УДК 517.922+519.642.2

Численное решение вырожденного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями

А. Л. Пивень

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Предложен численный метод решения нелинейного вырожденного интегро-дифференциального уравнения запаздывающего типа. Линейной части уравнения отвечает регулярный характеристический матричный пучок индекса 1. Такие уравнения возникают при описании переходных процессов в радиотехнических системах. Установлены условия существования и единственности решения повышенной гладкости, и в этих условиях доказана теорема о сходимости численного метода решения.

Ключевые слова: *вырожденное интегро-дифференциальное уравнение с запаздываниями, численное решение, сходимость*

Запропоновано чисельний метод розв'язання нелінійного виродженого інтегро-диференціального рівняння запізнюючого типу. Лінійній частині рівняння відповідає регулярний характеристичний матричний жмуток індексу 1. Такі рівняння виникають при опису перехідних процесів у радіотехнічних системах. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку підвищеної гладкості, і в цих умовах доведено теорему про збіжність чисельного методу розв'язання.

Ключові слова: *вироджене інтегро-диференціальне рівняння із запізненнями, чисельний розв'язок, збіжність.*

We are suggested a numerical method for solving of a nonlinear degenerate integro-differential delay equation. The regular characteristic index-one matrix sheaf is corresponded to a linear part of equation. Such equations appear at describing of transients in radio technical systems. Conditions of existing and uniqueness of higher smoothness solution are obtained, and under these conditions the theorem about convergence of a numerical method is proved.

Key words: *degenerate delay integro-differential equation, numeric solution, convergence.*

1. Введение

В данной работе предложен численный метод решения начальной задачи

$$\frac{d}{dt}(A_0u(t))+\sum_{j=0}^{N}B_ju(t-\omega_j)+\sum_{j=0}^{N}\int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}\Phi_j(t,\tau)u(\tau)d\tau=f(t)+\varphi(u(t)),\quad t_0\le t\le T \tag{1.1}$$

$$u(t)=g(t),\qquad t_0-\omega_N\le t\le t_0 \tag{1.2}$$

Здесь $A_0, B_j\ (j=0,...,N)$ – постоянные квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, элементы $n\times n$ матриц $\Phi_j(t,\tau)$ непрерывны по совокупности переменных на множествах $\{(t,\tau)\in[t_0,T]\times[t_0-\omega_j,T]: t_0-\omega_j\le$ $\le\tau\le t-\omega_j\}$ соответственно, $f(t)\in C([t_0,T],R^n)$, $\varphi(x)\in C(R^n,R^n)$, $g(t)\in$ $\in C([t_0-\omega_N,t_0],R^n)$. Запаздывания упорядочены : $0=\omega_0<\omega_1<...<\omega_N$. Следуя [1,2], под решением задачи (1.1),(1.2) на отрезке $[t_0-\omega_N,T]$ будем понимать вектор-функцию $u(t)\in C([t_0-\omega_N,T],R^n)$ такую, что

$A_0u(t)\in C^1([t_0,T],R^n)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $t\in[t_0,T]$ и начальному условию (1.2).

Уравнение (1.1) называется *неявным*, а в случае обратимости матрицы A_0 – *вырожденным* [1,3]. Нелинейное уравнение (1.1) с вырожденной матрицей A_0 получено в [4,5] при описании переходных процессов в радиотехнических системах.

Различные численные методы решения вырожденных линейных дифференциально-алгебраических уравнений $\frac{d}{dt}(A_0u(t))+B_0u(t)=f(t)$ рассматривались в [6–8], для системы полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений индекса 1 вида $\frac{dx}{dt}=f(t,x(t),y(t))$; $y(t)=g(t,x(t),y(t))$ – в [8,9]. В [10] доказаны теоремы существования и единственности и предложен численный метод решения вырожденного нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра

$$\frac{d}{dt}(A_0u(t))+B_0u(t)+\int_{t_0}^{t}\varPhi_0(t,s,u(s))ds=f(t),\quad t_0\le t\le T\,.$$

В [11] эти вопросы получили дальнейшее развитие для вырожденного уравнения с малым нелинейным членом

$$\frac{d}{dt}(A_0u(t))+B_0u(t)=\mu F\left(t,u(t),\int_0^t\varPhi_0(t,s,u(s))ds\right)+f(t),\quad t\in[0,1],$$

где μ – малый параметр. В [12] доказаны теоремы существования и единственности решения для общего квазилинейного уравнения вида

$$F_0\left(t,u(t),\int_0^t\varPhi_0(t,s,u(s))ds\right)+F_1\left(t,u(t),\int_0^t\varPhi_1(t,s,u(s))ds\right)=0,\quad t\in[0,1],$$

а численный метод решения построен на основе неявной вычислительной схемы, в которой проведено разложение входных данных в ряд Тейлора с удержанием первого члена разложения. При этом в [11,12] для нахождения численного решения и доказательства сходимости вычислительного процесса требовалось знание точного решения в нескольких узлах сетки.

При построении численных методов решения указанных классов нелинейных вырожденных интегро-дифференциальных уравнений используются явные и неявные вычислительные схемы, связанные с заменой производной конечной разностью и интегрального слагаемого квадратурной суммой. Как отмечалось в [10–12] трудности реализации явных схем (например, схем Эйлера) связаны с необходимостью решения вырожденных дискретных систем, а неявных схем – с решением сложных нелинейных систем. В настоящей работе разработан численный метод решения задачи (1.1),(1.2) на основе явной вычислительной схемы, реализация которой возможна благодаря применению метода спектральных проекторов типа Рисса [13]. В отличие от [11,12] для доказательства сходимости вычислительного процесса не требуется знание точного решения ни в одной точке $t > t_0$.

2. Теорема существования и единственности решения

Всюду в статье мы используем евклидову норму вектора пространства R^{n} и подчиненную ей операторную норму матрицы размера $n \times n$. Линейной части уравнения (1.1) отвечает характеристический матричный пучок $\lambda A_0 + B_0$. Всюду в дальнейшем он предполагается регулярным $(\det(\lambda A_0 + B_0) \not\equiv 0)$ [14] индекса 0 или 1. Если индекс равен нулю, то матрица A_0 обратима, если индекс равен 1, то A_0 имеет нетривиальное ядро, а пучок $\lambda A_0 + B_0$–бесконечные элементарные делители первой степени [14]. Введем пару взаимно дополнительных спектральных проекторов [13]

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda| = C_0} (\lambda A_0 + B_0)^{-1} A_0 d\lambda, \quad P_2 = E - P_1;$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda| = C_0} A_0 (\lambda A_0 + B_0)^{-1} d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1, \tag{2.1}$$

где контур $\{\lambda : |\lambda| = C_0\}$ охватывает конечный спектр пучка $\lambda A_0 + B_0$, а E – единичная матрица порядка n. По аналогии с оператором G из [3] введем матрицу

$$G = A_0 + B_0 P_2 = A_0 + Q_2 B_0 .$$

Как и оператор G из [3], матрица G обратима. Для проекторов вида (2.1) свойства матрицы G установлены в [1].

Положим $S = G^{-1} Q_1 B_0$. Рассмотрим множество D, содержащее точку T и все точки отрезка $[t_0, T]$, представимые в виде $t_0 + \sum\limits_{j=0}^{N} l_j \omega_j$, где $l_j (j = 0,..., N)$ – целые неотрицательные числа. Как правило, сходимость численного метода можно доказать при условии, что точное решение задачи (1.1),(1.2) обладает повышенной гладкостью [6–12,15]. В следующей теореме устанавливаются условия существования и единственности решения $u(t) \in$ $\in C^m([t_0 - \omega_N, T] \setminus D, R^n)$ задачи (1.1),(1.2).

Теорема 1. *Пусть пучок матриц* $\lambda A_0 + B_0$ *регулярный индекса не выше 1,* $f(t) \in C^m([t_0, T], R^{\mathrm{n}})$, $\varphi(x) \in C^m(R^n, R^n)$, $g(t) \in C^m([t_0 - \omega_N, t_0], R^n)$, *элементы* $n \times n$ *матриц* $\Phi_j(t,\tau)$ *вещественны и* m *раз непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на множествах* $\{(t,\tau) \in [t_0, T] \times [t_0 - \omega_j, T]:$ $t_0 - \omega_j \le \tau \le t - \omega_j\}$ $(j = 0,..., N)$ *соответственно и при некоторой постоянной* $M > 0$ *выполнено условие Липшица*

$$\| \varphi(x) - \varphi(y) \| \le M \| x - y \|, \qquad x, y \in R^n, \tag{2.2}$$

Предположим что

$$Q_2\varphi(x)=0, \qquad x\in R^n \tag{2.3}$$

и выполнено условие согласования

$$Q_2\sum_{j=0}^{N}B_j g(t_0-\omega_j)=Q_2 f(t_0) \tag{2.4}$$

на начальный вектор в (1.2) и правую часть в (1.1). Тогда начальная задача (1.1),(1.2) имеет единственное решение $u(t)\in C^m([t_0-\omega_N,T]\setminus D,R^n)$. *В точках множества D производные* $u^{(k)}(t)\ (k=1,...,m)$ *могут не существовать и иметь скачки.*

Доказательство. Существование и единственность решения $u(t)$ задачи (1.1),(1.2) вытекают из теоремы 1 статьи [2]. С помощью соотношения (см. [2])

$$u(t)=e^{-S(t-t_0)}P_1 g(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-S(t-\tau)}G^{-1}Q_1 f(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}e^{-S(t-\tau-\omega_j)}G^{-1}Q_1B_j u(\tau)d\tau-$$

$$-\sum_{j=0}^{N}\int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}G^{-1}Q_2\Phi_j(t,\tau)u(\tau)d\tau-\sum_{j=0}^{N}\int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}\int_{\tau+\omega_j}^{t}e^{-S(t-s)}G^{-1}Q_1\Phi_j(s,\tau)ds\,u(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}e^{-S(t-\tau)}G^{-1}\varphi(u(\tau))d\tau+G^{-1}Q_2 f(t)-\sum_{j=1}^{N}G^{-1}Q_2B_j u(t-\omega_j), \quad t_0\le t\le T$$

и условий теоремы проверяется, что $u(t)\in C^m([t_0-\omega_N,T]\setminus D,R^n)$. Теорема доказана.

Замечание. В [16] получены локальные и глобальные теоремы существования и единственности решения задачи (1.1),(1.2) в бесконечномерных пространствах в случае $\Phi_j(t,\tau)\equiv 0\ (j=0,...,N)$.

3. Построение численного решения задачи (1.1),(1.2)

Как и в [1,3] применим к уравнению (1.1) проекторы Q_1,Q_2. С учетом ограничения (2.3) получим эквивалентную систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$\frac{d}{dt}(x(t))+Sx(t)+G^{-1}Q_1\sum_{j=1}^{N}B_j u(t-\omega_j)+$$

$$+G^{-1}Q_1\sum_{j=0}^{N}\int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}\Phi_j(t,\tau)u(\tau)d\tau=G^{-1}Q_1 f(t)+G^{-1}\varphi(u(t)); \tag{3.1}$$

$$y(t)=G^{-1}Q_2 f(t)-G^{-1}Q_2\sum_{j=1}^{N}B_j u(t-\omega_j)-G^{-1}Q_2\sum_{j=0}^{N}\int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}\Phi_j(t,\tau)u(\tau)d\tau\,, \tag{3.2}$$

где $x(t)=P_1u(t),\ y(t)=P_2u(t)$.

Рассмотрим сеточную область $\{t_i = t_0 + ih : i = -m_N,...,K\}$, где шаг сетки $h = \dfrac{T - t_0}{K}$ выбирается сколь угодно малым и таким, что величины $m_k = \dfrac{\omega_k}{h}\,(k = 0,...,N)$ являются целыми. Обозначим через u_i значение приближенного решения задачи (1.1),(1.2) в узле сетки $t_i\,(i = -m_N,..,K)$ и через $x_i = P_1u_i, y_i = P_2u_i$ его проекции: $u_i = x_i + y_i$. Заменим производную в уравнении (3.1) конечной разностью, а интегральные слагаемые в (3.1),(3.2) – квадратурной формулой трапеций [15]. Получаем следующую разностную схему:

$$x_{i+1} = (E - Sh)x_i - h\sum_{j=1}^{N} G^{-1}Q_1B_ju_{i-m_j} -$$

$$-h^2\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=-m_j}^{i-m_j}\delta_{ijk}G^{-1}Q_1\Phi_j(t_i,t_k)u_k + hG^{-1}Q_1f(t_i) + hG^{-1}\varphi(u_i)\,; \tag{3.3}$$

$$y_{i+1} = G^{-1}Q_2f(t_{i+1}) - \sum_{j=1}^{N} G^{-1}Q_2B_ju_{i+1-m_j} -$$

$$-h\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=-m_j}^{i+1-m_j}\delta_{i+1jk}G^{-1}Q_2\Phi_j(t_{i+1},t_k)u_k\,; \tag{3.4}$$

$$u_{i+1} = x_{i+1} + y_{i+1}, \qquad i = 0,...,K-1\,, \tag{3.5}$$

где $\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & k = -m_j + 1,...,i - m_j - 1, \\ \dfrac{1}{2}, & k = -m_j, i - m_j \end{cases}$ – весовые коэффициенты формулы трапеций [15]. Разностные уравнения (3.3)–(3.5) решаются при известных начальных условиях:

$$x_i = P_1g(t_0 + ih),\ y_i = P_2g(t_0 + ih),\ u_i = x_i + y_i,\ \ i = -m_N, -m_N + 1,...,0\,. \tag{3.6}$$

При каждом $i = 0,...,K-1$ однозначная разрешимость системы линейных алгебраических уравнений (3.3),(3.4) относительно неизвестных x_{i+1}, y_{i+1} имеет место для всех $h > 0$, удовлетворяющих неравенству

$$h\max_{t\in[t_0,T]}\|G^{-1}Q_2\Phi_0(t,t)\| < 1\,. \tag{3.7}$$

В следующей теореме указываются достаточные условия сходимости вычислительного метода (3.3)–(3.6).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 при* $m = 2$. *Тогда разностная схема (3.3)–(3.6) имеет первый порядок сходимости :*

$$\max_{i=0,...,K}\|u(t_i) - u_i\| = O(h)\,.$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in C^2([t_0 - \omega_N, T]\setminus D, R^n)$ – точное решение задачи (1.1),(1.2), которое существует в силу теоремы 1. Заметим, что $x(t) =$

$= P_1 u(t) \in C^1([t_0, T], R^n)$. В силу формулы Тейлора и квадратурной формулы трапеций

$$x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} + O(h), \quad i = 0,..., K-1; \tag{3.8}$$

$$\int_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} \Phi_j(t,\tau) u(\tau) d\tau = h \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} \delta_{ijk} \Phi_j(t_i, t_k) u(t_k) + O(h^2), \quad i = 0,..., K, \; j = 0,..., N. \tag{3.9}$$

Положим в уравнении (3.1) $t = t_i$, в уравнении (3.2) $t = t_{i+1}$ и воспользуемся формулами (3.8),(3.9). Получим

$$x(t_{i+1}) = (E - hS) x(t_i) - h \sum_{j=1}^{N} G^{-1} Q_1 B_j u(t_{i-m_j}) -$$

$$- h^2 \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} \delta_{ijk} G^{-1} Q_1 \Phi_j(t_i, t_k) u(t_k) + h G^{-1} Q_1 f(t_i) + h G^{-1} \varphi(u(t_i)) + O(h^2); \tag{3.10}$$

$$y(t_{i+1}) = G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}) - \sum_{j=1}^{N} G^{-1} Q_2 B_j u(t_{i+1-m_j}) -$$

$$- h \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=-m_j}^{i+1-m_j} \delta_{i+1jk} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) u(t_k) + O(h^2); \tag{3.11}$$

Обозначим $\varepsilon_i^x = x_i - x(t_i), \varepsilon_i^y = y_i - y(t_i)$, $i = -m_N,..., K$. В силу условия Липшица (2.2) имеем

$$\varphi(u_i) - \varphi(u(t_i)) = O(1)(\varepsilon_i^x + \varepsilon_i^y), \quad i = 0,..., K. \tag{3.12}$$

Вычитая из уравнений (3.3),(3.4) уравнения (3.10),(3.11) соответственно, с учетом (3.12) получим

$$\varepsilon_{i+1}^x = (E - Sh) \varepsilon_i^x - h \sum_{j=1}^{N} G^{-1} Q_1 B_j (\varepsilon_{i-m_j}^x + \varepsilon_{i-m_j}^y) -$$

$$- h^2 \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} \delta_{ijk} G^{-1} Q_1 \Phi_j(t_i, t_k)(\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h^2) + O(h)(\varepsilon_i^x + \varepsilon_i^y); \tag{3.13}$$

$$\varepsilon_{i+1}^y = - \sum_{j=1}^{N} G^{-1} Q_2 B_j (\varepsilon_{i+1-m_j}^x + \varepsilon_{i+1-m_j}^y) -$$

$$- h \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=-m_j}^{i+1-m_j} \delta_{i+1jk} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k)(\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h^2); \tag{3.14}$$

Уравнения (3.13),(3.14) решаются при нулевых начальных условиях

$$\varepsilon_i^x = \varepsilon_i^y = 0, \qquad i = -m_N,..., 0. \tag{3.15}$$

Построим $2n$-мерные векторы $\varepsilon_i = (\varepsilon_i^x, \varepsilon_i^y)^{tr}$, $i = -m_N, ..., K$. При достаточно малых $h > 0$ выполнено условие (3.7). Тогда задача (3.13)–(3.15) переписывается в виде

$$\varepsilon_{i+1} = A\varepsilon_i + F_i(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_i), \quad i = 0, ..., K-1; \tag{3.16}$$

$$\varepsilon_i = 0, \qquad i = -m_N, ..., 0, \tag{3.17}$$

где $A = \begin{pmatrix} E + O(h) & O(h) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – блочная матрица размера $2n \times 2n$ с блоками размера $n \times n$, $F_i = F_i(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_i) = \begin{pmatrix} O(h)\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon_{i-m_j} + O(h^2)\sum\limits_{k=0}^{i}\varepsilon_k + O(h^2) \\ \sum\limits_{j=1}^{N} L_j\varepsilon_{i+1-m_j} + O(h)\sum\limits_{k=0}^{i}\varepsilon_k + O(h^2) \end{pmatrix}$, где $L_j \ (j = 1, ..., N)$ – постоянные матрицы размера $n \times 2n$, не зависящие от i, h. Используя формулу вариации постоянных [17, с. 59], находим следующее представление для решения ε_i уравнения (3.16):

$$\varepsilon_i = A^i\varepsilon_0 + \sum_{l=1}^{i} A^{i-l}F_{l-1}, \quad i = 1, ..., K. \tag{3.18}$$

Степени матрицы A имеют следующую структуру:

$$A^i = \begin{pmatrix} (E + O(h))^i & (E + O(h))^{i-1}O(h) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, ..., K, \tag{3.19}$$

и при некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$ имеют место оценки

$$\| (E + O(h))^i \| \le (1 + C_1 h)^i \le e^{C_2(T - t_0)}, \qquad i = 1, ..., K. \tag{3.20}$$

Тогда с учетом нулевых начальных условий (3.17), структуры (3.19) степеней матрицы A, вида вектор - функций F_i и оценок (3.20) получаем линейное дискретное разностное неравенство

$$\| \varepsilon_i \| \le O(h)\sum_{j=0}^{i-1} \| \varepsilon_j \| + O(h), \qquad i = 1, ..., k_1 = min\{m_1, K\}. \tag{3.21}$$

В силу следствия 4.1.2 [17, с. 186] из (3.21) получаем

$$\max_{i=1,...,k_1} \| \varepsilon_i \| \le O(h)(1 + O(h))^{k_1} = O(h), \tag{3.22}$$

что доказывает сходимость вычислительного процесса на отрезке $[t_0, t_0 + \omega_1] \cap [t_0, T]$. Если $t_0 + \omega_1 < T$, то рассмотрим разностное уравнение (3.16) для $i = m_1, ..., k_2 - 1$, где $k_2 = \min\{K, 2m_1\}$. Это разностное уравнение решается при начальном условии

$$\varepsilon_i = O(h), \qquad i = -m_N, ..., m_1, \tag{3.23}$$

справедливом в силу соотношений (3.17) и (3.22). Повторяя проведенные выше рассуждения относительно уравнения (3.16) с учетом начального условия (3.23), получим $\max\limits_{i=1,\ldots,k_2} \|\varepsilon_i\| = O(h)$. За конечное число шагов получим оценку

$$\max_{i=1,\ldots,K} \|\varepsilon_i\| = O(h),$$

которая доказывает теорему.

4. Пример

На рис. 1–2 приведены в графической форме результаты численного решения задачи (1.1),(1.2). Эта задача рассмотрена в пространстве R^2 на отрезке $[t_0,T]=[0,100]$, причем $N=1, \omega_1=1$, $A_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B_0=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}0 & 0.2\\ 0.3 & 0\end{pmatrix}$, $f(t)=e^{-0.05t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $g(t)\equiv\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $\Phi_0(t,\tau)=\begin{pmatrix}\cos(t-\tau) & 0\\ 0 & \cos 2(t-\tau)\end{pmatrix}$, $\Phi_1(t,\tau)= =\begin{pmatrix}0 & \sin(t-\tau)\\ \sin 3(t-\tau) & 0\end{pmatrix}$, и для вектора $u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ нелинейная вектор-функция $\varphi(u)$ имеет вид $\varphi(u)=\begin{pmatrix}\sin^2 u_1\\ 0\end{pmatrix}$. Пучок λA_0+B_0 регулярный и имеет индекс 1. При этом $P_1=Q_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, P_2=Q_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $G=E$ и выполняются соотношения (2.3),(2.4). Функция $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица (2.2) с постоянной $M=1$. Поэтому условия теорем 1,2 выполнены при $m=2$. В силу теоремы 2 для нахождения численного решения этой задачи на отрезке $[0,T]$ можно использовать вычислительную схему (3.3)–(3.6), которая имеет первый порядок сходимости.

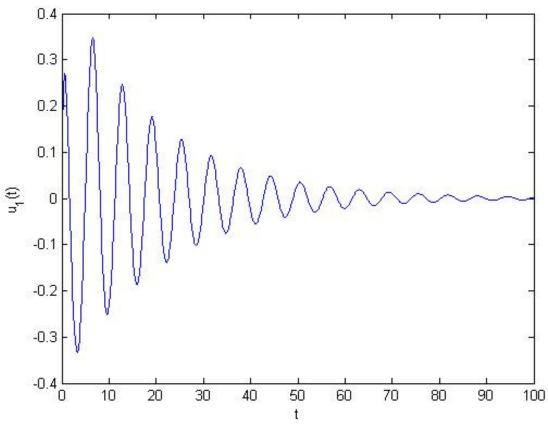

Рис. 1

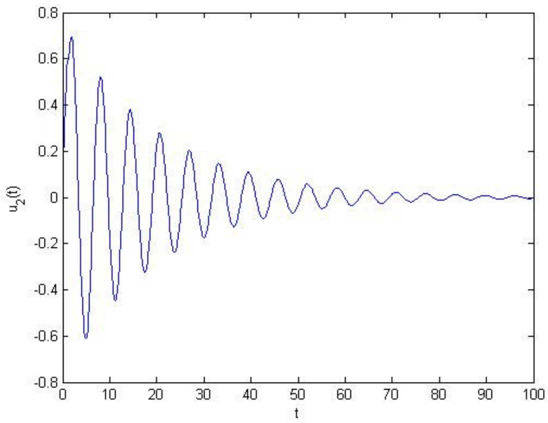

Рис.2

5. Выводы

Вычислительная схема (3.3)–(3.6) позволяет находить численное решение определенных классов вырожденных интегро-дифференциальных уравнений вида (1.1). Условия сходимости этой схемы установлены в теореме 2. Разработанный в статье численный метод может быть использован для построения приближенного решения конкретных уравнений вида (1.1), полученных в [4,5] при исследовании переходных процессов в радиотехнических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // Nonlinear Analysis. TMA.–2003–V. 55, № 1-2.–P.125–139.
2. Пивень А.Л. Существование и единственность решения одного вырожденного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями // Вісник Харк. Нац. Університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математика, прикладна математика і механіка.–2011.–№ 967.– С. 17–31.
3. Власенко Л.А., Мышкис А.Д., Руткас А.Г. Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями // Дифференциальные уравнения.–2008.–Т.44, № 2.– С. 222–231.
4. Власенко Л.А. Руткас А.Г. Переходные процессы в цепях с диспергирующими многопроводными линиями передачи // Радиотехника.–2010.– № 161.– С. 105–114.
5. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmission lines and lumped elements // Proceedings of IEEE 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals.–Sevastopol, Ukraine, September 6–10.–2010.–P. 102–104.
6. Численные методы решения сингулярных систем / Под ред. Ю.Е. Бояринцева.– Новосибирск: Наука,1989.–223 с.

7. Campbell S.L. Singular system of differential equations II.– San-Francisco,London, Melbourne: Pitman Publishing, Research Notes in Mathematics, Vol. 61, 1982.–234 p.
8. Brennan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-value problems in differential algebraic equations.–SIAM: Classic in Applied Mathematics, 1995.–256 p.
9. Куликов Г.Ю. Теоремы сходимости для итеративных методов Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования // Журнал выч. математики и мат. физики. – 1996.– Т.36, № 8.–С. 73–89.
10. Булатов М.В., Чистякова Е.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами // Дифференциальные уравнения.–2006.–Т. 42, № 9.– С. 1248–1255.
11. Чистякова Е.В. Дифференциально-алгебраические уравнения с малым нелинейным членом // Дифференциальные уравнения.–2009.–Т. 45, № 11.– С. 1365–1368.
12. Чистякова Е.В., Чистяков В.Ф. О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений общего вида // Вычислительные технологии.–2011.–Т. 16, № 5.– С. 100–113.
13. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$ // Дифференциальные уравнения.–1975.–Т.11, № 11.–С. 1996–2010.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1988.– 548 с.
15. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.– 632 с.
16. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006.–273 с.
17. Agarval R. Difference equations and inequalities. Theory, methods and applications. – Marcel: Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 2000.–971 p.

Надійшла у першій редакції 14.01.2013, в останній - 15.04.2013.