

УДК 517.946.9

Температурное поле бесконечного цилиндра с движущимся источником тепла

В. П. Ляшенко

Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, Украина

В работе рассмотрена математическая модель температурного поля бесконечного цилиндра, разогреваемого движущимся, рассредоточенным на конечном отрезке источником тепла. Этот источник представлен с помощью единичной функции Хевисайда. Математическая модель построена в виде нелинейной краевой задачи на сопряжение для уравнения теплопроводности. Путем преобразований, задача сведена к решению системы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с условиями сопряжения. В линейном случае получено решение задачи и построен график температурного распределения.

Ключевые слова: подвижная система координат, рассредоточенный движущийся источник тепла, температурное распределение, уравнение теплопроводности.

В роботі розглянута математична модель температурного поля нескінченного циліндра, що розігрівається рухомим, розосередженим на скінченному відрізку джерелом тепла, яке записано за допомогою однієї функції Хевісайда. Математична модель побудована у вигляді нелінійної крайової задачі на спряження для рівняння теплопровідності. Шляхом перетворень, задача зведена до розв'язання системи крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку з умовами спряження. В лінійному випадку отримано розв'язок задачі і побудовано графік температурного розподілу.

Ключові слова: рухома система координат, розосереджене рухоме джерело тепла, температурне розподіл, рівняння теплопровідності.

The mathematical model of temperature field of an infinite cylinder considered. The cylinder is heated by a moving dispersed on a finite interval heat source. Mathematical model in the form of a non-linear boundary value problem for the heat equation for the pair built. A conjugating problem is solved. In the linear case, the solution obtained. Graph of the temperature distribution is built.

Key words: moving coordinate system, distributed moving heat source, temperature distribution, heat equation.

1. Введение.

Процессы термической обработки длиномерных изделий таких как проволока, лента, профилей различной конфигурации, осуществляются путем пропускания через изделие электрического тока. Он подводится к изделию с помощью контактов или индуктора на конечном участке [1]. Для обеспечения стабильных физико - механических свойств металла необходимо в зоне нагрева поддерживать и контролировать заданную температуру. Этого можно достичь с помощью построения соответствующих математических моделей [2]. В существующих математических моделях рассматривается температурное распределение в зоне нагрева движущейся проволоки и не исследуется температурное поле вокруг нее [3–5]. Во многих случаях знание такого распределения представляет значительный научный и практический интерес.

2. Цель работы.

Целью работы есть построение температурного поля в бесконечной цилиндрической области, с постоянно или периодически действующим внутри нее рассредоточенным, на конечном отрезке, движущемся источником тепла.

3. Материалы и результаты исследований.

Для расчета температурного распределения $T(P, t)$ предполагается, что бесконечный цилиндр с постоянными теплофизическими характеристиками λ, c, ρ_n нагревается в зоне нагрева длиной $l = z_2 - z_1$, $z_1 < z < z_2$ источником $W(P, T) = W(r, z, t, T)$, который движется вдоль оси Oz в положительном направлении со скоростью $v(t)$. Начальная температура равна $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} T = T_0$. Теплообмен поверхности цилиндра с окружающей средой осуществляется по законам Ньютона и Стефана - Больцмана [5].

В начальной стадии имеет место переходной процесс нагрева, т.е. переменной является скорость и плотность источников тепла, причем температура в конце зоны нагрева должна быть постоянной. В установившемся режиме плотность $W(P, T) = W(r, z, t, T)$ источников и скорость $v(t)$ их движения постоянны

$$W(z, t, T) = w(t, T) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))], \quad (1)$$

где $\eta(z - z_i(t))$ – единичная функция Хевисайда.

$$w(t, T) = w(T) f(t) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4} f(t), \quad z_1(t) = -\frac{l}{2} + v(t)t, \quad z_2(t) = \frac{l}{2} + v(t)t.$$

Описанной выше физической модели процесса нагрева соответствует в области $\Omega \times t = \{0 < r < r_0, z < \infty, t > 0\}$ следующая математическая модель

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= -W(r, z, t, T) = -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T) f(t)}{\pi^2 r_0^4} [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))], \quad (2)$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0, z, 0)}{\partial r} = f(t) [\alpha(T_0 - T) + \varepsilon \sigma (T_0^4 - T^4)], \quad \frac{\partial T(0, z, 0)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Функция $f(t)$ кусочно-монотонная [3]. Перейдем к рассмотрению упрощенной модели. Положим в задаче (1)–(4) функцию $f(t) = 1$ и рассмотрим усредненное, по радиусу, температурное поле [6].

$$u(z, t, T) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t, T) r dr. \quad (5)$$

В результате преобразования уравнения (2) с учетом (5) задача в области $\Omega \times t = \{z < \infty, t > 0\}$ записывается в следующем виде

$$+\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - c\rho_n \frac{\partial T}{\partial t} + \left\{ w\beta f(t) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))] - \frac{2\alpha}{r_0} \right\} u - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} u^4 = -wf(t) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))] - \frac{2\alpha T_0}{r_0} - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} T_0^4 \quad (6)$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} u = T_0, \quad (7)$$

где $w = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4}$.

В задаче удобно перейти к безразмерным величинам, параметрам и критериям Био, Старка, Померанцева [5]

$$x = \frac{z}{l}, \tau = \frac{a^2 t}{l^2}, \mu = \frac{l}{r_0}, W = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4}, \nu = \beta T_0, Bi = 2\alpha l / \lambda, S = 2\varepsilon\sigma l^2 T_0^3 / (\lambda r_0), \quad (8)$$

$$Po = wl^2 / (\lambda T_0), a^2 = \lambda / (c\rho_n), \theta_0 = 0, \psi(\tau) = \frac{l}{a^2} v \left(\frac{l}{a^2} \tau \right), \theta = \frac{u - T_0}{T_0}.$$

После подстановки (8) в уравнение (6), начальное условие и условие регулярности (7), задача (6)-(7) становится однородной

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left\{ \nu Po \left[\eta \left(x + \frac{1}{2} - \psi(\tau) \tau \right) - \eta \left(x - \frac{1}{2} - \psi(\tau) \tau \right) \right] - \mu Bi \right\} \theta - \quad (9)$$

$$-S(1 + \theta^4) = -(1 - \nu) Po \left[\eta \left(x + \frac{1}{2} - \psi(\tau) \tau \right) - \eta \left(x - \frac{1}{2} - \psi(\tau) \tau \right) \right] - S$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \theta(x, \tau) = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (10)$$

В связи с тем, что температурное поле цилиндрической области, нагреваемой внутренними источниками тепла, зависит от большого числа физических параметров, переход от анализа влияния каждого параметра в отдельности на температурное распределение к анализу влияния комплексов параметров имеет целый ряд преимуществ. Прежде всего, это уменьшение числа анализируемых факторов. Анализ температурного поля в обобщенных координатах позволяет сделать выводы о проявлении внутренних связей при нагреве вне зависимости от теплофизических характеристик, диаметра, т.е. определить наиболее общие закономерности, характерные для всего класса нагреваемых материалов, имеющих общую физическую природу.

В случае если источник тепла движется с постоянной скоростью ψ , то после перехода к подвижной системе координат $y = x - \psi\tau$ задача для неоднородного параболического уравнения (9)–(10) превращается в задачу для

квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения с условием регулярности на бесконечности

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \psi \frac{d\theta}{dy} + b(y)\theta + S(1+\theta)^4 = -f(y) - S, \quad |y| > 0 \quad (11)$$

$$\theta(y) = 0, \quad y \rightarrow \pm\infty \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение (11) является уравнением с кусочно-постоянным коэффициентом и правой частью

$$b(y) = \begin{cases} -\mu Bi, & \forall |y| > \frac{1}{2} \\ \nu Po - \mu Bi, & \forall |y| \leq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (13)$$

$$f(y) = \begin{cases} (1+\nu)Po, & \forall |y| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \forall |y| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (14)$$

Это позволяет получить ее аналитическое решение в явном виде. Для этого рассмотрим задачу (11)–(12) как задачу на сопротивление. В таком случае уравнение (11) распадается на три уравнения с условиями сопряжения на границах.

Остановимся на рассмотрении линейного случая, когда в уравнении (11) – (12) нелинейной составляющей можно пренебречь. Тогда задача (11)–(12) принимает вид

$$\theta'' + \psi\theta' - \mu Bi\theta = 0, \quad -\infty < y < \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\theta(-\infty) = 0, \quad (16)$$

$$\theta'' + \psi\theta' + (\nu Po - \mu Bi)\theta = -(1+\nu)Po, \quad |y| \leq \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$\theta'' + \psi\theta' - \mu Bi\theta = 0, \quad y > \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$\theta(\infty) = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta\left(-\frac{1}{2}+0\right) &= \theta\left(-\frac{1}{2}-0\right), & \theta\left(\frac{1}{2}-0\right) &= \theta\left(\frac{1}{2}+0\right), \\ \theta'\left(-\frac{1}{2}+0\right) &= \theta'\left(-\frac{1}{2}-0\right), & \theta'\left(\frac{1}{2}-0\right) &= \theta'\left(\frac{1}{2}+0\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Общее решение задачи (15)–(16), (18)–(19) выписывается в виде

$$\theta(y) = C_1 e^{k_1 y}, \quad y < -\frac{1}{2} \quad (21)$$

$$\theta(y) = C_4 e^{k_2 y}, \quad y > \frac{1}{2} \quad (22)$$

где $k_{1,2} = -\frac{\psi}{2} \pm \sqrt{\frac{\psi^2}{4} + \mu Bi}$ – корни характеристического уравнения для уравнений (15),(18).

Общее решение неоднородного уравнения (17) записывается следующим образом

$$\theta(y) = C_2 e^{m_1 y} + C_3 e^{m_2 y} + \frac{(1+\nu)Po}{\nu Po - \mu Bi}, \quad |y| < \frac{1}{2} \quad (23)$$

где $m_{1,2} = -\frac{\psi}{2} \pm \sqrt{\frac{\psi^2}{4} + \mu Bi - \nu Po}$ – корни соответствующего уравнению (17) характеристического уравнения.

Для определения коэффициентов $C_1 \div C_4$ воспользуемся условием сопряжения (20), что приводит к решению следующей системы линейных уравнений относительно постоянных $C_1 \div C_4$

$$\begin{cases} C_1 e^{-k_1/2} - C_2 e^{-m_1/2} - C_3 e^{-m_2/2} = \theta^* \\ -C_1 e^{-k_1/2} + C_2 m_1 e^{-m_1/2} + C_3 m_2 e^{-m_2/2} = 0 \\ C_2 e^{m_1/2} + C_3 e^{m_2/2} - C_4 e^{k_2/2} = 0 \\ C_2 m_1 e^{m_1/2} + C_3 m_2 e^{m_2/2} - C_4 k_2 e^{k_2/2} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{где } \theta^* = \frac{(1+\nu)Po}{\nu Po - \mu Bi}.$$

Решение системы (24) по формулам Крамера [7] записывается в виде

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, C_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (25)$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} e^{-k_1/2} & -e^{-m_1/2} & -e^{-m_2/2} & 0 \\ -k_1 e^{-k_1/2} & -m_1 e^{-m_1/2} & -m_2 e^{-m_2/2} & 0 \\ 0 & e^{m_1/2} & e^{m_2/2} & -e^{-k_2/2} \\ 0 & m_1 e^{m_1/2} & m_2 e^{m_2/2} & -k_2 e^{-k_2/2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \theta^* \left[e^{(k_2+m_1-m_2)/2} (m_1(m_2-k_2) + m_2(k_2-m_1)) + k_2(m_1-m_2)e^{(k_2-m_1-m_2)/2} \right]$$

$$\Delta_2 = \theta^* \left[k_1 k_2 e^{(-k_1+k_2+m_2)/2} - k_2(k_1+m_2)e^{(-k_1+k_2-m_2)/2} \right],$$

$$\Delta_3 = \theta^* \left[k_1(k_2-m_1)e^{(k_2+m_1-k_1)/2} - k_2(k_1-m_2)e^{(k_2-m_1-k_1)/2} \right],$$

$$\Delta_4 = \theta^* \left[k_1(m_2-m_1)e^{(-k_1+m_1+m_2)/2} e^{(-k_1+m_1-m_2)/2} (m_2(m_1-k_1) - m_1(m_2-k_1)) \right]$$

Таким образом, подставив (25) в (21)–(23) получим температурное распределение в бесконечном цилиндре с движущимся рассредоточенным (на длине l) источником тепла.

Так как $|k_2| > k_1$ в решениях (21), (23), то имеет место более резкий подъем температур перед движущимся источником тепла. В инженерной практике этот результат позволяет подобрать усилия волочения таким образом, чтобы избежать обрывов при протягивании проволоки.

Если скорость движения мала, то профиль температурной кривой относительно прямой $y = 1/2$ близкий к симметричному (Рис.1). При больших скоростях, когда $\varphi^2/4 \gg \mu Vi$, наблюдается наиболее резкое падение температуры перед движущимся источником тепла.

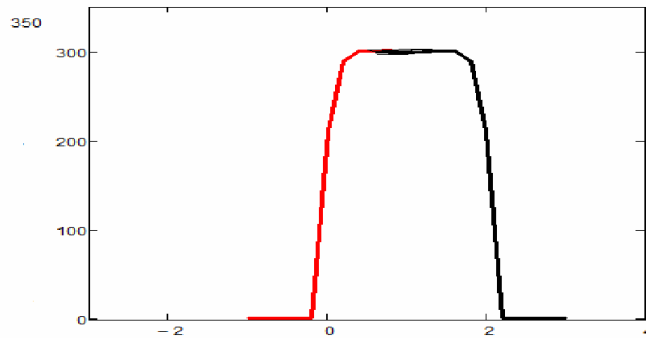


Рис. 1.—Температурное распределение в окрестности действия рассредоточенного источника тепла.

4. Выводы.

Построена математическая модель температурного поля неограниченной цилиндрической области, в которой действует постоянный или переменный движущийся источник тепла. Получено решение упрощенной задачи, построены температурные распределения. Качественный анализ решения (21)–(23) позволяет сделать вывод о характере температурного поля в неограниченной проволоке, разогреваемой рассредоточенным источником тепла.

Математическая модель может быть использована при разработке систем управления процессами термообработки длиномерных изделий внутренними источниками тепла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коврев Г.С. Электроконтактный нагрев при обработке цветных металлов. – М.: Металлургия, 1975. – 312 с.
2. Ляшенко В.П. Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вісник Запорізького національного університету, Серія «Фізико-математичні науки». – 2008. – № 1. – С. 130–135.
3. Ляшенко В. П. Дослідження температурних розподілів рухомого середовища з імпульсними джерелами тепла / В.П. Ляшенко, О.Б.Кобильська // Вісник Харківського національного університету, Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».- 2010.-№ 890. –вип.13.– С.115-120
4. Ляшенко В.П. Задачі для рівняння теплопровідності у порошковій металургії./ / В.П. Ляшенко, В.А. Ванін / Вісник НТУ «ХП» Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2010. – Вип. 68. – С. 108 – 113.
5. Ляшенко В. П. Задачі термодифузії та методи їх розв'язку./під ред. Ляшенка В.П./ Кременчук, міська друк., 2012. 112 с.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. / А.В. Лыков /– М.: Высшая школа, 1966. – 600 с.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры./ А.Г. Курош /– М.: Наука, 1971. – 432 с.