

УДК 519.85

Нормализованные Φ -функции сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцилиндром

В. В. Сёмкин, А. М. Чугай

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина

В статье построены нормализованные Φ -функции сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцилиндром. Построенные функции позволят строить математические модели оптимизационных задач размещения данных объектов с учетом заданных расстояний между ними. Область допустимых решений оптимизационной задачи размещения геометрических объектов, описанная с помощью построенных Φ -функций, может быть представлена в виде объединения подобластей.

Ключевые слова: Φ -функция, сферический сегмент, параллелепипед, цилиндр, сфероцилиндр.

В статті побудовано нормалізовані Φ -функції сферичного сегменту з паралелепіпедом, циліндром, кулею та сфероциліндром. Побудовані Φ -функції дозволять будувати математичні моделі оптимізаційних задач розміщення цих об'єктів з урахуванням заданих відстаней між ними. Область припустимих розв'язків оптимізаційної задачі розміщення геометричних об'єктів, яка описана за допомогою побудованих Φ -функцій, може бути представлена у вигляді об'єднання підобластей.

Ключові слова: Φ -функція, сферичний сегмент, паралелепіпед, циліндр, сфероциліндр.

In the paper normalized Φ -functions for spherical segments with parallelepiped, cylinder, sphere and spherecylinder are constructed. The Φ -functions will allow us to construct mathematical models of optimization packing problems for these objects with account of distances between them. A feasible region of an optimization packing problem of geometric objects which described by constructed Φ -functions can be presented as a union of subregions.

Key words: Φ -function, spherical segments, parallelepiped, cylinder, sphere, spherecylinder.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В последнее время интенсивно развиваются научные исследования по математическому моделированию оптимизационного размещения различных по природе трехмерных объектов [1,2]. Большой интерес к данной научной проблеме обусловлен чрезвычайной сложностью этих задач, а также необходимостью широкого использования результатов в научных исследованиях и в практике проектирования в различных отраслях промышленности (машиностроение, судостроение, авиастроение, радиоэлектроника, приборостроение, строительство, легкая промышленность и др.). Роль этих задач особенно возросла в связи с повсеместной разработкой и широким внедрением различного рода систем автоматизации проектирования. Большинство из этих систем требует непосредственного решения задач размещения объектов.

В связи с этим разработка фундаментальных основ, конструктивных средств математического и компьютерного моделирования для решения новых классов оптимизационных задач геометрического проектирования является актуальной

научной задачей.

2. Истоки исследования авторов

Для математического и компьютерного моделирования оптимизационных задач размещения трехмерных геометрических объектов требуется аналитическое описание отношений их включения, пересечения и касания [3].

В работе [4] отмечается, что среди современных средств математического моделирования взаимоотношений геометрических объектов наиболее эффективным на сегодняшний день является метод Ф-функций [5], который позволяет применить для решения оптимизационных задач размещения современные методы локальной и глобальной оптимизации.

Ф-функцией для геометрических объектов $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$ называется непрерывная, всюду определенная функция, которая удовлетворяет следующим характеристическим свойствам:

$$\Phi(u_1, u_2) = \begin{cases} > 0, & \text{если } \text{cl}T_1(u_1) \cap \text{cl}T_2(u_2) = \emptyset, \\ = 0, & \text{если } \text{int} T_1(u_1) \cap \text{int} T_2(u_2) = \emptyset \\ & \text{и } \text{fr}T_1(u_1) \cap \text{fr}T_2(u_2) \neq \emptyset, \\ < 0, & \text{если } \text{int} T_1(u_1) \cap \text{int} T_2(u_2) \neq \emptyset. \end{cases}$$

В статье [6] показано, как использование Ф-функций и математического программирования позволяет улучшить результаты решения задач оптимального размещения геометрических объектов.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

На сегодняшний день построен полный класс Ф-функций для базовых двухмерных объектов [7]. В работе [8] построены Ф-функции для базовых трехмерных объектов, границы которых имеют форму шара, параллелепипеда, конуса и цилиндра.

В качестве моделей реальных объектов или их достаточно точных аппроксимаций в различных прикладных задачах используются объекты, образованные с помощью шара и цилиндра (сфероцилиндры, сферические сегменты, диски, образованные объединением сферических сегментов) (рис.1).

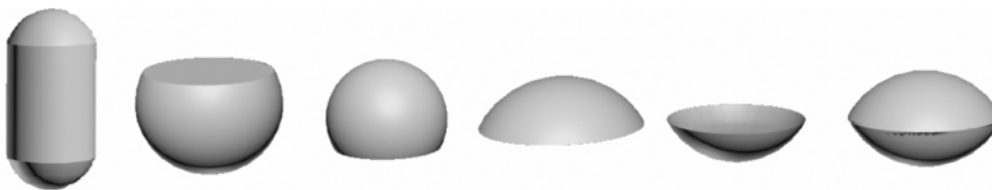


Рис.1. Объекты, образованные с помощью шара и цилиндра

В связи с этим актуальной научной задачей является расширение класса трехмерных геометрических объектов, для которых построены Ф-функции.

Целью данной работы является построение нормализованных Φ -функций для сферического сегмента с параллелепипедом, цилиндром, шаром и сфероцилиндром.

4. Построение нормализованных Φ -функций

В работе рассматриваются следующие трехмерные геометрические объекты:

- параллелепипед $P_i = \{(x, y, z) \in R^3 : -a_i \leq x \leq a_i, -b_i \leq y \leq b_i, -c_i \leq z \leq c_i\}$;
- цилиндр $C_i = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq r_i^2, -h_i \leq z \leq h_i\}$;
- шар $S_i = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r_i^2\}$;
- сферический сегмент $G_i = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + (z_i + \tau_i)^2 \leq \rho_i^2, -z_i \leq 0\}$, где $\tau_i = \rho_i - w_i$ (в работе будем рассматривать сегменты, у которых $\tau_i \geq 0$), w_i – высота сегмента. Радиус окружности в основании сегмента обозначим через $r_i = w_i \sqrt{\frac{2}{w_i} \rho_i - 1}$.

- сфероцилиндр SC_i , образованный объединением цилиндра $C_i = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq r_i^2, -h_i \leq z \leq h_i\}$ и двух сферических сегментов высоты $w_{ij} > 0$, отсекаемых от сфер $O_{ij} = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho_{ij}^2\}$, где $\rho_{ij} \geq r_i$, и обозначим $\tau_{ij} = \rho_{ij} - w_{ij}$, $j = 1, 2$.

Для рассматриваемых геометрических объектов допускаются аффинные преобразования только трансляции. Обозначим через $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ вектор трансляции объекта O_i . Тогда объект O_i , транслированный на вектор u_i , обозначим через $O_i(u_i)$.

4.1. Нормализованная Φ -функция для $P_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$

Для построения Φ -функции зададим следующий порядок нумерации вершин и рёбер параллелепипеда (рис.2)

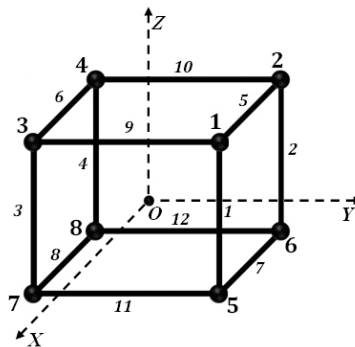


Рис.2. Порядок нумерации вершин и рёбер параллелепипеда

Для математического описания расположения $P_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ на заданном расстоянии достаточно описать в аналитическом виде:

- 1) расстояние между гранью $P_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$;
- 2) расстояние между ребром $P_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$;
- 3) расстояние между вершиной $P_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$;

а также построить d -уровень нормализованной Φ -функции при $u_1 = 0$.

Рассмотрим случай взаимодействия $P_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$.

Сечение поверхности d -уровня Φ -функции плоскостью YOZ имеет вид, представленный на рис.3.

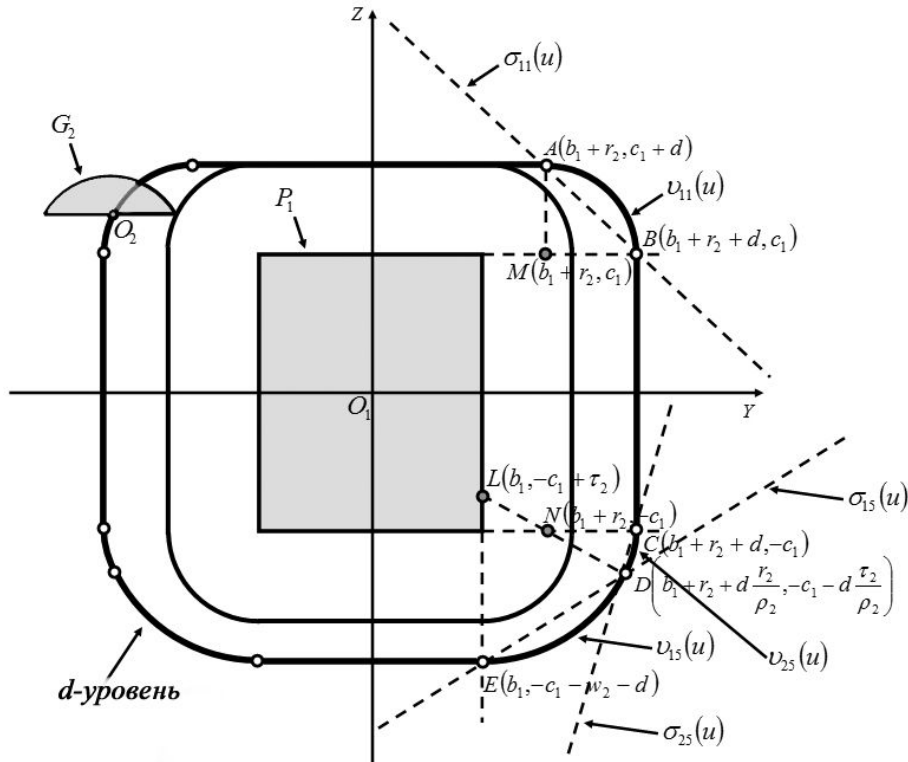


Рис.3. Сечение поверхности d -уровня Φ -функции для $P_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ плоскостью YOZ

Положим $u = u_2 - u_1$. Чтобы определить расстояние между гранями параллелепипеда и сферическим сегментом введем функцию

$$\chi_1(u) = \max_{i=1, \dots, 6} \eta_i(u), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1(u) &= x - A, \eta_2(u) = y - B, \eta_3(u) = -x - A, \\ \eta_4(u) &= -y - B, \eta_5(u) = z - c_1, \eta_6(u) = -z - c_1 - w_2, \\ A &= a_1 + r_2, B = b_1 + r_2. \end{aligned}$$

Для определения расстояния между вершинами параллелепипеда $P_1(u_1)$ и сферическим сегментом $G_2(u_2)$ зададим функцию:

$$\chi_2(u) = \max_{i=1, \dots, 8} \psi_i(u), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_i(u) &= \begin{cases} \psi_{i2}(u), & i = 1, \dots, 4, \\ \max\{\psi_{i1}(u), \psi_{i2}(u)\}, & i = 5, \dots, 8; \end{cases} \\ \psi_{i1}(u) &= \min\{\varrho_i(u), \sigma_i(u), \theta_{i1}(u), \theta_{i2}(u), \theta_{i3}(u)\}, \quad i = 5, \dots, 8; \\ \psi_{i2}(u) &= \min\{\omega_i(u), \delta_i(u), \kappa_{i1}(u), \kappa_{i2}(u), \kappa_{i3}(u)\}; \\ \varrho_i(u) &= \sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u) + (\phi_z(u) + \tau_2)^2} - \rho_2, \\ \sigma_i(u) &= \frac{w_2}{r_2} \phi_x(u) + \frac{w_2}{r_2} \phi_y(u) + \phi_z(u) - w_2, \\ \theta_{i1}(u) &= \sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u)} + \phi_z(u) + \tau_2 - r_2, \\ \theta_{i2}(u) &= \sqrt{\phi_y^2(u) + (\phi_z(u) + \tau_2)^2} + \phi_x(u) - \rho_2, \\ \theta_{i3}(u) &= \sqrt{\phi_x^2(u) + (\phi_z(u) + \tau_2)^2} + \phi_y(u) - \rho_2, \quad i = 5, \dots, 8, \\ \omega_i(u) &= \sqrt{\left(\sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u)} - r_2\right)^2 + \phi_z^2(u)}, \quad \delta_i(u) = \phi_x(u) + \phi_y(u) + C\phi_z(u) - r_2, \\ \kappa_{i1}(u) &= \sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u)} + \phi_z(u) - r_2, \\ \kappa_{i2}(u) &= \sqrt{(\phi_y(u) - r_2)^2 + \phi_z^2(u)} + \phi_x(u) - r_2, \\ \kappa_{i3}(u) &= \sqrt{(\phi_x(u) - r_2)^2 + \phi_z^2(u)} + \phi_y(u) - r_2, \\ \phi_x(u) &= (-1)^{k_x} x - a_1, \quad \phi_y(u) = (-1)^{k_y} \cdot y - b_1, \quad \phi_z(u) = (-1)^{k_z} z - c_1, \\ & k_x, k_y, k_z \in \{0, 1\}, \\ & i = k_x + 2k_y + 4k_z + 1. \end{aligned}$$

Для определения расстояния между ребрами параллелепипеда $P_1(u_1)$ и сферическим сегментом $G_2(u_2)$ введем функцию:

$$\chi_3(u) = \max_{j=1, \dots, 12} \gamma_j(u), \quad (3)$$

где

$$\gamma_j(u) = \begin{cases} \varphi_j(u), & j = 1, \dots, 4, \\ \varphi_{2j}(u), & j = 5, 6, 9, 10, \\ \max\{\varphi_{1j}(u), \varphi_{2j}(u)\}, & j = 7, 8, 11, 12; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{j_1}(u) &= \min\{\nu_{1j_1}(u), \sigma_{1j_1}(u)\}, \quad j_1 = 1, \dots, 4; \\
\varphi_{1j_2}(u) &= \min\{\nu_{1j_2}(u), \sigma_{1j_2}(u)\}, \quad j_2 = 7, 8; \\
\varphi_{2j_2}(u) &= \min\{\nu_{2j_2}(u), \sigma_{2j_2}(u)\}; \\
\varphi_{1j_3}(u) &= \min\{\nu_{1j_3}(u), \sigma_{1j_3}(u)\}, \quad j_3 = 11, 12; \\
\varphi_{2j_3}(u) &= \min\{\nu_{2j_3}(u), \sigma_{2j_3}(u)\}; \\
\nu_{1j_1}(u) &= \sqrt{\phi_x^2(u) + \phi_y^2(u) - r_2}, \quad \sigma_{1j_1}(u) = \phi_x(u) + \phi_y(u) - r_2, \quad j_1 = 1, \dots, 4, \\
\nu_{1j_2}(u) &= \sqrt{\phi_y^2(u) + (\phi_z(u) + \tau_2)^2 - \rho_2}, \quad j_2 = 7, 8, \\
\sigma_{1j_2}(u) &= \frac{w_2}{r_2} \phi_y(u) + \phi_z(u) - w_2, \quad j_2 = 7, 8, \\
\nu_{2j_2}(u) &= \sqrt{(\phi_y(u) - r_2)^2 + \phi_z^2(u)}, \quad \sigma_{2j_2}(u) = \phi_x(u) + C\phi_z(u) - r_2, \\
\nu_{1j_3}(u) &= \sqrt{\phi_x^2(u) + (\phi_z(u) + \tau_2)^2 - \rho_2}, \quad j_3 = 11, 12, \\
\sigma_{1j_3}(u) &= \frac{w_2}{r_2} \phi_x(u) + \phi_z(u) - w_2, \quad j_3 = 11, 12, \\
\nu_{2j_3}(u) &= \sqrt{(\phi_x(u) - r_2)^2 + \phi_z^2(u)}, \quad \sigma_{2j_3}(u) = \phi_x(u) + C\phi_z(u) - r_2, \\
C &= \begin{cases} 1, & i = 1, \dots, 4 \text{ или } j_2 = 5, 6 \text{ или } j_3 = 9, 10, \\ \frac{r_2 - w_2}{r_2 + w_2}, & i = 5, \dots, 8 \text{ или } j_2 = 7, 8 \text{ или } j_3 = 11, 12; \end{cases} \\
j_1 &= k_x + 2k_y + 1, \quad j_2 = k_y + 2k_z + 5, \quad j_3 = k_x + 2k_z + 9.
\end{aligned}$$

На основании функций (1)-(3) нормализованная Ф-функция для $P_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ может быть записана в следующем виде:

$$\Phi(u_1, u_2) = \max_{i=1,2,3} \chi_i(u),$$

4.2. Нормализованная Ф-функция для $C_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$.

Для математического описания расположения $C_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ на заданном расстоянии достаточно описать в аналитическом виде:

- 1) расстояние между ребрами $C_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$;
- 2) расстояние между боковой гранью $C_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$;
- 3) расстояние между верхней (нижней) гранью $C_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$.

Сечение поверхности d -уровня Ф-функции для $C_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ плоскостью YOZ имеет вид, представленный на рис.4.

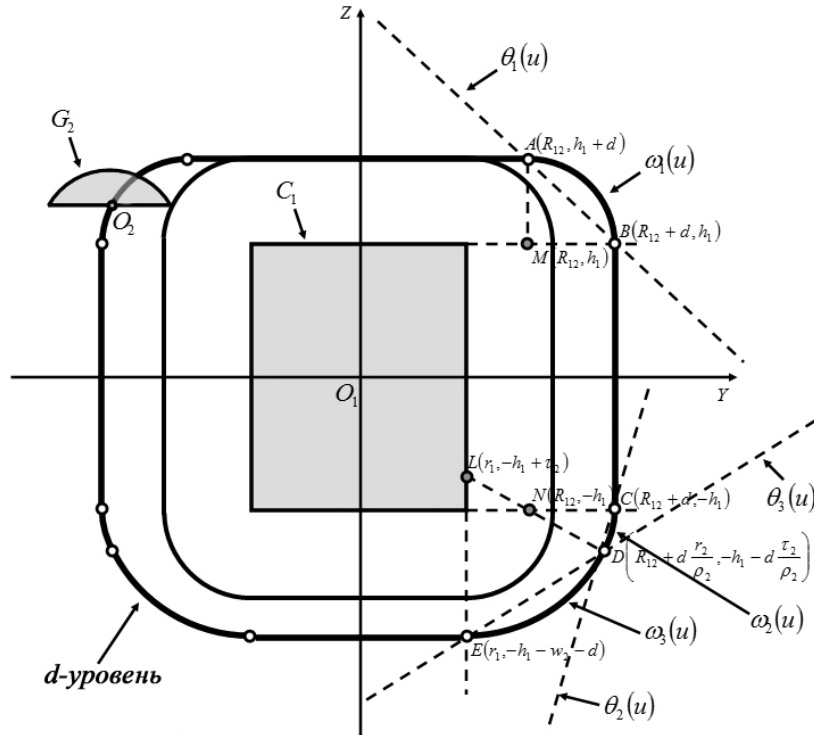


Рис.4. Сечение поверхности d -уровня Φ -функции для $C_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ плоскостью YOZ

Для определения расстояния между ребром цилиндра и сферическим сегментом введем функции

$$\phi_i(u) = \min\{\omega_i(u), \theta_i(u)\}, i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где

$$\omega_i(u) = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - R_{12})^2 + (z + (-1)^i h_1)^2}, i = 1, 2;$$

$$\omega_3(u) = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1)^2 + (z + h_1 - \tau_2)^2} - \rho_2;$$

$$\theta_1(u) = \sqrt{x^2 + y^2} + z - (R_{12} + h_1);$$

$$\theta_2(u) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{r_2 - w_2}{r_2 + w_2} z - \left(R_{12} + \frac{r_2 - w_2}{r_2 + w_2} h_1 \right);$$

$$\theta_3(u) = \frac{w_2}{r_2} \sqrt{x^2 + y^2} - z - \left(\frac{w_2}{r_2} R_{12} + h_1 \right).$$

Расстояние между боковой гранью цилиндра и сферическим сегментом определяется функцией

$$\phi_4(u) = \sqrt{x^2 + y^2} - R_{12}, \tag{5}$$

где $R_{12} = r_1 + r_2$.

Расстояние от сегмента до верхней и нижней граней функциями

$$\phi_5(u) = z - h_1, \tag{6}$$

$$\phi_6(u) = -z - (h_1 + w_2) \tag{7}$$

соответственно.

Тогда нормализованная Φ -функция для $S_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ может быть записана в виде

$$\Phi(u_1, u_2) = \max_{i=1, \dots, 6} \phi_i(u_2 - u_1).$$

4.3. Нормализованная Φ -функция для $S_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$.

Сечение поверхности d -уровня Φ -функции для $S_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ плоскостью YOZ имеет вид, представленный на рис.5.

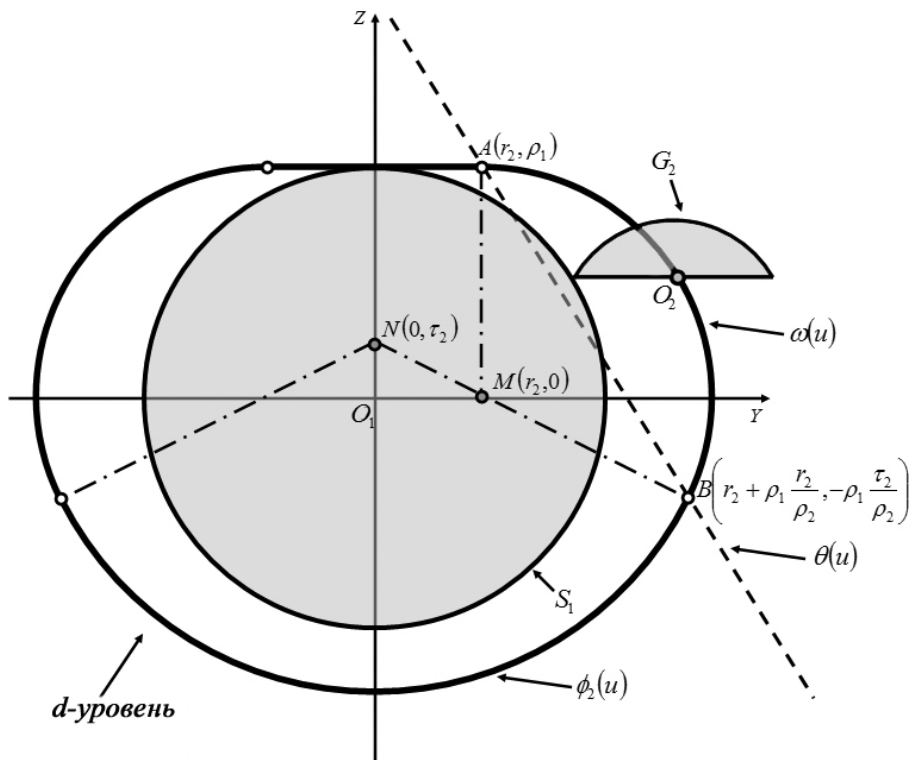


Рис.5. Сечение поверхности d -уровня Φ -функции для $S_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ плоскостью YOZ

Как видно из рисунка, расстояние между шаром и сегментом может быть определено как расстояние между:

- 1) шаром и ребром сегмента;
- 2) шаром и сферической поверхностью сегмента;
- 3) шаром и плоской гранью сегмента.

Функция, которая определяет расстояние между шаром и ребром сегмента может быть записана следующим образом

$$\phi_1(u) = \min \{ \omega(u), \theta(u) \}, \quad (8)$$

$$\text{где } \omega(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_2\right)^2 + z^2} - \rho_1; \quad \theta(u) = \frac{r_2}{w_2} \sqrt{x^2 + y^2} + z - (\tau_2 + \rho_1 + \rho_2).$$

Функция, которая определяет расстояние между шаром и сферической поверхностью сегмента имеет следующий вид

$$\phi_2(u) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \tau_2)^2} - (\rho_1 + \rho_2). \quad (9)$$

Функция

$$\phi_3(u) = z - \rho_1 \quad (10)$$

определяет расстояние для третьего случая.

Тогда, на основании функций (8)-(10) нормализованная Φ -функция для $S_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ может быть представлена в следующем виде

$$\Phi(u_1, u_2) = \max_{i=1,2,3} \phi_i(u_2 - u_1).$$

4.4. Нормализованная Φ -функция для $SC_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$.

Для математического описания расположения $SC_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ на заданном расстоянии достаточно описать в аналитическом виде:

- 1) расстояние между верхним (нижним) сегментом $SC_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$;
- 2) расстояние между верхним (нижним) ребром $SC_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$;
- 3) расстояние между боковой гранью $SC_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$.

Сечение поверхности d -уровня Φ -функции для $SC_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ плоскостью YOZ имеет вид, представленный на рис.6.

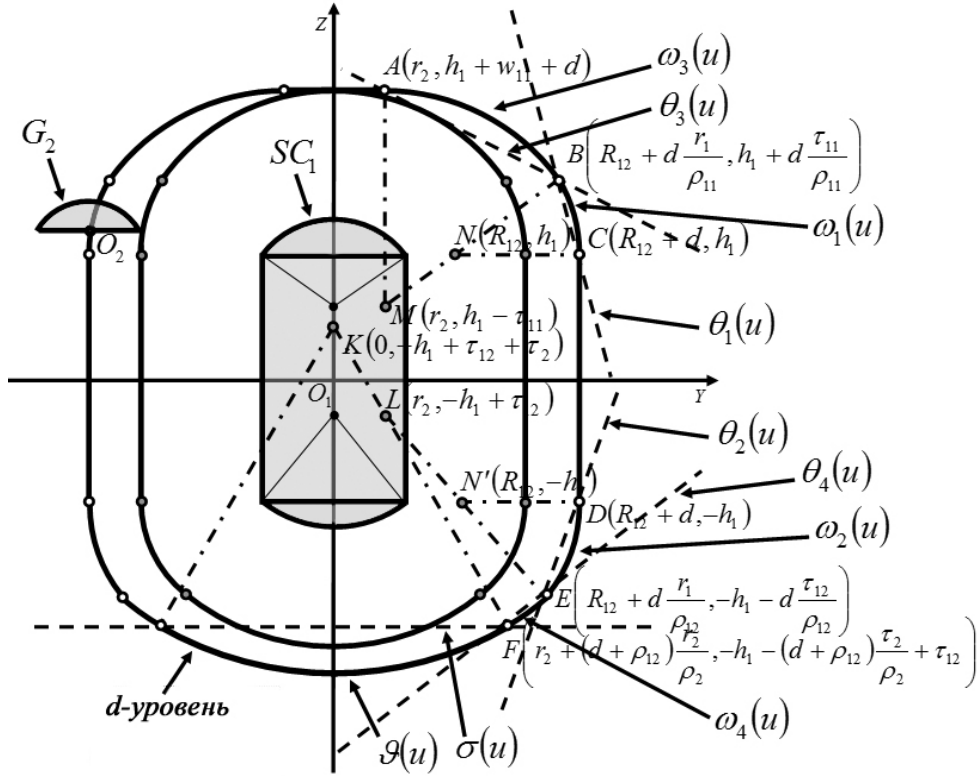


Рис.6. Сечение поверхности d-уровня Ф-функции для $SC_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ плоскостью YOZ

Расстояние между сегментом $G_2(u_2)$ и верхним и нижним сегментами сфероцилиндра $SC_1(u_1)$ зададим с помощью следующих функций

$$\phi_i(u) = \min \{ \theta_i(u), \omega_i(u) \}, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

где

$$\theta_i(u) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + (-1)^{i-1} \frac{r_1 - w_{1i}}{r_1 + w_{1i}} z - \left(R_{12} + \frac{r_1 - w_{1i}}{r_1 + w_{1i}} h_1 \right), & f_{12} < 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} + (-1)^{i-1} \frac{r_2 - w_2}{r_2 + w_2} z - \left(R_{12} + \frac{r_2 - w_2}{r_2 + w_2} h_1 \right), & f_{12} \geq 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2,$$

$$\omega_i(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R_{12} \right)^2 + \left(z + (-1)^i h_1 \right)^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$f_{12} = \frac{\tau_{12}}{\rho_{12}} - \frac{\tau_2}{\rho_2},$$

$$\phi_3(u) = \min \{ \mathcal{G}(u), \sigma(u) \}, \tag{12}$$

$$\mathcal{G}(u) = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \tau_{12} - \tau_2 + h_1 \right)^2} - (\rho_{12} + \rho_2),$$

$$\sigma(u) = \begin{cases} -z - \left(w_{12} - \rho_{12} \frac{w_2}{\rho_2} + h_1 \right), & f_{12} < 0, \\ -z - \left(w_2 - \rho_2 \frac{w_{12}}{\rho_{12}} + h_1 \right), & f_{12} \geq 0, \end{cases}$$

$$\phi_4(u) = z - (w_{11} + h_1). \quad (13)$$

Для определения расстояния между сегментом $G_2(u_2)$ и верхним (нижним) ребром сфероцилиндра $SC_1(u_1)$ введем следующие функции

$$\phi_i(u) = \min \{ \theta_{i-2}(u), \omega_{i-2}(u) \}, \quad i = 5, 6, \quad (14)$$

$$\theta_3(u) = \frac{w_{11}}{r_1} \sqrt{x^2 + y^2} + z - \left(\frac{w_{11}}{r_1} R_{12} + h \right),$$

$$\theta_4(u) = \frac{2}{k} \left(K_1 \sqrt{x^2 + y^2} - K_2 z - (K_1 R_{12} + K_2 h) \right),$$

$$K_1 = \frac{r_1}{\rho_{12}} + \frac{r_2}{\rho_2}, \quad K_2 = \frac{\tau_{12}}{\rho_{12}} + \frac{\tau_2}{\rho_2}, \quad k = K_1^2 + K_2^2.$$

$$\omega_3(u) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_2 \right)^2 + (z + \tau_{11} - h_1)^2} - \rho_{11},$$

$$\omega_4(u) = \begin{cases} \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_2 \right)^2 + (z - \tau_{12} + h)^2} - \rho_{12}, & f_{12} < 0, \\ \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1 \right)^2 + (z - \tau_2 + h)^2} - \rho_2, & f_{12} \geq 0, \end{cases}$$

Очевидно, что расстояние между боковой гранью сфероцилиндра $SC_1(u_1)$ и сегментом $G_2(u_2)$ будет определяться с помощью функции

$$\phi_7(u) = \sqrt{x^2 + y^2} - R_{12}. \quad (15)$$

Тогда, на основании функций (11)-(15) запишем Ф-функцию для $SC_1(u_1)$ и $G_2(u_2)$ в виде

$$\Phi(u_1, u_2) = \max_{i=1, \dots, 7} \phi_i(u_2 - u_1).$$

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Построенные в работе нормализованные Ф-функции позволят строить математические модели оптимизационных задач размещения рассмотренных в работе трехмерных геометрических объектов с учетом заданных расстояний между ними.

Область допустимых решений оптимизационной задачи размещения геометрических объектов, описанная с помощью Ф-функций, может быть представлена в виде объединения подобластей. При этом, каждая такая подобласть описывается системой нелинейных неравенств, левые части которых являются непрерывными бесконечно дифференцируемыми функциями. Это

свойство дает возможность использовать для решения прикладных оптимизационных задач размещения геометрических объектов градиентные методы локальной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Torquato S., Stillinger F. H. Jammed hard-particle packings: From Kepler to Bernal and beyond // *Reviews of modern physics*. – 2010. – Vol. 82, № 3. – P. 2633-2672.
2. Egeblad J., Nielsen B. K., Brazil M. Translational packing of arbitrary polytopes // *Computational Geometry: Theory and Applications*. – 2009. – Vol. 42, № 4. – P. 269-288.
3. Wäscher G., Haußner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – Vol. 183, № 3. – P. 1109-1130.
4. Bennell J., Oliveira J. The geometry of nesting problems: A tutorial // *European Journal of Operational Research*. – 2008. – № 184. – P. 397-415.
5. Stoyan Yu.G. Φ -function and its basic properties // *Доп. НАН України*. – 2001. – № 8. – С. 112-117.
6. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // *Computational Geometry: Theory and Applications*. – 2010. – Vol. 43, №5. – P. 535-553.
7. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Чернов Н.И., Панкратов А.В. Полный класс Φ -функций для базовых ϕ -объектов // *Доп. НАН України*. – 2010. – № 12. – С.25-30.
8. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Шайтхауэр Г. Математическое моделирование взаимодействий базовых геометрических 3D объектов // *Кибернетика и системный анализ*. – 2005. – № 3. – С. 19-31.