УДК 519.832.3+519.711.2

Решение обобщённой нестрогой задачи устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости с минимумом отклонений

В. В. Романюк

Хмельницкий национальный университет, Украина

Решается одна задача устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости в смысле допустимости максимального абсолютного отклонения принимаемой модельной оценки от зафиксированных модельных значений. Доказывается, что в решении такой задачи применение антагонистической модели предпочтительно применению среднего арифметического. Несмотря на тривиальность вычисления средней взвешенной модельной оценки по одному из вероятностных распределений в оптимальной стратегии исследователя по соответствующей антагонистической модели, это распределение может быть использовано как исходное при последовательном приближении к действительному распределению вероятностей на трёх моделях.

Ключевые слова: *трёхмодельная неопределённость, допустимое отклонение, принцип гарантировано минимальных абсолютных отклонений, среднее взвешенное значение.*

Розв'язується одна задача усунення однопараметричної тримодельної невизначеності у смислі допустимості максимального абсолютного відхилення модельної оцінки, що приймається, від зафіксованих модельних значень. Доводиться, що у розв'язку такої задачі застосування антагоністичної моделі переважає застосування середнього арифметичного. Незважаючи на тривіальність обчислення середньої зваженої модельної оцінки по одному з імовірнісних розподілів в оптимальній стратегії дослідника за відповідною антагоністичною моделлю, цей розподіл може бути використаний як вихідний при послідовному наближенні до дійсного розподілу ймовірностей на трьох моделях.

Ключові слова: *тримодельна невизначеність, допустиме відхилення, принцип гарантовано мінімальних абсолютних відхилень, середнє зважене значення.*

There is solved a problem of removing single-parameter three-model uncertainty in the sense of tolerance of maximal absolute deviation of the assumed model evaluation from the fixed model values. It is proved that in solving such problem the antagonistic model application is preferential to the arithmetic mean application. Despite the triviality of calculating the weighted average model evaluation over one of probabilistic distributions in the investigator optimal strategy on the corresponding antagonistic model, this distribution may be used as initial by successive approximation to the real probability distribution over three models.

Key words: *three-model uncertainty, admissible deviation, principle of assuredly minimal absolute deviations, weighted average value.*

Актуальность проблемы

Устранение неопределённостей в общем виде представляет собой достаточно сложную проблему, оперирующую категориями риска, потерь, отклонений, уровнем доверия или оптимизма. Тем более, если речь идёт о модельных неопределённостях [1, 2], задача устранения неопределённостей становится ещё фундаментальнее, а, значит, и сложнее. Модельные неопределённости возникают при оценивании износа рабочих поверхностей [2], деталей и агрегатов, в описании эмпирических зависимостей вязкостных свойств жидкостей, вязкопластичности, вязкоупругих деформаций и контактов, а также во множестве иных физических и естественных явлений, процессов и систем [3, 4]. Поэтому поиск и исследование методов устранения модельных неопределённостей актуальны для восстановления определённости [5, 6] в логико-математическом описании многих объектов.

Анализ нерешённой части проблемы

Однопараметрические модельные неопределённости являются простейшими. Задача устранения однопараметрической модельной неопределённости с двумя моделями тривиальна, поскольку в ней невозможно опровергнуть гипотезу о равновероятном использовании каждой из двух моделей [7, 8]. Поэтому задача устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости является самой простой, хотя в общем виде она ещё не решалась [9, 10].

Цель работы и постановка задач

Пусть v_i является величиной параметра v объекта, описываемого в данный момент времени (ДМВ) с помощью i-й математической модели (ММ), $i = \overline{1, 3}$. В этот же момент времени три рассматриваемых ММ порождают множество

$$\{v_i\}_{i=1}^{3} = \{v_1, v_1 + a, v_1 + a + b\}, \quad v_1 \in \mathbb{R}, \; a > 0, \; b > 0. \tag{1}$$

Какой бы ни оказалась оценка

$$\hat{v} \in [v_1; v_1 + a + b] = \left[\min\left(\{v_i\}_{i=1}^{3}\right); \max\left(\{v_i\}_{i=1}^{3}\right)\right] \tag{2}$$

исследуемого параметра, необходимо, чтобы её отклонение от действительного значения параметра не превышало задаваемое допустимое максимальное абсолютное отклонение (ДМАО) $\delta_v^{(\max)} > 0$, где критерий

$$|\hat{v} - v| \leqslant \delta_v^{(\max)} \tag{3}$$

принятия оценки $\hat{v}$ записывается в форме требования

$$\max_{i=\overline{1, 3}} \{|\hat{v} - v_i|\} \leqslant \delta_v^{(\max)}. \tag{4}$$

Чтобы решить задачу устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости (ЗУОТН), порождённую множеством (1), для задаваемого ДМАО необходимо осуществить такой выбор (2), при котором выполнено (4). Оценка (2) может определяться как с помощью среднего арифметического (СА), так и с помощью гарантировано минимальных абсолютных отклонений (ГМАО)

$$u_{kj} = |v_k - v_j| \quad \forall\; k = \overline{1, 3} \;\; \text{и} \;\; \forall\; j = \overline{1, 3}. \tag{5}$$

Используя метод СА наряду с принципом ГМАО, сначала посмотрим, при каких

$\delta_v^{(\max)}$ метод СА применим, а затем определим границу применения принципа ГМАО. И если эта граница выйдет такой, что при значениях $\delta_v^{(\max)}$, меньших за некоторое граничное ДМАО, принцип ГМАО применим, а метод СА — нет, то это будет означать преимущество принципа ГМАО перед методом СА в решении нестрогой обобщённой ЗУОТН (2).

Нестрогая обобщённая ЗУОТН (2) по множеству (1)

При использовании СА

$$\overline{v} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + \frac{2a+b}{3} \tag{6}$$

по множеству (1) для оценки $\hat{v} = \overline{v}$ в левой части условия (4) получаем

$$\max_{i=1,\,3}\left\{\left|\overline{v} - v_i\right|\right\} = \max\left\{\frac{2a+b}{3}, \frac{|a-b|}{3}, \frac{a+2b}{3}\right\} =$$
$$= \frac{2a+b}{3}\cdot\frac{1+\operatorname{sign}(a-b)}{2} + \frac{a+2b}{3}\cdot\frac{1-\operatorname{sign}(a-b)}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{6}\cdot\operatorname{sign}(a-b). \tag{7}$$

Значение в правой части (7) можно воспринимать как граничное ДМАО для метода СА, при котором этот метод ещё применим. В других словах, метод СА применим при

$$\delta_v^{(\max)} \geqslant \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{6}\cdot\operatorname{sign}(a-b). \tag{8}$$

А если

$$\delta_v^{(\max)} < \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{6}\cdot\operatorname{sign}(a-b), \tag{9}$$

то обобщённую ЗУОТН (2) по множеству (1) с помощью применения СА решить невозможно.

Применение принципа ГМАО (5) состоит в использовании оптимальной стратегии второго игрока (ОСВИ) матричной 3×3-игры

$$\left\langle \left\{m_k\right\}_{k=1}^{3}, \left\{s_j\right\}_{j=1}^{3}, \left[u_{kj}\right]_{3\times 3} \right\rangle. \tag{10}$$

В игре (10) чистая стратегия (ЧС) m_k первого игрока означает то, что именно k-я ММ со значением её параметра v_k является в ДМВ основной, а ЧС s_j второго игрока означает выбор им оценки v_j или, что то же самое, принятие j-й ММ как основной в ДМВ. Найдём ОСВИ

$$\breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix}\breve{q}_1 & \breve{q}_2 & \breve{q}_3\end{bmatrix} \in \mathcal{Q} \tag{11}$$

в фундаментальном двумерном симплексе (равностороннем треугольнике)

$$\mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : q_j \in [0;\, 1]\ \forall\ j = \overline{1,\, 3},\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \right\} \tag{12}$$

в, собственно, игре

$$\left\langle \left\{ m_k \right\}_{k=1}^{3},\, \left\{ s_j \right\}_{j=1}^{3},\, \begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ a & 0 & b \\ a+b & b & 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \tag{13}$$

Теорема 1. В игре (13) при $a > b$ второй игрок обладает континуумом оптимальных стратегий (КОС)

$$\breve{\mathcal{Q}} = \left\{ \breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \breve{q}_1 & \breve{q}_2 & \breve{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{2a}\left(\dfrac{a-b}{b} + \lambda\right) & \dfrac{a+b}{2a}(1-\lambda) & \dfrac{1}{2}\lambda \end{bmatrix} \in \right.$$

$$\left. \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0;\, 1] \right\} \subset \mathcal{Q}. \tag{14}$$

Доказательство. Применяя метод задачи линейного программирования (ЗЛП), построим по отношению к увеличенной на единицу матрице игры (13) расширенную 4×7-матрицу $\left[g_{zw} \right]_{4\times 7}$, в которой элементы $\left\{ g_{z1} \right\}_{z=1}^{3}$ являются свободными членами в ограничениях, элементы $\left\{ g_{4w} \right\}_{w=2}^{4}$ равны коэффициентам целевой функции, элементы с пятого по седьмой столбик получаются из введения этих столбиков в качестве базисных, а элемент g_{41} указывает значение целевой функции, взятое с противоположным знаком. Вводя в базис элемент g_{32} на первой итерации, получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+b+1 & b+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{a+b+1} & 0 & \dfrac{a(a+b+2)}{a+b+1} & \dfrac{(a+b)(a+b+2)}{a+b+1} & 1 & 0 & -\dfrac{1}{a+b+1} \\ \dfrac{b}{a+b+1} & 0 & \dfrac{-ab}{a+b+1} & \dfrac{b(a+b+2)}{a+b+1} & 0 & 1 & -\dfrac{a+1}{a+b+1} \\ \dfrac{1}{a+b+1} & 1 & \dfrac{b+1}{a+b+1} & \dfrac{1}{a+b+1} & 0 & 0 & \dfrac{1}{a+b+1} \\ -\dfrac{1}{a+b+1} & 0 & \dfrac{a}{a+b+1} & \dfrac{a+b}{a+b+1} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{a+b+1} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{a}{a+b} & 1 & \frac{a+b+1}{(a+b)(a+b+2)} & 0 & -\frac{1}{(a+b)(a+b+2)} \\ 0 & 0 & \frac{-2ab}{a+b} & 0 & -\frac{b}{a+b} & 1 & -\frac{a}{a+b} \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & \frac{b}{a+b} & 0 & -\frac{1}{(a+b)(a+b+2)} & 0 & \frac{a+b+1}{(a+b)(a+b+2)} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+2} & 0 & -\frac{1}{a+b+2} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где на второй итерации в базис был введён элемент g_{14}. Из (15) видно, что ОСВИ

$$\breve{\mathbf{Q}} = \left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{a+b+2}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{1}{a+b+2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}. \quad (16)$$

Но после первой итерации в эквивалентных преобразованиях (15) в базис можно вводить и элемент g_{24}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+b+1 & b+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{a+b}{a+b+1} & 0 & \frac{a(a+b+2)}{a+b+1} & \frac{(a+b)(a+b+2)}{a+b+1} & 1 & 0 & -\frac{1}{a+b+1} \\ \frac{b}{a+b+1} & 0 & \frac{-ab}{a+b+1} & \frac{b(a+b+2)}{a+b+1} & 0 & 1 & -\frac{a+1}{a+b+1} \\ \frac{1}{a+b+1} & 1 & \frac{b+1}{a+b+1} & \frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 & \frac{1}{a+b+1} \\ -\frac{1}{a+b+1} & 0 & \frac{a}{a+b+1} & \frac{a+b}{a+b+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+1} \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2a & 0 & 1 & -\frac{a+b}{b} & \frac{a}{b} \\ \frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{-a}{a+b+2} & 1 & 0 & \frac{a+b+1}{b(a+b+2)} & -\frac{a+1}{b(a+b+2)} \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & \frac{b+2}{a+b+2} & 0 & 0 & -\frac{1}{b(a+b+2)} & \frac{b+1}{b(a+b+2)} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & \frac{2a}{a+b+2} & 0 & 0 & -\frac{a+b}{b(a+b+2)} & \frac{a-b}{b(a+b+2)} \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{a+b}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{a+b+2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2(a+b+2)} & \frac{1}{2b} & -\frac{a+2}{2b(a+b+2)} \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{b+2}{2a(a+b+2)} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2(a+b+2)} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+2} & 0 & -\frac{1}{a+b+2} \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

где введение в базис элемента g_{13} на третьей итерации выбрано для условия $\frac{2a}{a+b+2} \geqslant \frac{a-b}{b(a+b+2)}$. Из (17) опять получаем ОСВИ (16). При $\frac{2a}{a+b+2} < \frac{a-b}{b(a+b+2)}$ после второй итерации в эквивалентных преобразованиях (17) в базис необходимо вводить элемент g_{17}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+b+1 & b+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{a+b}{a+b+1} & 0 & \frac{a(a+b+2)}{a+b+1} & \frac{(a+b)(a+b+2)}{a+b+1} & 1 & 0 & -\frac{1}{a+b+1} \\ \frac{b}{a+b+1} & 0 & \frac{-ab}{a+b+1} & \frac{b(a+b+2)}{a+b+1} & 0 & 1 & -\frac{a+1}{a+b+1} \\ \frac{1}{a+b+1} & 1 & \frac{b+1}{a+b+1} & \frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 & \frac{1}{a+b+1} \\ -\frac{1}{a+b+1} & 0 & \frac{a}{a+b+1} & \frac{a+b}{a+b+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+1} \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2a & 0 & 1 & -\frac{a+b}{b} & \frac{a}{b} \\ \frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{-a}{a+b+2} & 1 & 0 & \frac{a+b+1}{b(a+b+2)} & -\frac{a+1}{b(a+b+2)} \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & \frac{b+2}{a+b+2} & 0 & 0 & -\frac{1}{b(a+b+2)} & \frac{b+1}{b(a+b+2)} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & \frac{2a}{a+b+2} & 0 & 0 & -\frac{a+b}{b(a+b+2)} & \frac{a-b}{b(a+b+2)} \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2b & 0 & \frac{b}{a} & -\frac{a+b}{a} & 1 \\ \frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{a+2}{a+b+2} & 1 & \frac{a+1}{a(a+b+2)} & -\frac{1}{a(a+b+2)} & 0 \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & -\frac{b}{a+b+2} & 0 & -\frac{b+1}{a(a+b+2)} & \frac{a+b+1}{a(a+b+2)} & 0 \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & \frac{2b}{a+b+2} & 0 & \frac{b-a}{a(a+b+2)} & -\frac{a+b}{a(a+b+2)} & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{a+b}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{a+b+2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2(a+b+2)} & \frac{1}{2b} & -\frac{a+2}{2b(a+b+2)} \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{b+2}{2a(a+b+2)} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2(a+b+2)} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+2} & 0 & -\frac{1}{a+b+2} \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

где после третьей итерации в базис введён элемент g_{13} и получена ОСВИ (16). Далее, поскольку $a > b$, то на первой итерации в базис можно вводить элемент g_{13}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+b+1 & b+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 1 & \frac{a+b+1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ \frac{a}{a+1} & \frac{a(a+2)}{a+1} & 0 & \frac{ab}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & 1 & 0 \\ \frac{a-b}{a+1} & \frac{a(a+b+2)}{a+1} & 0 & -\frac{b(a+b+2)}{a+1} & -\frac{b+1}{a+1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{a+1} & \frac{a}{a+1} & 0 & -\frac{b}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{a+b}{a(a+b+2)} & 0 & 1 & \frac{a+b}{a} & \frac{a+b+1}{a(a+b+2)} & 0 & -\frac{1}{a(a+b+2)} \\ \frac{2b}{a+b+2} & 0 & 0 & 2b & \frac{b}{a+b+2} & 1 & -\frac{a+2}{a+b+2} \\ \frac{a-b}{a(a+b+2)} & 1 & 0 & -\frac{b}{a} & -\frac{b+1}{a(a+b+2)} & 0 & \frac{a+1}{a(a+b+2)} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+2} & 0 & -\frac{1}{a+b+2} \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

где при введении в базис элемента g_{32} на второй итерации использовано то, что

$$\frac{a}{a+1}\cdot\left(\frac{a(a+2)}{a+1}\right)^{-1}=\frac{1}{a+2},$$

$$\frac{a-b}{a+1}\cdot\left(\frac{a(a+b+2)}{a+1}\right)^{-1}=\frac{a-b}{a(a+b+2)},$$

$$\frac{1}{a+2}-\frac{a-b}{a(a+b+2)}=\frac{a(a+b+2)-(a+2)(a-b)}{a(a+2)(a+b+2)}=$$

$$=\frac{a^2+ab+2a-a^2-2a+ab+2b}{a(a+2)(a+b+2)}=\frac{2b(a+1)}{a(a+2)(a+b+2)}>0\,.$$

Согласно с (19) ОСВИ

$$\breve{\mathbf{Q}}=\left(\frac{a-b}{a(a+b+2)}+\frac{a+b}{a(a+b+2)}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{a-b}{a(a+b+2)} & \frac{a+b}{a(a+b+2)} & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{a+b+2}{2}\cdot\begin{bmatrix}\frac{a-b}{a(a+b+2)} & \frac{a+b}{a(a+b+2)} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a-b}{2a} & \frac{a+b}{2a} & 0\end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Четвёртым вариантом решения ЗЛП является первоначальное введение в базис элемента g_{14}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+b+1 & b+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+1} & \frac{1}{a+b+1} & \frac{a+1}{a+b+1} & 1 & \frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 \\ \frac{a}{a+b+1} & \frac{a(a+b+2)}{a+b+1} & \frac{-ab}{a+b+1} & 0 & -\frac{b+1}{a+b+1} & 1 & 0 \\ \frac{a+b}{a+b+1} & \frac{(a+b)(a+b+2)}{a+b+1} & \frac{b(a+b+2)}{a+b+1} & 0 & -\frac{1}{a+b+1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{a+b+1} & \frac{a+b}{a+b+1} & \frac{b}{a+b+1} & 0 & -\frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{a+2}{a+b+2} & 1 & \frac{a+1}{a(a+b+2)} & -\frac{1}{a(a+b+2)} & 0 \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & \frac{-b}{a+b+2} & 0 & -\frac{b+1}{a(a+b+2)} & \frac{a+b+1}{a(a+b+2)} & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 & \frac{b}{a} & -\frac{a+b}{a} & 1 \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & \frac{2b}{a+b+2} & 0 & \frac{b-a}{a(a+b+2)} & -\frac{a+b}{a(a+b+2)} & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2(a+b+2)} & \frac{1}{2b} & -\frac{a+2}{2b(a+b+2)} \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{b+2}{2a(a+b+2)} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2(a+b+2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{a+b}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+2} & 0 & -\frac{1}{a+b+2} \end{bmatrix}, \qquad (21)$$

где в базис после первой итерации введён элемент g_{22}, а введение в базис элемента g_{33} на третьей итерации очевидно. Из (21) снова получается ОСВИ (16). Но после первой итерации в эквивалентных преобразованиях (21) в базис можно вводить и элемент g_{32}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+b+1 & b+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+1} & \frac{1}{a+b+1} & \frac{a+1}{a+b+1} & 1 & \frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 \\ \frac{a}{a+b+1} & \frac{a(a+b+2)}{a+b+1} & \frac{-ab}{a+b+1} & 0 & -\frac{b+1}{a+b+1} & 1 & 0 \\ \frac{a+b}{a+b+1} & \frac{(a+b)(a+b+2)}{a+b+1} & \frac{b(a+b+2)}{a+b+1} & 0 & -\frac{1}{a+b+1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{a+b+1} & \frac{a+b}{a+b+1} & \frac{b}{a+b+1} & 0 & -\frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{a}{a+b} & 1 & \frac{a+b+1}{(a+b)(a+b+2)} & 0 & -\frac{1}{(a+b)(a+b+2)} \\ 0 & 0 & \frac{-2ab}{a+b} & 0 & -\frac{b}{a+b} & 1 & -\frac{a}{a+b} \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & \frac{b}{a+b} & 0 & -\frac{1}{(a+b)(a+b+2)} & 0 & \frac{a+b+1}{(a+b)(a+b+2)} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+2} & 0 & -\frac{1}{a+b+2} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где, получив после последней итерации в (22) ту же матрицу, что и после последней итерации в (15), ещё раз замечаем ОСВИ (16). Как следствие, континуум (14) ОСВИ (11) получается линейной комбинацией точек (16) и (20) на равностороннем треугольнике (12). Теорема доказана.

Легко увидеть, что при $a<b$ в игре (13) второй игрок также обладает КОС, запись которого будет в некотором роде симметрична по отношению к (14).

Теорема 2. В игре (13) при $a<b$ второй игрок обладает КОС

$$\breve{\mathcal{Q}}=\left\{\breve{\mathbf{Q}}=\left[\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3\right]=\left[\frac{1}{2}\lambda \quad \frac{a+b}{2b}(1-\lambda) \quad \frac{a}{2b}\left(\frac{b-a}{a}+\lambda\right)\right]\in\right.$$
$$\left.\in\mathbb{R}^3:\lambda\in[0;1]\right\}\subset\mathcal{Q}. \quad (23)$$

Доказательство. Здесь имеют место четыре преобразования с расширенной матрицей (15), (17), (21) при условии $\frac{2b}{a+b+2}\geqslant\frac{b-a}{a(a+b+2)}$, а также (22), из которых получается ОСВИ (16). Пятое преобразование начинается с введения в базис элемента g_{33},

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+b+1 & b+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{b-a}{b+1} & -\frac{a(a+b+2)}{b+1} & 0 & \frac{b(a+b+2)}{b+1} & 1 & 0 & -\frac{a+1}{b+1} \\ \frac{b}{b+1} & \frac{ab}{b+1} & 0 & \frac{b(b+2)}{b+1} & 0 & 1 & -\frac{1}{b+1} \\ \frac{1}{b+1} & \frac{a+b+1}{b+1} & 1 & \frac{1}{b+1} & 0 & 0 & \frac{1}{b+1} \\ -\frac{1}{b+1} & -\frac{a}{b+1} & 0 & \frac{b}{b+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{b+1} \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \frac{b-a}{b(a+b+2)} & -\frac{a}{b} & 0 & 1 & \frac{b+1}{b(a+b+2)} & 0 & -\frac{a+1}{b(a+b+2)} \\ \frac{2a}{a+b+2} & 2a & 0 & 0 & -\frac{b+2}{a+b+2} & 1 & \frac{a}{a+b+2} \\ \frac{a+b}{b(a+b+2)} & \frac{a+b}{b} & 1 & 0 & -\frac{1}{b(a+b+2)} & 0 & \frac{a+b+1}{b(a+b+2)} \\ -\frac{2}{a+b+2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+2} & 0 & -\frac{1}{a+b+2} \end{bmatrix}, \qquad (24)$$

где при введении в базис элемента g_{14} на второй итерации использовано то, что

$$\frac{b-a}{b+1}\cdot\left(\frac{b(a+b+2)}{b+1}\right)^{-1}=\frac{b-a}{b(a+b+2)},\quad \frac{b}{b+1}\cdot\left(\frac{b(b+2)}{b+1}\right)^{-1}=\frac{1}{b+2},$$

$$\frac{b-a}{b(a+b+2)}-\frac{1}{b+2}=\frac{(b-a)(b+2)-b(a+b+2)}{b(b+2)(a+b+2)}=$$

$$=\frac{b^2-ab+2b-2a-ab-b^2-2b}{b(b+2)(a+b+2)}=-\frac{2a(b+1)}{b(b+2)(a+b+2)}<0\,.$$

Согласно с (24) ОСВИ

$$\breve{\mathbf{Q}}=\left(\frac{b-a}{b(a+b+2)}+\frac{a+b}{b(a+b+2)}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0 & \frac{a+b}{b(a+b+2)} & \frac{b-a}{b(a+b+2)}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{a+b+2}{2}\cdot\begin{bmatrix}0 & \frac{a+b}{b(a+b+2)} & \frac{b-a}{b(a+b+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{a+b}{2b} & \frac{b-a}{2b}\end{bmatrix}. \qquad (25)$$

И ещё одно преобразование для условия $\frac{2b}{a+b+2}<\frac{b-a}{a(a+b+2)}$, являющееся продолжением преобразования в (21) после второй итерации с введением в базис элемента g_{35} :

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & a+1 & 1 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & a+b+1 & b+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix}
\frac{1}{a+b+1} & \frac{1}{a+b+1} & \frac{a+1}{a+b+1} & 1 & \frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 \\
\frac{a}{a+b+1} & \frac{a(a+b+2)}{a+b+1} & \frac{-ab}{a+b+1} & 0 & -\frac{b+1}{a+b+1} & 1 & 0 \\
\frac{a+b}{a+b+1} & \frac{(a+b)(a+b+2)}{a+b+1} & \frac{b(a+b+2)}{a+b+1} & 0 & -\frac{1}{a+b+1} & 0 & 1 \\
-\frac{1}{a+b+1} & \frac{a+b}{a+b+1} & \frac{b}{a+b+1} & 0 & -\frac{1}{a+b+1} & 0 & 0
\end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix}
\frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{a+2}{a+b+2} & 1 & \frac{a+1}{a(a+b+2)} & -\frac{1}{a(a+b+2)} & 0 \\
\frac{1}{a+b+2} & 1 & \frac{-b}{a+b+2} & 0 & -\frac{b+1}{a(a+b+2)} & \frac{a+b+1}{a(a+b+2)} & 0 \\
0 & 0 & 2b & 0 & \frac{b}{a} & -\frac{a+b}{a} & 1 \\
-\frac{2}{a+b+2} & 0 & \frac{2b}{a+b+2} & 0 & \frac{b-a}{a(a+b+2)} & -\frac{a+b}{a(a+b+2)} & 0
\end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix}
\frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{-a}{a+b+2} & 1 & 0 & \frac{a+b+1}{b(a+b+2)} & -\frac{a+1}{b(a+b+2)} \\
\frac{1}{a+b+2} & 1 & \frac{b+2}{a+b+2} & 0 & 0 & -\frac{1}{b(a+b+2)} & \frac{b+1}{b(a+b+2)} \\
0 & 0 & 2a & 0 & 1 & -\frac{a+b}{b} & \frac{a}{b} \\
-\frac{2}{a+b+2} & 0 & \frac{2a}{a+b+2} & 0 & 0 & -\frac{a+b}{b(a+b+2)} & \frac{a-b}{b(a+b+2)}
\end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix}
\frac{1}{a+b+2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2(a+b+2)} & \frac{1}{2b} & -\frac{a+2}{2b(a+b+2)} \\
\frac{1}{a+b+2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{b+2}{2a(a+b+2)} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2(a+b+2)} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{a+b}{2ab} & \frac{1}{2b} \\
-\frac{2}{a+b+2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a+b+2} & 0 & -\frac{1}{a+b+2}
\end{bmatrix}, \qquad (26)
$$

откуда после введения в базис элемента g_{33} на последней итерации ещё раз получена ОСВИ (16). Как следствие, континуум (23) ОСВИ (11) получается линейной комбинацией точек (16) и (25) на равностороннем треугольнике (12). Теорема доказана.

Теорема 3. Среднее взвешенное с вероятностями из КОС (14) значение по множеству (1) совпадает со средним взвешенным с вероятностями из КОС (23), и является инвариантным.

Доказательство. Действительно, использовав вероятности в элементах КОС (14), вычисляем значение

$$\tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)=\sum_{j=1}^{3}\breve{q}_j v_j=\frac{b}{2a}\left(\frac{a-b}{b}+\lambda\right)v_1+\frac{a+b}{2a}\left(1-\lambda\right)v_2+\frac{1}{2}\lambda v_3=$$
$$=\frac{b}{2a}\left(\frac{a-b}{b}+\lambda\right)v_1+\frac{a+b}{2a}\left(1-\lambda\right)\left(v_1+a\right)+\frac{1}{2}\lambda\left(v_1+a+b\right)=$$
$$=v_1\left(\frac{a-b}{2a}+\frac{b}{2a}\lambda+\frac{a+b}{2a}-\frac{a+b}{2a}\lambda+\frac{1}{2}\lambda\right)+$$
$$+\frac{a+b}{2}-\frac{a+b}{2}\lambda+\frac{a+b}{2}\lambda=v_1+\frac{a+b}{2}. \qquad (27)$$

Это же значение получаем, используя вероятности в элементах КОС (23):

$$\tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)=\sum_{j=1}^{3}\breve{q}_j v_j=\frac{1}{2}\lambda v_1+\frac{a+b}{2b}\left(1-\lambda\right)v_2+\frac{a}{2b}\left(\frac{b-a}{a}+\lambda\right)v_3=$$
$$=\frac{1}{2}\lambda v_1+\frac{a+b}{2b}\left(1-\lambda\right)\left(v_1+a\right)+\frac{a}{2b}\left(\frac{b-a}{a}+\lambda\right)\left(v_1+a+b\right)=$$
$$=v_1\left(\frac{1}{2}\lambda+\frac{a+b}{2b}-\frac{a+b}{2b}\lambda+\frac{b-a}{2b}+\frac{a}{2b}\lambda\right)+$$
$$+a\cdot\frac{a+b}{2b}-a\cdot\frac{a+b}{2b}\lambda+\frac{b-a}{2b}\left(a+b\right)+a\cdot\frac{a+b}{2b}\lambda=v_1+\frac{a+b}{2}, \qquad (28)$$

где, как видно, нет зависимости от λ. Теорема доказана.

Теорема 4. Принцип ГМАО при $a \neq b$ имеет преимущество перед методом СА в смысле требования (4) в решении нестрогой обобщённой ЗУОТН (2) по множеству (1). При $a=b$ принцип ГМАО и метод СА в решении нестрогой обобщённой ЗУОТН (2) по множеству (1) эквивалентны.

Доказательство. При использовании полученной по принципу ГМАО оценки $\hat{v}=\tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)$ из Теорем 1 — 3 в левой части условия (4) получаем:

$$\min_{\breve{\mathbf{Q}}\in\breve{\mathcal{Q}}\subset\mathcal{Q}}\left(\max_{i=\overline{1,3}}\left\{\left|\tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)-v_i\right|\right\}\right)=\max_{i=\overline{1,3}}\left\{\left|\tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)-v_i\right|\right\}=\max_{i=\overline{1,3}}\left\{\left|v_1+\frac{a+b}{2}-v_i\right|\right\}=$$

$$= \max\left\{\frac{a+b}{2}, \frac{|a-b|}{2}, \frac{a+b}{2}\right\} = \frac{a+b}{2} = \frac{v_3 - v_1}{2}. \tag{29}$$

Поэтому принцип ГМАО применим при

$$\delta_v^{(\max)} \geqslant \frac{a+b}{2}, \tag{30}$$

а при

$$\delta_v^{(\max)} < \frac{a+b}{2} \tag{31}$$

обобщённую ЗУОТН (2) по множеству (1) с помощью принципа ГМАО решить невозможно. Преимущество принципа ГМАО выплывает из менее жёстких условий применимости (30) или неприменимости (31) по сравнению с (8) и (9) соответственно. А при $a = b$ условия (8) и (30) или (9) и (31) эквивалентны, что означает и эквивалентность применения принципа ГМАО и метода СА в решении нестрогой обобщённой ЗУОТН (2) по множеству (1). Теорема доказана.

Собственно Теорема 4 указывает на то, что в решении нестрогой обобщённой ЗУОТН (2) по множеству (1) оценка

$$\hat{v} \in \arg \min_{\left\{\overline{v},\, \tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)\right\}} \left\{ \max_{i=\overline{1,\,3}} \left\{\left|\overline{v} - v_i\right|\right\},\ \max_{i=\overline{1,\,3}} \left\{\left|\tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right) - v_i\right|\right\} \right\} =$$
$$= \arg \min_{\left\{\overline{v},\, \tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)\right\}} \left\{ \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{6} \cdot \operatorname{sign}\left(a-b\right),\ \frac{a+b}{2} \right\} = \left\{\tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)\right\} = \left\{v_1 + \frac{a+b}{2}\right\} \tag{32}$$

при любом соотношении $a > 0$ и $b > 0$, то есть фактически является инвариантной.

Вывод

Стоит заметить, что решение нестрогой обобщённой ЗУОТН (2) по множеству (1) в форме оценки (32) является достаточно тривиальным приспособлением к требованию (4), где число $\tilde{v}\left(\breve{\mathbf{Q}}\right)$ совпадает с серединой отрезка в (2). Здесь и потребность находить КОС (14) или (23) по принципу ГМАО отпадает, поскольку вычислять с помощью вероятностей ничего не надо. Однако вероятностные наборы в КОС (14) или (23) могут быть использованы не только для (фиктивного) вычисления среднего взвешенного значения по множеству (1), но и для того, чтобы, принимая один из таких наборов [11] в качестве исходного, методом последовательных коррекций определять вероятностное распределение на множестве (1). Задача выбора одного из вероятностных наборов в КОС (14) или (23) наряду с обобщением критерия (3) открывает перспективу продолжения представленного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nilsen T., Aven T. Models and model uncertainty in the context of risk analysis // Reliability Engineering & System Safety. — 2003. — Volume 79, Issue 3. — P. 309 — 317.
2. Kovalchuk S. S., Romanuke V. V. An antagonistic framework as symmetric kernel matrix game for removing four-model uncertainty of tool wear evaluation // Інформатика та системні науки (ІСН-2012): матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 1 — 3 березня 2012 р.) / за ред. О. О. Ємця. — Полтава: ПУЕТ, 2012. — С. 261 — 264.
3. Smith A., Luck R., Mago P. J. Analysis of a combined cooling, heating, and power system model under different operating strategies with input and model data uncertainty // Energy and Buildings. — 2010. — Volume 42, Issue 11. — P. 2231 — 2240.
4. Andersson S., Söderberg A., Olofsson U. A random wear model for the interaction between a rough and a smooth surface // Wear. — 2008. — Volume 264, Issues 9 — 10. — P. 763 — 769.
5. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.
6. Jacques J., Lavergne C., Devictor N. Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs // Reliability Engineering & System Safety. — 2006. — Volume 91, Issues 10 — 11. — P. 1126 — 1134.
7. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределённости. — М.: Наука, 1981. — 258 с.
8. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 416 с.: ил.
9. Романюк В. В. Определение квазиравновероятного распределения из континуума оптимальных стратегий в строгой задаче устранения однопараметрической трёхмодельной $\{2\varepsilon, 3\varepsilon\}$-неопределённости по принципу гарантировано минимальных абсолютных отклонений // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2012. — № 2. — С. 56 — 64.
10. Романюк В. В. Преимущество устранения трёхэлементной неопределённости по критерию минимизации максимальных относительных отклонений с применением наиболее осторожной оценки вероятностного распределения на частном множестве исходных данных в сравнении со средним арифметическим // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2012. — № 3. — С. 55 — 62.
11. Романюк В. В. Выбор единственного элемента из континуума оптимальных стратегий в строгой задаче устранения однопараметрической трёхмодельной $\{2\beta, 3\beta\}$-неопределённости // Наука й економіка. — Випуск 2 (26), 2012. — С. 219 — 225.

Надійшла у першій редакції 18.09.2012, в останній - 03.12.2012.