

УДК 517.968.519.6

## Дискретна математична модель дифракції на періодичній системі ідеально провідних циліндричних поверхонь

Ю. М. Бахмат

*Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Україна*

У статті побудована математична модель дифракції Н-поляризованої електромагнітної хвилі на періодичній системі ідеально провідних замкнених кругових циліндричних поверхонь. Ця модель базується на граничному інтегральному рівнянні відповідної крайової задачі з другою граничною умовою для рівняння Гельмгольца. Побудована дискретна математична модель вище зазначеної задачі дифракції на основі метода дискретних особливостей. Був проведений чисельний експеримент.

**Ключові слова:** задача дифракції, граничне інтегральне рівняння, інтегральне рівняння з логарифмічною особливістю, гіперсингулярне інтегральне рівняння..

В статье построена математическая модель дифракции Н-поляризованной электромагнитной волны на периодической системе идеально проводящих замкнутых круговых цилиндрических поверхностей. Эта модель базируется на граничном интегральном уравнении соответствующей краевой задачи со вторым граничным условием для уравнения Гельмгольца. Построена дискретная математическая модель выше указанной задачи дифракции на основе метода дискретных особенностей. Был проведен численный эксперимент.

**Ключевые слова:** задача дифракции, граничное интегральное уравнение, интегральное уравнение с логарифмической особенностью, гиперсингулярное интегральное уравнение..

The article deals with the mathematical model of diffraction of H-polarized electromagnetic waves on periodic ideally conducting circular cylindrical surfaces. Discrete mathematical model build above mentioned problems of diffraction based on Discrete features. The numerical experiment has been made.

**Key words:** hypersingular integral equations, numerical solution, computer-based experiment, diffraction problem.

### 1. Вступ

Ціллю даної роботи є побудова дискретної математичної моделі дифракції Н-поляризованої електромагнітної хвилі на замкнених циліндричних поверхнях, використовуючи метод дискретних особливостей, для того, щоб потім провести чисельний експеримент. У якості циліндричної поверхні буде братися круговий циліндр. При малому радіусу циліндра ми отримаємо систему тонких проводів. Цікаво буде порівняти дві задачі, в одній з яких буде братися періодична система кругових циліндрів, а в іншій - система стрічок. Саме питання про порівняння на даний момент є недослідженим, але планується його дослідження. У роботі використовується метод дискретних особливостей, бо він ефективно працює, коли виникають інтегральні рівняння з особливостями.

### 2. Постановка задачі

Розглянемо систему, що складається з простих гладких замкнених кривих  $L_n$  - направляючі циліндричної поверхні (у даному випадку система кругових циліндрів), твірні якої паралельні OZ:

$$L = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} L_n \quad (1)$$

Береться перетин площиною, паралельною площині ХОУ, тобто задача двовимірна. Розглядається прямокутна система координат, тоді параметричні рівняння направляючих циліндричних поверхонь будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \xi_n = x(\phi) + 2l \cdot n, \\ \eta_n = y(\phi), \end{cases} \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (2)$$

Перейдемо до періоду  $2\pi$  :

$$\begin{cases} x_n = \frac{\pi}{l} x(\phi) + 2\pi n, \\ y_n = \frac{\pi}{l} y(\phi), \end{cases} \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

Позначимо

$$\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \text{int } L_n.$$

Розсіяне поле будемо шукати у вигляді потенціалу подвійного прошарку [1]:

$$u(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) \cdot v(x) ds_x, \quad y \in C\bar{\Omega}. \quad (3)$$

де

$$G(x, y) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\chi|x-y|). \quad (4)$$

Позначимо  $u_0(x)$  - падаюче поле,  $u(x)$ - розсіяне поле. Оскільки розглядається випадок Н-поляризації, то на поверхні виконується гранична умова Неймана:

$$\frac{\partial}{\partial n} u_0(y) = -\frac{\partial}{\partial n} u(y), \quad (5)$$

тоді отримали граничне інтегральне рівняння [1]:

$$\frac{\partial}{\partial n} u_0(y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial^2}{\partial n_y \partial n_x} G(x, y) \cdot v(x) ds_x, \quad y \in L. \quad (6)$$

### 3. Дискретна математична модель у випадку Н-поляризації

Інтеграл (6) розуміємо у сенсі скінченної частини по Адамару. Перейдемо до визначеного інтегралу, перепишемо (6) у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial n} u_0(x_0(\phi_0), y_0(\phi_0)) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial n_y \partial n_x} H_0^{(1)}(\chi \cdot \sqrt{(x_0(\phi) - x_n(\phi_0))^2 + (y_0(\phi) - y_n(\phi_0))^2}) \\ & \cdot v(x_0(\phi), y_0(\phi)) \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2} \cdot d\phi, \quad \phi_0 \in [0, 2\pi) \end{aligned} \quad (7)$$

Перетворимо вираз

$$W(x, y) = \frac{\pi}{2i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)} \left( \chi \sqrt{(x + 2\pi n)^2 + y^2} \right). \quad (8)$$

Використовуючи Фур'є представлення функції Ханкеля [3]:

$$H_0^{(1)} \left( \chi \sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi \cdot (\alpha \cdot x + \sqrt{1-\alpha^2} |y|)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad (9)$$

а також формулу сумування Пуасона

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{2\pi i x k} dx, \quad (10)$$

маємо

$$W(x, y) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y|}}{\gamma_n} \cos(n \cdot x) + \frac{e^{i\chi |y|}}{2i\chi}, \quad (11)$$

де  $\gamma_n = \sqrt{n^2 - \chi^2}$ ,  $\text{Re}(\gamma_n) \geq 0$ ,  $\text{Im}(\gamma_n) \leq 0$ .

Позначимо

$$z = (x_1, y_1), \quad z_0 = (x_0, y_0).$$

Тоді

$$W^1(z, z_0) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|}}{\gamma_n} \cos(n \cdot (x_1 - x_0)) + \frac{e^{i\chi |y_1 - y_0|}}{2i\chi}, \quad (12)$$

і похідна

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial n_{z_0} \partial n_z} W^1(z, z_0) &= n_{x_0} (n_{x_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|}}{\gamma_n} n^2 \cos(n \cdot (x_1 - x_0)) + \\ &+ n_{y_1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|} \frac{|y_1 - y_0|}{y_1 - y_0} n \cdot \sin(n \cdot (x_1 - x_0)) + \\ &+ n_{y_0} (n_{x_1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|} \frac{|y_1 - y_0|}{y_1 - y_0} n \cdot \sin(n \cdot (x_1 - x_0)) + \\ &+ n_{y_1} (\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|} \cos(n \cdot (x_1 - x_0)) - \frac{i\chi}{2} e^{i\chi |y_1 - y_0|})). \end{aligned} \quad (13)$$

Для того, щоб ряди краще збігалися, використаємо формулу Крилова прискорення збіжності рядів [3]:

$$\begin{aligned} Q_1(z, z_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|}}{-\gamma_n} n^2 \cos(n \cdot (x_1 - x_0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{e^{-(\gamma_n - n) |y_1 - y_0|}}{-\gamma_n} n^2 + n + \frac{\chi^2}{2n} + \right. \\ &+ \left. \frac{\chi^2 \cdot |y_1 - y_0|}{2} \right) \cdot e^{-n |y_1 - y_0|} \cos(n \cdot (x_1 - x_0)) + \frac{1 - \cos(x_1 - x_0) \cdot ch(y_1 - y_0)}{2 (ch(y_1 - y_0) - \cos(x_1 - x_0))^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\chi^2}{4} \cdot \ln 2(\operatorname{ch}(y_1 - y_0) - \cos(x_1 - x_0)) - \frac{\chi^2}{4} (y_1 - y_0) \frac{\operatorname{sh}(y_1 - y_0)}{\operatorname{ch}(y_1 - y_0) - \cos(x_1 - x_0)} + \\
& + \frac{\chi^2}{4} |y_1 - y_0|,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(z, z_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|} \cos(n \cdot (x_1 - x_0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\gamma_n e^{-(\gamma_n - n) |y_1 - y_0|} - n + \\
& + \frac{\chi^2}{2n} - \frac{\chi^2 \cdot |y_1 - y_0|}{2}) \cdot e^{-n |y_1 - y_0|} \cdot \cos(n \cdot (x_1 - x_0)) - \\
& - \frac{1}{2} \frac{1 - \cos(x_1 - x_0) \cdot \operatorname{ch}(y_1 - y_0)}{(\operatorname{ch}(y_1 - y_0) - \cos(x_1 - x_0))^2} - \frac{\chi^2}{4} \cdot \ln 2(\operatorname{ch}(y_1 - y_0) - \cos(x_1 - x_0)) -
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\chi^2}{4} (y_1 - y_0) \frac{\operatorname{sh}(y_1 - y_0)}{\operatorname{ch}(y_1 - y_0) - \cos(x_1 - x_0)} + \frac{\chi^2}{4} |y_1 - y_0|, \\
Q_3(z, z_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|} \frac{|y_1 - y_0|}{y_1 - y_0} n \cdot \sin(n \cdot (x_1 - x_0)) = \frac{|y_1 - y_0|}{y_1 - y_0} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-\gamma_n |y_1 - y_0|} - \\
& - e^{-n |y_1 - y_0|}) \cdot n \cdot \sin(n \cdot (x_1 - x_0)) + \frac{1}{2} \frac{\sin(x_1 - x_0) \cdot \operatorname{sh}(y_1 - y_0)}{(\operatorname{ch}(y_1 - y_0) - \cos(x_1 - x_0))^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Отже, остаточно маємо

$$\begin{aligned}
W_1(\phi, \phi_0) &= n_{x_0} n_{x_1} Q_1(\varphi, \varphi_0) + (n_{x_0} n_{y_1} + n_{y_0} n_{x_1}) \cdot Q_2(\varphi, \varphi_0) + \\
& + n_{y_0} n_{y_1} \left( Q_3(\varphi, \varphi_0) - \frac{i\chi}{2} e^{i\chi |y_n(\varphi) - y_n(\varphi_0)} \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Перепишемо (7), враховуючи (17),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial n} u_0(x_0(\phi_0), y_0(\phi_0)) = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_1(\phi, \phi_0) \cdot v(x_0(\phi), y_0(\phi)) \frac{\pi}{l} \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2} \cdot d\phi, \quad \phi_0 \in [0, 2\pi)
\end{aligned} \tag{18}$$

Отримане рівняння (18) – інтегральне рівняння, ядро якого містить гіперсингулярну та логарифмічну особливості. Виділимо зазначені вище особливості:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial n} u_0(x_0(\phi_0), y_0(\phi_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-l^2}{2(\pi R)^2} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} u^*(\phi) d\phi + \\
& + \frac{\chi^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\phi - \phi_0}{2} \right| u^*(\phi) d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_1^*(\phi, \phi_0) u^*(\phi) d\phi, \quad \phi_0 \in [0, 2\pi),
\end{aligned} \tag{19}$$

де

$$u^*(\phi) = v(x_0(\phi), y_0(\phi)) \frac{\pi}{l} \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2},$$

$$W_1^*(\phi, \phi_0) = W_1(\phi, \phi_0) + \frac{l^2}{2(\pi R)^2} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} - \frac{\chi^2}{2} \ln \left| \sin \frac{\phi - \phi_0}{2} \right|.$$

Побудуємо дискретну математичну модель даної задачі. Спочатку перейдемо до задачі для наближеного розв'язку. Замінімо усі гладкі функції у (19) відповідними інтерполяційними тригонометричними поліномами:

$$\begin{aligned} \left( P_n^{(2)} \frac{\partial}{\partial n} u_0 \right) (\phi_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-l^2}{2(\pi R)^2} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \cdot (P_n^{(1)} u^*) (\phi) d\phi + \\ &+ \frac{\chi^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\phi - \phi_0}{2} \right| (P_n^{(1)} u^*) (\phi) d\phi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_n^{(2)} P_n^{(1)} W_1^*) (\phi, \phi_0) \cdot (P_n^{(1)} u^*) (\phi) d\phi, \quad \phi_0 \in [0, 2\pi), \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$(P_n^{(i)} g)(\phi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} g(\phi_k^{(i,n)}) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} (\phi - \phi_k^{(i,n)})}{\sin \frac{1}{2} (\phi - \phi_k^{(i,n)})}$$

$$\phi_k^{(1,n)} = \phi_k^n = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n, \quad \phi_k^{(2,n)} = \phi_{0j}^n = \frac{2j+1}{2n+1} \pi, \quad j = 0, 1, \dots, 2n.$$

Скориставшись інтерполяційними квадратурними формулами [5], взявши у якості точок колокації другий набір точок, маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} u_0(\phi_j^n) &= \frac{-l^2}{2(\pi R)^2} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left( \frac{\sin^2 \frac{n}{2} (\phi_{0j}^n - \phi_k^n)}{\sin^2 \frac{\phi_j^n - \phi_k^n}{2}} + \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \sin \frac{1}{2} (\phi_{0j}^n - \phi_k^n)}{\sin \frac{\phi_j^n - \phi_k^n}{2}} \right) \cdot \\ &\cdot u^*(\phi_k^n) - \frac{\chi^2}{2} \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left\{ \ln 2 + \sum_{p=1}^n \frac{\cos p(\phi_{0j}^n - \phi_k^n)}{p} \right\} \cdot u^*(\phi_k^n) + \\ &+ \sum_{k=0}^{2n} W^*(\phi_k^n, \phi_j^n) \cdot u^*(\phi_k^n), \quad j = 0, 1, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4. Амплітуда розсіяного поля

Повне поле є суперпозицією двох полів – падаючого (яке є у просторі і до внесення періодичної структури) і розсіяного (яке виникає після внесення дифрагуючого тіла у простір). Розсіяне поле виражається у вигляді потенціалу:

$$u(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_L v(x) \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) ds_x, \quad y \in C\bar{\Omega}. \quad (21)$$

Перейшовши від криволінійного інтегралу першого роду до визначеного, маємо

$$u(y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} G(x_n(\phi), y_n(\phi), y) \cdot v(x_0(\phi)) \frac{\pi}{l} \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2} d\phi, \quad (22)$$

$$y \in C\bar{\Omega}$$

Знову використавши Фур'є представлення функції Ханкеля, а також формулу сумування Пуасона, перетворили (22):

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_2^*(\phi, y) \cdot u^{**}(\phi) d\phi, \quad (x_0, y_0) \in C\bar{\Omega} \quad (23)$$

де

$$u^{**}(\phi) = v(x_0(\phi), y_0(\phi)) \frac{\pi}{l} \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2},$$

$$W_2^*(\phi, y) = -\cos(\phi) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y_0(\phi) - y_2|}}{\gamma_n} n \cdot \sin(n(x_0(\phi) - y_1)) +$$

$$+ (-\sin(\phi)) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\gamma_n |y_0(\phi) - y_2|} \frac{|y_0(\phi) - y_2|}{y_0(\phi) - y_2} \cos(n(x_0(\phi) - y_1)) \right.$$

$$\left. \frac{|y_0(\phi) - y_2|}{y_0(\phi) - y_2} \frac{e^{i \cdot \chi |y_0(\phi) - y_2|}}{2} \right\}.$$

Потім, замінивши усі гладкі функції відповідними інтерполяційними тригонометричними поліномами і використавши квадратурні формули [4], остаточно маємо:

$$u(y) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} W_2^*(\phi_k^n, y) u^{**}(\phi_k^n), \quad y \in C\bar{\Omega}. \quad (25)$$

#### 5. Коефіцієнти проходження та відображення

Розсіяне поле у області за межами циліндрів представляється у вигляді потенціалу:

$$u(\hat{y}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} G(\mathfrak{E}, \varphi) \cdot u^{**}(\varphi) d\varphi, \quad \mathfrak{E} \in C\bar{\Omega}, \quad (26)$$

де

$$G(\mathfrak{k}, \varphi) = \frac{\pi}{2i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)} \left( \chi \sqrt{(x(\varphi) - \mathfrak{k}_1)^2 + (y(\varphi) - \mathfrak{k}_2)^2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y(\varphi) - \mathfrak{k}_2|}}{\gamma_n} e^{i \cdot n |x(\varphi) - \mathfrak{k}_1|}. \quad (27)$$

Розглянемо

$$W(x, y) = \frac{\pi}{2i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)} \left( \chi \sqrt{(x + 2\pi n)^2 + (y)^2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y|}}{\gamma_n} e^{-i \cdot n \cdot x}. \quad (28)$$

Знайдемо

$$\frac{\partial}{\partial n} W(x, y) = n_x \frac{\partial}{\partial n_x} W(x, y) + n_y \frac{\partial}{\partial n_y} W(x, y) = \frac{n_x}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y|}}{\gamma_n} i \cdot n \cdot e^{-i \cdot n \cdot x} +$$

$$+ \frac{n_y}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|y|}{y} e^{-\gamma_n |y|} \cdot e^{-i \cdot n \cdot x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( n_x \cdot \frac{i \cdot n}{\gamma_n} + n_y \frac{|y|}{y} \right) \cdot e^{-\gamma_n |y| - i \cdot n \cdot x}.$$

Перепишемо (26), враховуючи (29):

$$u(\hat{y}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( n_x \cdot \frac{i \cdot n}{\gamma_n} + n_y \frac{|y_0(\varphi) - \mathfrak{k}_2|}{y_0(\varphi) - \mathfrak{k}_2} \right) \cdot$$

$$\cdot e^{-\gamma_n |y_0(\varphi) - \mathfrak{k}_2| - i \cdot n (x_0(\varphi) - \mathfrak{k}_1)} u^{**}(\varphi) d\varphi. \quad (30)$$

або при  $y_0(\varphi) < \mathfrak{k}_2$ :

$$u(\hat{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left( n_x \cdot \frac{i \cdot n}{\gamma_n} - n_y \right) \cdot e^{\gamma_n \cdot y_0(\varphi) - i \cdot n \cdot x_0(\varphi)} u^{**}(\varphi) d\varphi \cdot e^{-\gamma_n \cdot \mathfrak{k}_2 + i \cdot n \cdot \mathfrak{k}_1}, \quad (31)$$

при  $y_0(\varphi) > \mathfrak{k}_2$ :

$$u(\hat{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left( n_x \cdot \frac{i \cdot n}{\gamma_n} + n_y \right) \cdot e^{-\gamma_n \cdot y_0(\varphi) - i \cdot n \cdot x_0(\varphi)} u^{**}(\varphi) d\varphi \cdot e^{\gamma_n \cdot \mathfrak{k}_2 + i \cdot n \cdot \mathfrak{k}_1}. \quad (32)$$

Звідси коефіцієнти відображення:

$$a_n = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left( n_x \cdot \frac{i \cdot n}{\gamma_n} - n_y \right) \cdot e^{\gamma_n \cdot y_0(\varphi) - i \cdot n \cdot x_0(\varphi)} u^{**}(\varphi) d\varphi, \quad (33)$$

а коефіцієнти проходження:

$$b_n = \delta_{0n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left( n_x \cdot \frac{i \cdot n}{\gamma_n} + n_y \right) \cdot e^{-\gamma_n \cdot y_0(\varphi) - i \cdot n \cdot x_0(\varphi)} u^{**}(\varphi) d\varphi \quad (34)$$

## 6. Чисельний експеримент

По побудованій дискретній математичній моделі був проведений чисельний експеримент, а саме досліджена амплітуда розсіяного поля. Досліджена поведінка коефіцієнта проходження в залежності від радіуса кола та хвильового числа.

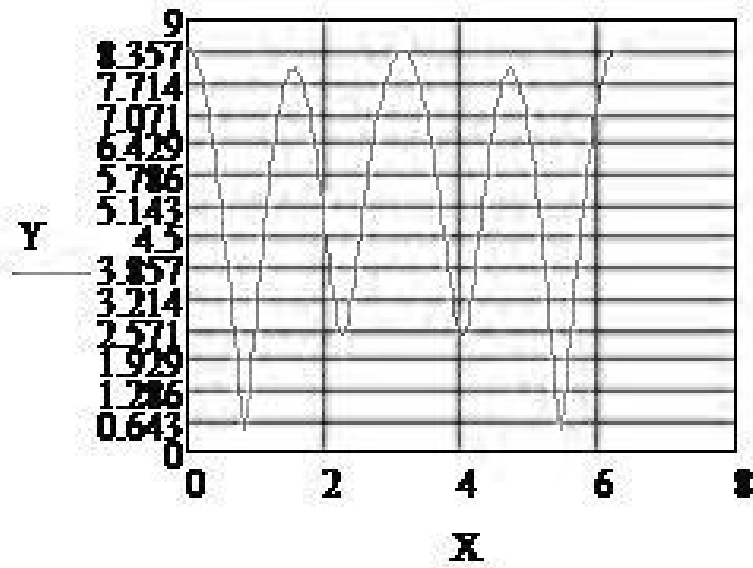


Рис.1. Графік модуля розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь

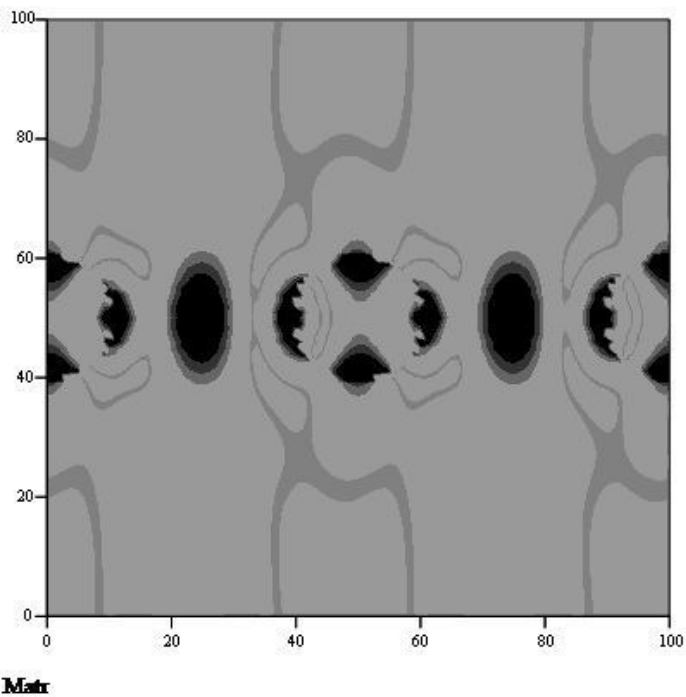


Рис.2. Амплітуда розсіяного поля,  $R = \frac{1}{2}, l = \frac{6}{5}, \chi = \frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{\pi}{2}$



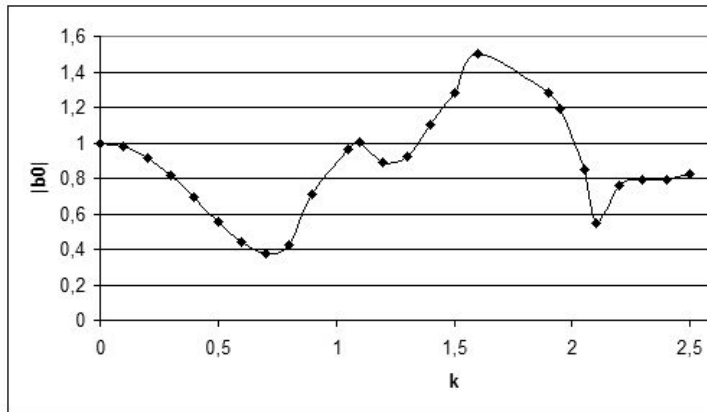


Рис. 3. Залежність коефіцієнта прохідження від  $\chi$  у випадку нормального падіння

$$\text{при } \frac{R}{l} = 0.95$$

### 7. Висновки

Отже, у роботі приведена математична модель задачі дифракції на періодичній системі замкнених кругових циліндричних поверхонь, а також побудована дискретна математична модель. У роботі був застосований метод дискретних особливостей. Саме зазначений метод ефективно працює при побудові дискретної моделі поставленої задачі, а потім і при чисельному експерименті.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: из-во Харьковского университета, 1973. – 287с.
2. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.М. Математические вопросы метода дискретных токов // Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Часть 2. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344с.
4. Гандель Ю.В. Введения в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие. – Харьков, ХНУ, 2002 г. – 92с. Издание 2-ое, исправленное.
5. Душкин В.Д. Математические модели задач дифракции Н-поляризованных волн на периодических структурах // Математическое моделирование: Збірник наукових праць Інституту математики НАН України. – Київ, 1996. – с.92-95.