитуды поля непосредственно позади сгустка.

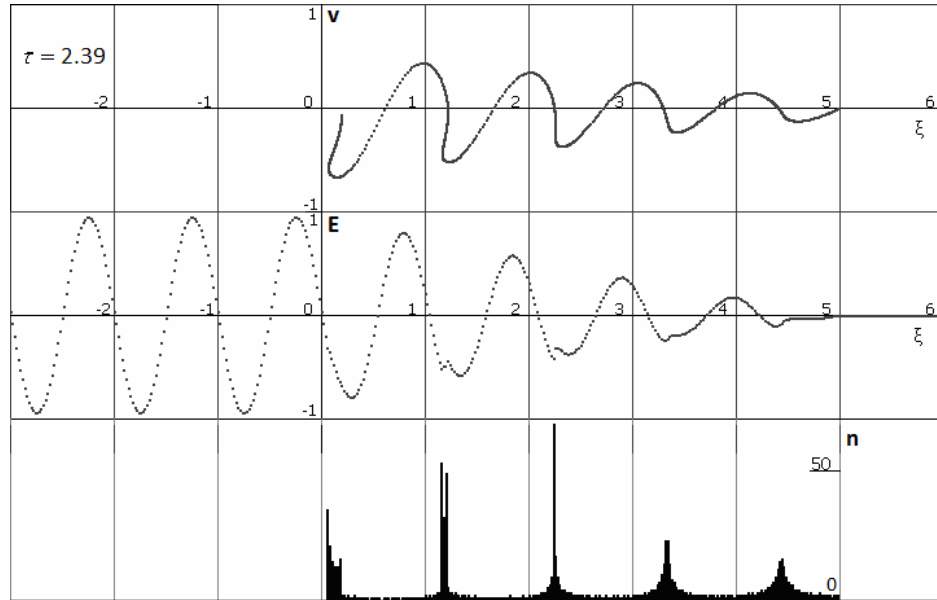


Рис.3. Фазовая плоскость  $(v, \xi)$ , поле  $E(\xi)$ , и плотность  $n(\xi)$  при достижении максимума поля вблизи сгустка при  $\tau = 2.39$ ,  $L=5$ ,  $\Delta = 0$ .

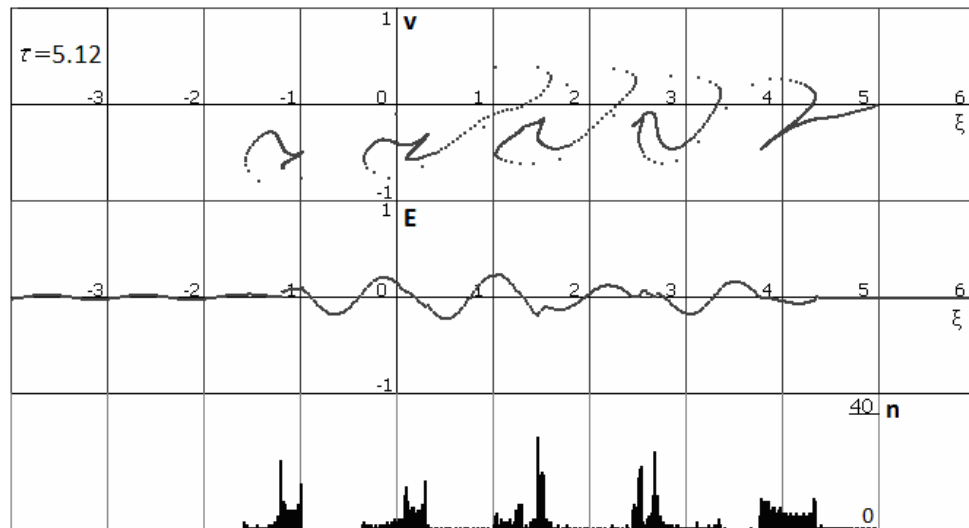


Рис.4 Фазовая плоскость  $(v, \xi)$ , поле  $E(\xi)$ , и плотность  $n(\xi)$  при достижении минимума поля вблизи сгустка при  $\tau = 5.12$ ,  $L=5$ ,  $\Delta = 0$ .

Видно, что на длине такого короткого пучка-сгустка возникает неустойчивость с формированием его тонкой структуры. Эта неустойчивость представляет собой диссипативную пучковую неустойчивость, которая приводит к пространственной модуляции пучка и формированию пяти достаточно компактных бунчей. В результате неустойчивости максимальная амплитуда поля достигает значений порядка единицы в данной нормировке. Отметим, что излучение компактной квазичастицы представляющей собой собранные в одну точку все частицы сгустка генерировало бы кильватерный след с максимально возможной амплитудой поля равной  $E = E_{LM} = 2$  в данной нормировке.

**Моделирование динамики сгустков относительно большой плотности.** В случае увеличения плотности частиц короткого пучка-сгустка, каждая моделирующая частица представляет собой компактную квазичастицу с массой  $Nm_e$  и зарядом равным  $Ne$ . При этом вместо  $\gamma_L^2 = e^2 K_0 M / m_e$  следует записать  $\gamma_L^2 = N^2 e^2 K_0 (M / N) / Nm_e$ . Другими словами, система уравнений остается прежней. Однако, теперь из-за значительно возросшего числа частиц  $M$  плотного сгустка, отношение линейного инкремента к частоте может быть не столь мало и  $\Delta \neq 0$ . Обсудим случай достаточно плотных пучков  $\Delta = 0.1$  размеры которых заметно превосходят длину излучения, которая в данном описании принята за единицу. Особенность динамики такого короткого пучка обусловлена изменением длины волны излучения из-за существенно большего торможения и ускорения частиц. В режиме развитой неустойчивости максимально достижимая амплитуда кильватерного поля со временем представлена на рис. 5:

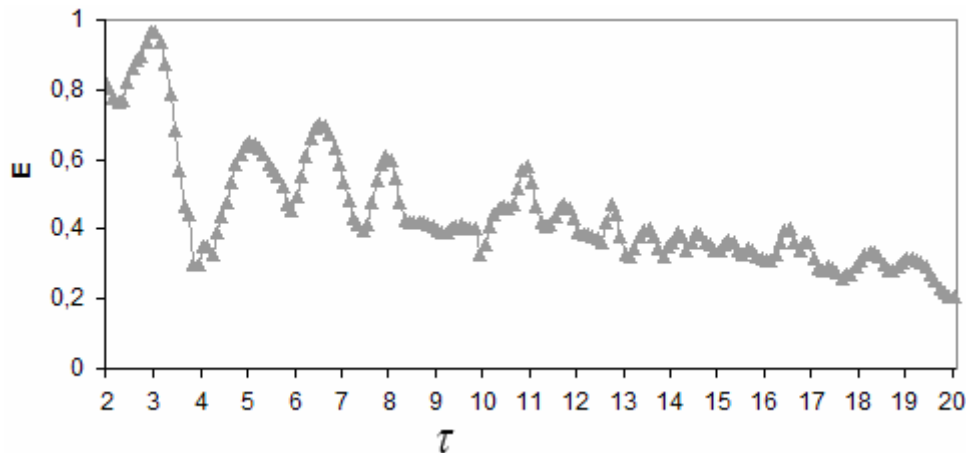


Рис.5. Максимальная амплитуда поля  $E$  за сгустком  $L=5$ ,  $\Delta = 0.1$  в режиме развитой неустойчивости

Ниже представлено положение частиц короткого пучка-сгустка из 1000 квазичастиц на фазовой плоскости  $(v, \xi)$ , поле и плотность пучка для двух моментов времени  $\tau = 2.85$  и  $\tau = 3.91$ , когда достигается максимум и минимум амплитуды поля непосредственно позади плотного сгустка.

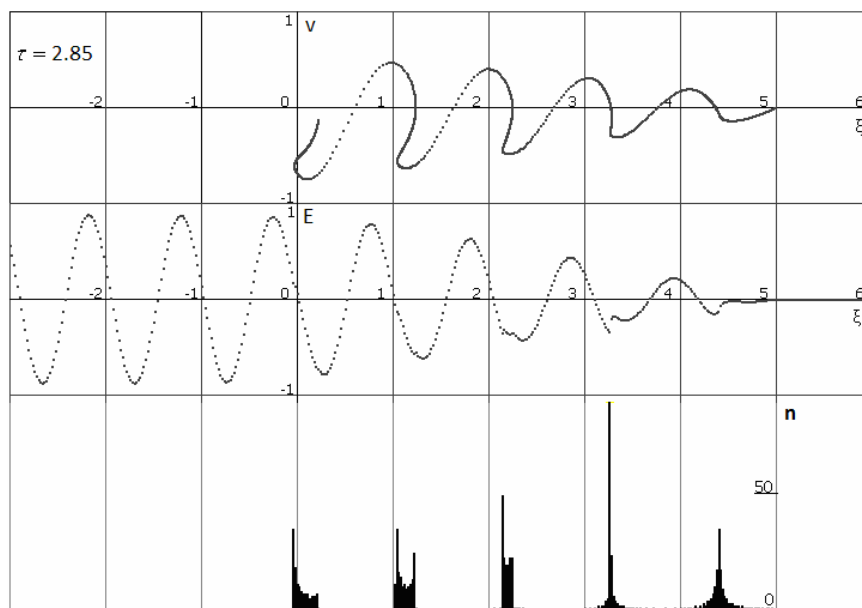


Рис.6. Фазовая плоскость  $(v, \xi)$ , поле  $E(\xi)$ , и плотность  $n(\xi)$  при достижении максимума поля вблизи сгустка при  $\tau = 2.85$ ,  $L=5$ ,  $\Delta = 0.1$ .

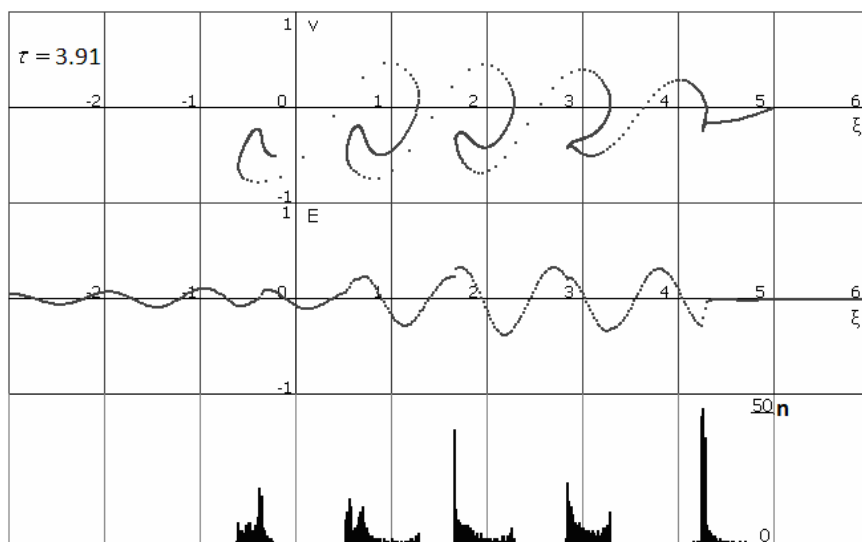


Рис.7. Фазовая плоскость  $(v, \xi)$ , поле  $E(\xi)$ , и плотность  $n(\xi)$  при достижении минимума поля вблизи сгустка при  $\tau = 3.91$ ,  $L=5$ ,  $\Delta = 0.1$ .

Имеет смысл рассмотреть характер фазовой синхронизации частиц пучка, для чего можно для каждой частицы вычислить значение  $\varphi_\alpha = g_\alpha(\xi_\alpha - \xi)$ , при этом удаляя целую часть этой величины. Умножение на  $g_\alpha$  учитывает, что поле каждой частицы имеет разную длину волны излучения. Точку наблюдения  $\xi$



выберем в окрестности максимума поля за сгустком. Результаты вычисления  $\varphi_\alpha = g_\alpha (\xi_\alpha - \xi)$  должны попадать в интервал  $(0-1)$ . При этом можно найти распределение частиц по этим фазам  $n(\varphi)$ . Кроме того, учитывая, что в результате интерференции поля излучающих частиц с  $\varphi$  и  $\varphi + \pi$  взаимно подавляются, то имеет смысл определить величину  $n(\varphi) - n(\varphi + \pi)$ , разумеется, если величина  $n(\varphi + \pi)$  не равна нулю.

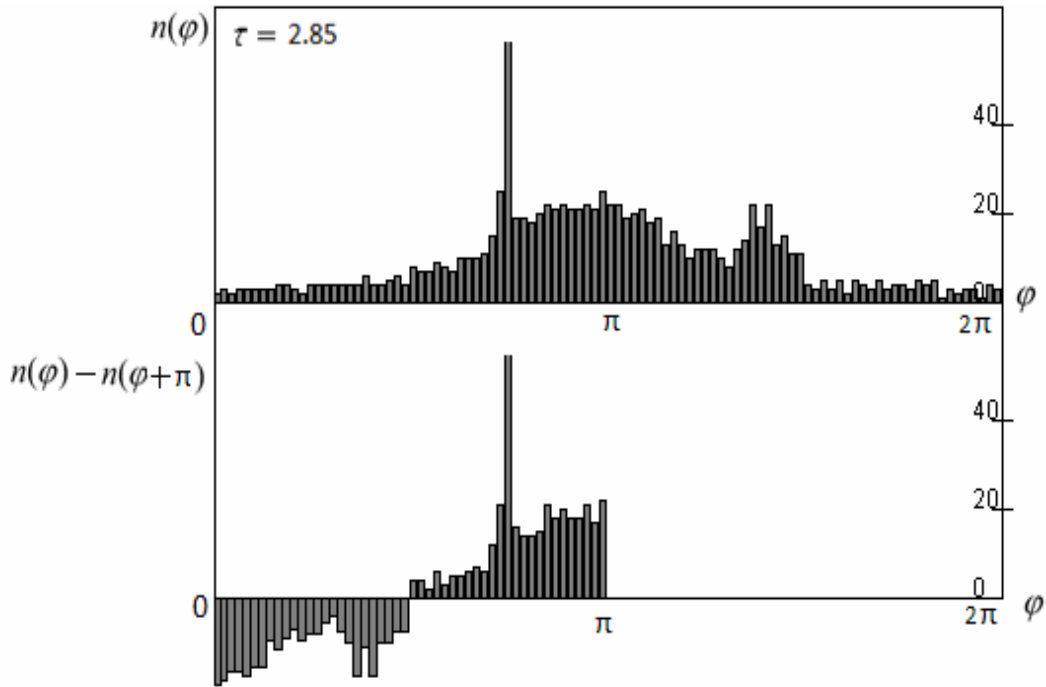


Рис.8. Распределение частиц по фазам излучающих полей вблизи максимума поля всех 1000 частиц на верхнем графике. На нижнем графике при тех же условиях

$$\sum_{\alpha} \{n(\varphi_{\alpha}) - n(\varphi_{\alpha} + \pi)\} = 642, L=5, \Delta = 0.1.$$

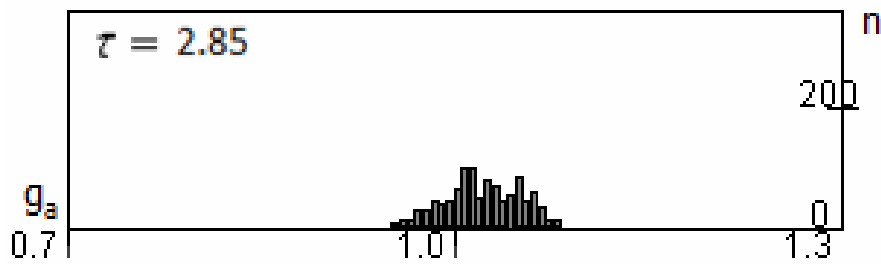


Рис.9. Распределение частиц сгустка по волновым числам излучающих полей  $g$  вблизи максимума поля,  $L=5, \Delta = 0.1$ .

Спектр излучения можно определить, рассматривая распределение частиц по величине волнового вектора излучающего поля  $g = (1 + \Delta \cdot \nu)^{-1}$ .

Легко видеть, что в процессе неустойчивости происходит интенсивная модуляция плотности частиц пучка, увеличивается разброс частиц по скоростям, обусловленный как квазиосцилляторным движением в потенциальных ямах поля, так и общим торможением пучка как целого в результате излучения. В результате неустойчивости максимальная амплитуда поля достигает значений порядка единицы в данной нормировке, так же как и в случае сгустка малой плотности.

В заключении отметим, что при увеличении  $\Delta$  корректность модели нарушается и следует переходить к описанию, которое применили авторы [8]. Однако можно показать [9], что даже при  $\Delta \propto 0.1$  изменениями скорости частицы за время пролета расстояния, сравнимого с размерами сгустка можно пренебречь. Искажения поля проявляются лишь на расстояниях в несколько раз больших размера сгустка. То есть, в обсуждаемых условиях модель достаточно хорошо описывает динамику сгустка.

### 5. Верификация модели

Интегродифференциальная система уравнений обеспечивает высокую устойчивость по отношению к малым изменениям начальных условий для фиксированного числа уравнений, но прежде ее не исследовали на устойчивость при изменении количества уравнений, что отвечает изменению числа расчетных элементов, которыми являются в математической модели частицы.

**Устойчивость по отношению к изменению числа частиц.** Далее рассмотрим сгусток, который представляет собой 1000 частиц, равномерно распределенных на длине  $\xi \subset (0, L)$  с нулевыми начальными скоростями. Кроме этого сгустка рассмотрим еще два сгустка, с числом частиц в 10 и в 100 раз больше.

Для этого между каждыми двумя частицами основного сгустка из 1000 частиц (назовем их опорными) равномерно расположим 9 или 99 частиц дополнительно.

Из результатов расчета следует, что на рассматриваемых временах динамика основных (опорных) частиц не изменяется (рис.10). То есть, модель устойчива к изменению числа элементов (переменных или частиц) и результаты расчетов не противоречат физической природе процесса.

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать сгустки, число моделирующих частиц (квазичастиц) которых будет равно  $N = 10^3$ .

**Подтверждение эффекта локализации возбуждаемых колебаний за пучком в лабораторной системе координат.** Возбуждение движущимся сгустком колебаний в плазме должно сопровождаться локализацией этих колебаний в лабораторной системе отсчета. Это обусловлено равной нулю групповой скоростью возбуждаемых ленгмюровских колебаний. Проверим, позволяет ли данная модель обнаружить это явление, и по полученным результатам сделаем вывод о согласовании модели с известными физическими представлениями.

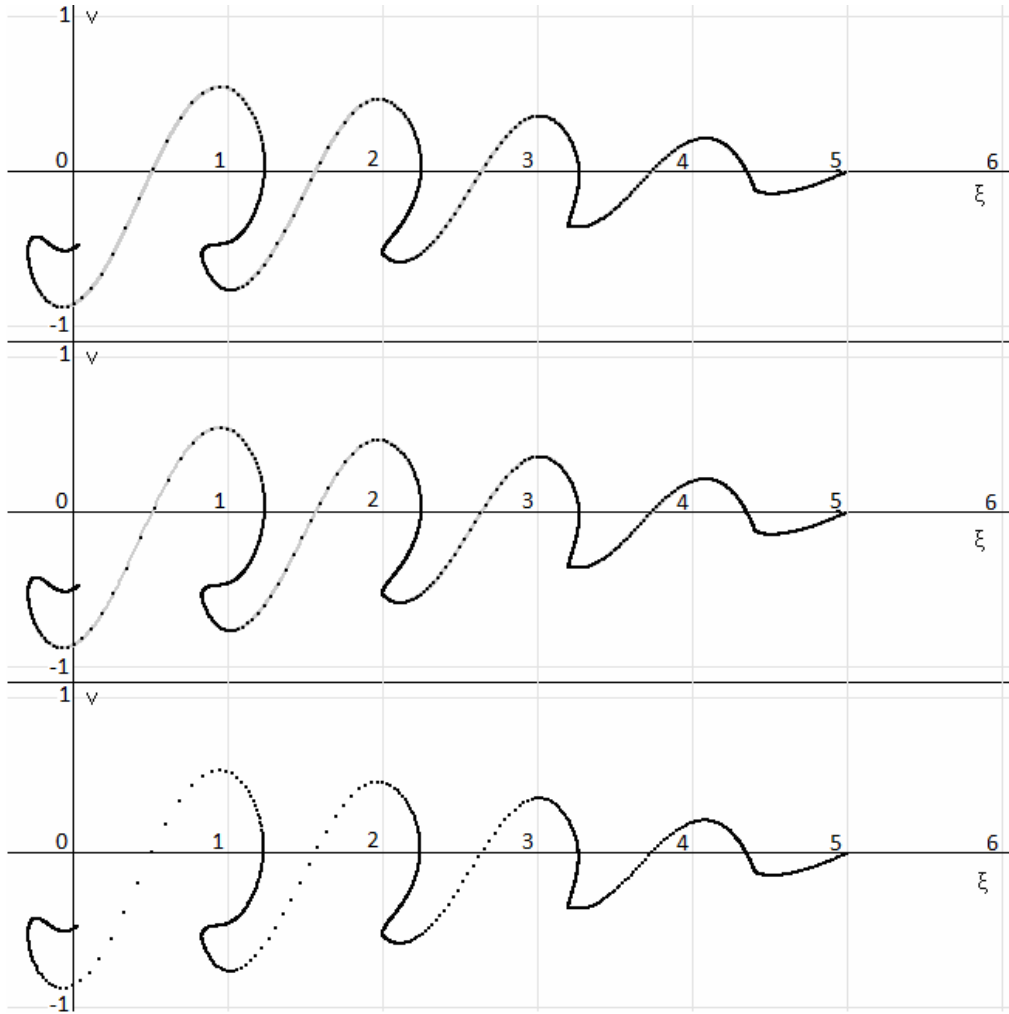


Рис. 10. Фазовая плоскость частиц короткого пучка с числом частиц  $N = 10^5$  (верхний график),  $N = 10^4$ ,  $N = 10^3$  (нижний график) при  $\tau = 3$ . Опорные частицы представлены черным цветом, остальные – серым.

Из результатов расчетов следует, что наибольший (глобальный) максимум огибающей поля быстро отстает от сгустка, рассмотрение которого проводится в системе покоя пучка, который движется относительно лабораторной со скоростью равной  $V_0$ . Зависимость расстояния  $L_{MOD}$  от сгустка до области этого глобального максимума поля показана на рис.11. Можно показать, что в лабораторной системе отчета выделенный максимум поля практически не перемещается (отдельные выбросы на графиках рис. 11 обусловлены неточностью диагностической методики определения максимума из-за наличия множества локальных экстремумов), что свидетельствует о «замораживании» поля после пролета сгустка. Так как групповая скорость ленгмюровских колебаний холодной плазмы равна нулю, подобные результаты свидетельствуют

о качественном согласовании данной модели с известными физическими представлениями.

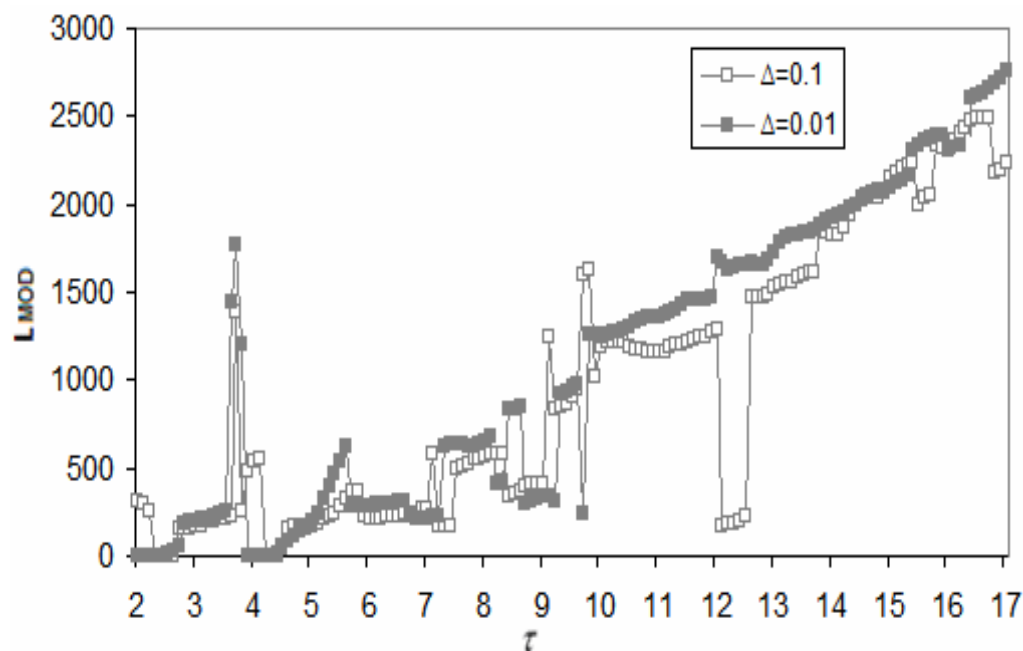


Рис.11. Изменение положения  $L_{MOD}$  максимума кильватерного поля по отношению к протяженным ( $L=5$ ) сгусткам заряженных частиц разной плотности ( $\Delta = 0.01$  и  $\Delta = 0.1$ ) от времени во всей области рассмотрения. Для  $\Delta = 0.1$  значения умножены на 10.

## 6. Выводы

Изучена модель движущегося одномерного сгустка заряженных частиц одной энергии в холодной плазме. Разработана расчетная схема, основанная на технологии CUDA, за счет применения которой вычисления проведены с высокой скоростью без потери точности.

Получены результаты моделирования, которые показали, что в объеме пучка возникает неустойчивость и амплитуда поля в определенной области, которая отстает от пучка, достигает значений вдвое меньших максимально возможной амплитуды излучения очень компактного сгустка с тем же количеством моделируемых частиц.

Проведен анализ влияния числа частиц на устойчивость расчетов, показано, что изменение числа частиц (уравнений) на один-два порядка сохраняет основные физические характеристики модели. Проведенная верификация модели на обнаружение явления локализации возбуждаемого поля в лабораторной системе отсчета продемонстрировала физическую адекватность описания в рамках данной системы уравнений известным физическим представлениям.

Авторы выражают благодарность Куклину В.М. за постановку задачи и Мищенко В.О. за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. Chen, J.M.Dawson, R.W. Huff and T. Katsouleas Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with plasma.// Phys Rev. Lett., 1985, V.54 p 693-696.
2. T. Katsouleas Physical Mechanisms in the plasma wake-field accelerator.//Phys.Rev.A., 1986, V.33, p.2056-2064.
3. В.М. Куклин, И.П.Панченко, Ф.Х.Хакимов. Многоволновые процессы в плазме. Душанбе, Дониш, 1999, 175с.
4. Об особенностях излучения движущихся одиночных электронных сгустков в плазме. / Киричок А.В., Куклин В.М., Мишин А.В.//ВАНТ, Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения, 2010, №4(68), с.58-61/
5. О процессах излучения в неравновесных средах (обзор). /Куклин В.М.// Вісник ХНУ ім. В.Н.Каразіна. сер. фізична «Ядра, частинки, поля». № 933, вып. 4 (48), 2010 .- С.4-27.
6. В.М.Куклин. Одномерные движущиеся сгустки заряженных частиц в плазме. //Укр. Физ. Журнал, 1986, т. 31, № 6, с. 853-857;
7. Marco Hutter. JCUDA. – [jcuda.org](http://jcuda.org), 2008 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://jcuda.org/>. — Электрон. версия, 2008. – HTML формат.
8. В.А. Балакирев, Н.И. Карбушев, А.О. Островский, Ю.В. Ткач. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках. Киев: Наукова думка, 1993, 208 с.
9. Киричок А.В., Куклин В.М., Мишин А.В., Приймак А.В. 1D модель движущегося в плазме сгустка заряженных частиц (в печати).