

УДК 539.3

Метод решения задачи термоупругости многослойных оболочек сложной формы в плане

Е. В. Свет, Н. В. Сметанкина, А. Н. Шупиков

Институт проблем машиностроения им А. Н. Подгорного НАН Украины, Украина

Предлагается метод решения стационарной задачи термоупругости многослойных цилиндрических оболочек сложной формы в плане. Метод основан на приеме погружения сложной области в область канонической формы. Деформации слоев оболочки описываются в рамках теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига в каждом слое. Температурные воздействия получены в результате решения задачи теплопроводности. Исследовано напряженно-деформированное состояние пятислойной оболочки при нагреве пленочным источником тепла.

Ключевые слова: многослойная оболочка, сложная форма плана, термоупругость, пленочный источник тепла.

Пропонується метод розв'язання стаціонарної задачі термопружності багатослойних циліндричних оболонок складної форми в плані. Метод базується на прийомі занурення складної області в область канонічної форми. Деформації шарів оболонки описуються в рамках теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву в кожному шарі. Температурні впливи отримані в результаті розв'язання задачі теплопровідності. Досліджено напружено-деформований стан п'ятишарової оболонки при нагріванні плівковим джерелом тепла.

Ключові слова: багатослойова оболонка, складна форма плану, термопружність, плівкове джерело тепла.

A method of solving the stationary thermoelasticity problem for multilayer cylindrical shells of complex plan shape is proposed. The method is based on immersion of complex area into a canonical shape area. Deformations of the shell layers are described within the framework of the first-order theory taking into account of transverse shear strains in each layer. Temperature loads are obtained as a result of solution of a heat conduction problem. The stress-strained state of a five-layer shell at heating by a film heat source is investigated.

Key words: multilayer shell, complex plan shape, thermoelasticity, film heat source.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Как показывает анализ литературных источников, большинство публикаций посвящено решению задач термоупругости изотропных оболочек канонической формы в плане при заданном законе распределения температуры по их толщине и поверхности [1, 2]. Основными методами решения задач термоупругости многослойных оболочек сложной формы чаще всего являются численные методы, требующие дискретизации области или ее границы – метод конечных разностей, методы конечных и граничных элементов [2–5]. Таким образом, разработка эффективных методов, позволяющих представить решение задачи в аналитическом или численно-аналитическом виде, остается актуальной задачей.

Рассматривается многослойная незамкнутая цилиндрическая оболочка, собранная из I слоев постоянной толщины h_i ($i = \overline{1, I}$), отнесенная к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя. На

координатной поверхности оболочка занимает область G , ограниченную контуром $L: x_L = x(s), y_L = y(s)$ (s – текущая длина дуги). На оболочку действует система силовых и тепловых нагрузок.

Поведение оболочки описывается в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига [6]. Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Перемещения точек оболочки представляются в виде

$$u^i = u + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_x^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_x^i, \quad v^i = v + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_y^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_y^i, \quad w^i = w, \quad (1)$$

где $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ –

перемещения точки координатной поверхности в направлении координатных осей; $\psi_x^i = \psi_x^i(x, y)$, $\psi_y^i = \psi_y^i(x, y)$ – углы поворота нормального элемента в i -м слое вокруг осей $0x$ и $0y$.

Деформации слоев определяются согласно формулам Коши, а напряжения и деформации в i -м слое связаны законом Гука [7]

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\varepsilon_x^i + \nu_i \varepsilon_y^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_T^i T_i, \quad \sigma_y^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\varepsilon_y^i + \nu_i \varepsilon_x^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_T^i T_i, \\ \tau_{xy}^i &= \tau_{yx}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{xy}^i, \quad \tau_{xz}^i = \tau_{zx}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{xz}^i, \\ \tau_{yz}^i &= \tau_{zy}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{yz}^i, \quad i = \overline{1, I}, \end{aligned} \quad (2)$$

где E_i – модуль Юнга материала i -го слоя; ν_i – коэффициент Пуассона; α_T^i – коэффициент линейного температурного расширения материала i -го слоя; $T_i = T_i(x, y, z)$ – изменение температуры по отношению к температуре ненапряженного состояния.

Уравнения термоупругого равновесия многослойной оболочки и соответствующие граничные условия получены на основе вариационного принципа Лагранжа [6]

$$\mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{P}_T - \mathbf{P}, \quad (x, y) \in G, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}^L \mathbf{U} = \mathbf{P}^L, \quad (x, y) \in L, \quad (4)$$

где \mathbf{U} – вектор, компонентами которого являются искомые функции (1);

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w, \quad u_{3+i} = \psi_x^i, \quad u_{3+I+i} = \psi_y^i, \quad i = \overline{1, I};$$

$$\mathbf{P}_T = \{C_{1T,x}^I, C_{2T,y}^I, -C_{2T}^I/R, D_{1T,x}^I, D_{2T,y}^I\};$$

$$\mathbf{P}^L = \{C_{1T}^I l_x^2 + C_{2T}^I l_y^2, (C_{1T}^I - C_{2T}^I) l_x l_y, 0, D_{1T}^I l_x^2 + D_{2T}^I l_y^2, (D_{1T}^I - D_{2T}^I) l_x l_y\},$$

$$C_{1T}^I = \sum_{i=1}^I N_{1T}^i, \quad C_{2T}^I = \sum_{i=1}^I N_{2T}^i, \quad D_{1T}^I = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{1T}^{j+1}, \quad D_{2T}^I = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{2T}^{j+1} + M_{2T}^i,$$

$$N_{1T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, N_{2T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz,$$

$$M_{1T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, M_{2T}^i = \frac{E_i \alpha_T^i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) dz;$$

R – радиус оболочки, l_x, l_y – направляющие косинусы нормали к контуру L .

2. Истоки исследования авторов

Решение поставленной задачи термоупругости опирается на метод погружения, ранее разработанный для решения задач термоупругости многослойных пластин [6]. Исходная многослойная оболочка произвольной формы в плане погружается вспомогательную охватывающую многослойную оболочку канонической формы в плане с такой же композицией слоев. Этот прием позволяет получить простое аналитическое решение исходной задачи.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Анализ исследований, посвященных термоупругости многослойных элементов конструкций, показывает, что чаще всего рассматривается их деформирование при воздействии стационарных температурных полей. При этом на поверхностях слоев температура считается постоянной, а по толщине конструкции применяется гипотеза о кусочно-линейном распределении температуры.

В статье [8] рассмотрена задача термоупругости для неравномерно нагретых по толщине ортотропных цилиндрических оболочек с применением метода фундаментальных решений. Предполагается линейное распределение температуры по толщине оболочки и конвективный теплообмен с внешней средой по закону Ньютона на наружных поверхностях. Исследовано влияние теплообмена на термонапряженное состояние конструкций. В работе [9] методом R -функций, позволяющим учитывать сложную геометрию тел на аналитическом уровне, решена задача термоупругости для тонких пластин сложной формы. Поведение пластин описано на основе гипотез Кирхгофа-Лява. В статье [10] предложен альтернативный вариант метода граничных элементов к решению задач изгиба пластин, находящихся в температурном поле. Подход состоит в приведении задачи Дирихле для бигармонического оператора к последовательности распадающихся задач и последующей декомпозиции каждой из них в пару несвязанных задач для уравнения Пуассона. В качестве примера рассматривалась круговая защемленная пластина под действием распределенной температурной нагрузки.

Целью настоящей работы является разработка метода решения задачи термоупругости многослойных оболочек сложной формы в плане при воздействии температурных полей, полученных в результате решения задачи теплопроводности.

4. Используемый метод решения

В настоящей работе в качестве вспомогательной принимается многослойная цилиндрическая шарнирно опертая оболочка прямоугольной формы в плане.

Чтобы обеспечить выполнение действительных граничных условий, к вспомогательной оболочке по контуру L прилагаются дополнительные компенсирующие усилия и моменты $\mathbf{Q}^c = \{q_j^c(x, y)\}$, $(x, y) \in L$, $j = \overline{1, 2I+3}$. В уравнения термоупругого равновесия (3) функции компенсирующих нагрузок входят в виде интегральных соотношений:

$$p_j^c(x, y) = \int_0^{s^*} q_j^c(x_L, y_L) \delta(x - x_L, y - y_L) ds, \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad (5)$$

где $\delta(x - x_L, y - y_L)$ – двумерная δ -функция Дирака; s^* – периметр оболочки.

Граничные условия (4) с учетом (5) приводят к системе интегральных уравнений для определения компенсирующих нагрузок

$$\mathbf{V}^L \mathbf{U}[\mathbf{Q}^c(x, y)] = \mathbf{Q}^L, \quad (x, y) \in L. \quad (6)$$

Метод решения системы (6) состоит в том, что функции перемещений, силовых \mathbf{P} , температурных \mathbf{P}_T и компенсирующих \mathbf{P}^c (5) нагрузок разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим условиям шарнирного опирания вспомогательной прямоугольной оболочки

$$\begin{aligned} u_j(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jmn} B_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn} B_{jmn}(x, y), \\ p_{Tj}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^T B_{jmn}(x, y), \quad p_j^c(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^c B_{jmn}(x, y), \\ B_{1mn} &= \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad B_{2mn} = \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad B_{3mn} = \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ B_{3+i mn} &= B_{1mn}, \quad B_{3+I+i mn} = B_{2mn}, \\ \alpha_m &= m\pi/A, \quad \beta_n = n\pi/B, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, 2I+3}, \end{aligned}$$

где A – длина образующей вспомогательной оболочки; B – длина дуги этой оболочки.

Кроме того, функции компенсирующих нагрузок и граничных перемещений, разлагаются в ряд вдоль контура L [6, 7]

$$q_j^c(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{j\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s), \quad u_j(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} u_{j\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad (7)$$

где

$$d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)], \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \int_0^{s^*} d\tilde{s}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi.$$

В результате преобразований система интегральных уравнений (3) с учетом (7) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций компенсирующих нагрузок $f_{j\alpha\mu}$

$$\sum_{j=1}^{2I+3} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} N_{ij\alpha\mu} f_{j\alpha\mu} = \Pi_{i\beta\nu}, \quad i = \overline{1, 2I+3}, \beta = \overline{1, 2}, \nu = \overline{0, \nu^*}.$$

Порядок полученной системы зависит от числа слоев в оболочке и количества членов ряда, удерживаемых в разложении (7), и равен $(2I+3) \times (2\mu^* + 1)$. После определения компенсирующих нагрузок путем суммирования ряда (7) вычисляются перемещения (1) и напряжения (2) в слоях исходной оболочки.

5. Численный пример решения задачи термоупругости

В качестве иллюстрации решена задача термоупругости пятислойной оболочки, контур которой составлен из отрезков прямых и сопряженных с ними дуг окружностей.

На рис. 1 приведена расчетная схема оболочки радиуса 2,5 м с такими геометрическими параметрами: $l_1 = 0,74$ м, $l_2 = 0,16$ м, $l_3 = 0,75$ м, $l_4 = 0,26$ м, $R_k = 0,03$ м, $k = \overline{1, 4}$. Слои оболочки выполнены из материалов со следующими характеристиками: $E_i = 6,8 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_i = 0,22$, $\alpha_T^i = 9 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $i = 1, 3, 5$; $E_i = 2,2 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_i = 0,38$, $\alpha_T^i = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $i = 2, 4$; $h_1 = 0,005$ м, $h_2 = 0,003$ м, $h_3 = 0,012$ м, $h_4 = 0,002$ м, $h_5 = 0,008$ м. Предполагается, что силовые нагрузки отсутствуют.

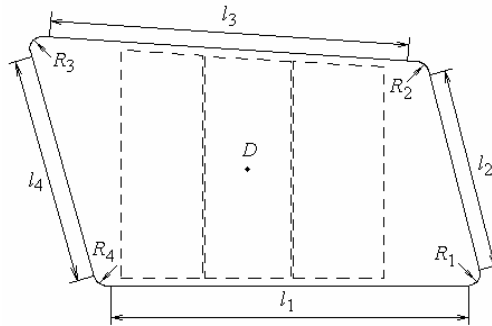


Рис. 1. Расчетная схема оболочки

Поле температурных нагрузок получено из решения нестационарной задачи теплопроводности многослойных оболочек [11] с учетом воздействия пленочного источника. Боковая поверхность оболочки считается идеально теплоизолированной. Задача теплопроводности решена с такими исходными данными: $k_i = 1,08$ Вт/(м·°C), $i = 1, 3, 5$; $k_i = 0,22$ Вт/(м·°C), $i = 2, 4$ (коэффициенты теплопроводности материала i -го слоя); $H_1 = 433$ Вт/(м²·°C), $H_2 = 20$ Вт/(м²·°C) (коэффициенты конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях оболочки); $T_1 = -30^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$ (температура среды на

границе с верхней и нижней поверхностями). Пленочный источник тепла мощностью $q = 6 \text{ кВт/м}^2$ расположен между первым и вторым слоями оболочки. Расположение источника показано штриховой линией.

На рис. 2 представлено распределение температуры T и главного напряжения σ_1^i ($i = \overline{1, I}$) по толщине оболочки в точке D . Также показана композиция слоев. Напряжения получены для температурного распределения в момент времени, когда температура на поверхности с источником достигает наибольшего значения. На поверхности раздела первого и второго слоев оболочки наблюдается резкое изменение температуры и напряжения, вызванное наличием источника тепла. При этом напряжение не превышает своего допустимого значения.

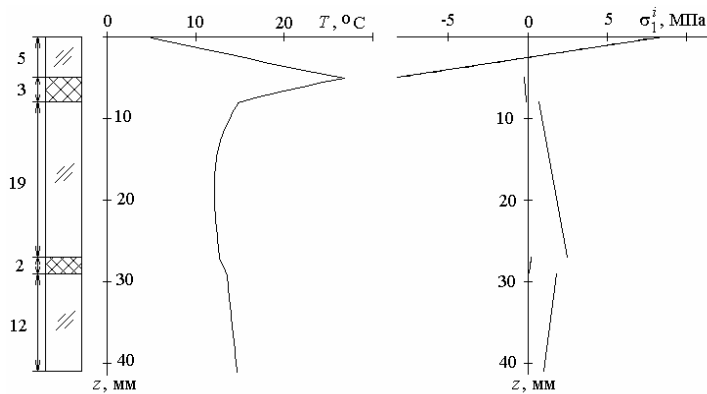


Рис. 2. Распределение температуры и напряжений в слоях оболочки

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложен метод решения задачи термоупругости многослойных оболочек сложной формы в плане с пленочными источниками тепла, позволяющий представить решение задачи в аналитической форме. Разработанный метод позволяет рассматривать оболочки, собранные из слоев с различными механическими и геометрическими характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bielski W.R. Controllability and stabilization in elasticity, heat conduction and thermoelasticity: review of recent developments // J. of Global Optimization.– 2000.– v. 17, № 4. – P. 353 – 386.
2. Barut A., Madenci E., Tessler A. Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution // Int. J. Solids and Structures.– 2000.– v. 37, № 27.– P. 3681–3713.

3. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. – Самара: Самар. ГТУ, 2006. – 304 с.
4. Jane K.C., Wu Y.H. A generalized thermoelasticity problem of multilayered conical shells // *Int. J. Solids and Structures*.– 2004.– v. 41, № 9–10.– P. 2205 – 2233.
5. Oguamanam D.C.D., Hansen J.S., Heppler G.R. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2004.– v. 71, № 1.– P. 49 – 56.
6. Шупиков А.Н., Сметанкина Н.В., Свет Е.В. Термонапряженное состояние многослойных пластин неканонической формы // *Вісник ДНУ. Механіка* – 2011. – т. 2, вип. 15. – С. 264–274.
7. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 376 с.
8. Шевченко В.П., Гольцев А.С. Термоупругое состояние ортотропных цилиндрических оболочек при локальном неравномерном нагреве // *Теорет. и прикл. механика*.– 2005.– № 40.– С. 135-139.
9. Рвачев В.Л., Тицкий В.П., Шевченко А.Н. К решению одной задачи термоупругости для тонких изотропных пластин сложной геометрии // *Матем. методы и физико-механич. поля*.– 1984.– Вып. 19.– С. 62–65.
10. Туровцев Г.В., Шадманов А.Т. Итерационный метод граничных интегральных уравнений для исследования изгиба температурного изгиба пластин // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов*.– Н. Новгород, 1991.– С. 35–39.
11. Shupikov A.N., Smetankina N.V., Svet Ye.V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*.– 2007. – v. 129, № 3. – P. 335 – 341.