

УДК 517.955:519.673

## Ідентифікація параметрів сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія-масообмін» в наносередовищах

А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк

*Рівненський державний гуманітарний університет, Україна*

Побудовано алгоритм асимптотичного розв'язку розв'язків сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії в двопористому середовищі з невідомим залежним від часу коефіцієнтом впливу внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий та невідомою функцією адсорбційної рівноваги. Наведено результати комп'ютерних розрахунків.

**Ключові слова:** сингулярно збурена обернена задача, конвективна дифузія, нанопористе середовище.

Построен алгоритм асимптотического разложения решений сингулярно возмущенных краевых задач конвективной диффузии в двухпористой среде с неизвестным зависимым от времени коэффициентом влияния диффузионного переноса внутри частицы на диффузионный перенос между частицами и неизвестной функцией адсорбционного равновесия. Приведены результаты компьютерных расчетов.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенная обратная задача, конвективная диффузия, нанопористая среда.

Algorithm for asymptotic expansion of solutions of singularly perturbed boundary value problem of convective diffusion in two-porous environment with unknown time-dependent coefficient of influence of intraparticle diffusion transfer in the interparticle diffusion transfer and with unknown function of adsorption equilibrium is constructed. Results of computer calculations are given.

**Key words:** singularly perturbed inverse problem, convective diffusion, nanoporous environment.

### 1. Вступ.

Суттєве збільшення концентрації техногенних забруднювачів у водних екосистемах в останні десятиліття призвело до необхідності розробки нових високоефективних методів очистки. Основними напрямками в цій сфері є використання процесів дифузійного масопереносу [1-3] в середовищі з мікропористою структурою (наприклад, вуглеводні адсорбенти). На сьогодні розроблено чимало підходів до моделювання процесів масопереносу в пористих каталітичних середовищах, які дозволяють в достатній мірі враховувати вплив масопереносу на рівні частинок. Зокрема в [4-5] розглянуто масоперенос забрудненої речовини в кристалічних середовищах частинок мікропористої структури, а в [6-7] розглянуто питання ідентифікації параметрів дифузії речовини в наносередовищі.

В роботі [8] сформовано та досліджено математичну модель сингулярно збуреного процесу конвективної дифузії в двопористому середовищі у випадку переважання конвективних складових процесу над масообмінними та дифузійними його складовими. Ідентифікація дифузійних параметрів такого роду процесів розглянута в [9]. Актуальним залишається питання ідентифікації параметрів масообміну сингулярно збурених задач конвективної дифузії в наносередовищах.

У даній роботі йдеться про асимптотичне розв'язання розв'язків задач типу “конвекція-дифузія-масообмін” у двопористому середовищі, якщо невідомі функція адсорбційної рівноваги та коефіцієнт впливу дифузії в пористих частинках на дифузію в міжчастинковому просторі.

## 2. Загальна постановка задачі

Розглянемо математичну модель однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масопереносу в середовищі частинок мікропористої структури [6] у вигляді:

$$\sigma_1 \frac{\partial c}{\partial t} = \varepsilon D_* \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial c}{\partial x} - \varepsilon d(t) \left( \frac{\partial q}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \quad (1)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial q}{\partial t} = \varepsilon D^* \left( \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$c(x, t) \Big|_{r=0} = c_0^0(x), \quad q(x, r, t) \Big|_{r=0} = q_0^0(x, r), \quad (3)$$

$$c(x, t) \Big|_{x=0} = c_*(t), \quad \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$q(x, r, t) \Big|_{r=R} = k(t) \cdot c(x, t), \quad \frac{\partial q(x, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (5)$$

$$d(t) \int_0^l q(x, R, t) dx = D_*^*(t), \quad k(t) \int_0^l c(x, t) dx = K_*^*(t). \quad (6)$$

Тут  $c(x, t)$  – концентрація розчинної речовини в міжчастинковому просторі в точці  $x$  в момент часу  $t$ ,  $q(x, r, t)$  – концентрація речовини на сфері радіуса  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ) нанопористої частинки з координатою  $x$  в момент часу  $t$ ,  $l$  – товщина середовища (довжина фільтра),  $R$  – радіус частинки,  $v(x)$  – швидкість конвективного перенесення,  $\varepsilon$  – малий параметр ( $v(x) > v_* \gg \varepsilon > 0$ ),  $\sigma_1, \sigma_2$  – коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовища,  $k(t)$  – невідома функція адсорбційної рівноваги. Коефіцієнти  $\varepsilon D^*$  та  $\varepsilon D_*$  відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масопереносу в міжчастинковому просторі та в порах частинок, а невідома функція  $d(t)$  характеризує вплив внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий,  $D_*^*(t)$ ,  $K_*^*(t)$  – функції, що характеризують масовий розподіл речовини з часом (входять в умови перевизначення (6) і знаходяться експериментально, також повинні виконуватись умови  $sign(D_*^*(t)) = sign\left(\int_0^l q(x, R, t) dx\right)$ ,  $sign(K_*^*(t)) = sign\left(\int_0^l c(x, t) dx\right)$ ).

Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (3)-(5) є скрізь достатньо гладкими та узгодженими між собою [8].

### 3. Асимптотика розв'язку.

Розв'язок задачі з точністю  $O(\varepsilon^{n+1})$  шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$c(x, t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i c_i(x, t) + \sum_{p=0}^{n+1} \varepsilon^p \Pi_p(\xi, t) + R_n^1(x, t, \varepsilon), \quad (7)$$

$$q(x, r, t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i q_i(x, r, t) + \sum_{j=0}^{2n+2} \varepsilon^2 F_{\frac{j}{2}}(x, \rho, t) + R_n^2(x, r, t, \varepsilon), \quad (8)$$

$$d(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i d_i(t) + R_n^3(t, \varepsilon), \quad (9)$$

$$k(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i k_i(t) + R_n^4(t, \varepsilon), \quad (10)$$

де  $c_i(x, t)$ ,  $q_i(x, r, t)$ ,  $d_i(t)$ ,  $k_i(t)$  ( $i = \overline{0, n}$ ) – члени відповідних регулярних частин асимптотики,  $\Pi_p(\xi, t)$  ( $p = \overline{0, n+1}$ ) та  $F_{j/2}(x, \rho, t)$  ( $j = \overline{0, 2n+2}$ ) – функції типу примежового шару в околах  $x = l$  і  $r = R$ ,  $\xi = (l-x) \cdot \varepsilon^{-1}$  та  $\rho = (R-r) \cdot \varepsilon^{-1/2}$  – відповідні регуляризуючі перетворення,  $R_n^s(\bullet)$  ( $s = \overline{1, 4}$ ) – залишкові члени [3].

Підставивши (7)-(10) в (1)-(6) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$  [8], отримуємо такі задачі для знаходження регулярних членів асимптотики:

$$\begin{cases} \sigma_2 q_{ii}(x, r, t) = g_i(x, r, t), \\ q_i(x, r, 0) = h_i(x, r), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} v(x) \cdot c_{ix}(x, t) + \sigma_1 c_{it}(x, t) = u_i(x, t), \\ c_i(x, 0) = w_i^1(x), \quad c_i(0, t) = w_i^2(t), \end{cases} \quad (12)$$

$$g_0(x, r, t) = 0, \quad h_0(x, r) = q_0^0(x, r), \quad u_0(x, t) = 0, \quad w_0^1(x) = c_0^0(x), \quad w_0^2(t) = c_*(t),$$

$$g_i(x, r, t) = D^*(q_{(i-1)rr}(x, r, t) + \frac{2}{r} q_{(i-1)m}r(x, r, t)), \quad h_i(x, r) = 0, \quad u_i(x, t) =$$

$$= D_* c_{(i-1)xx}(x, t) - \sum_{m=0}^{i-1} d_m(t) (q_{(i-1-m)r}(x, R, t) + F_{(i-1-m)r}(x, R, t) + \varepsilon^2 F_{(i-\frac{1}{2}-m)r}(x, R, t)),$$

$$w_i^1(x) = 0, \quad w_i^2(t) = 0 \quad \text{при } i = \overline{1, n}.$$

Коефіцієнт впливу дифузії в пористих частинках на дифузію в міжчастинковому просторі та функцію адсорбційної рівноваги знаходимо в процесі розв'язання наступних задач, що отримуються шляхом підстановки рядів (9), (10) в (6) та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $\varepsilon$ :

$$d_i(t) \int_0^l (q_0(x, R, t) + F_0(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx = \chi_i(t), \quad (13)$$

$$k_i(t) \int_0^l (c_0(x,t) + \Pi_0(\xi,t)) dx = \kappa_i(t); \quad (14)$$

$$\chi_0(t) = D^*(t), \quad \kappa_0(t) = K^*(t), \quad \chi_i(t) = -\sum_{m=0}^{i-1} d_m(t) \int_0^l (q_{i-m}(x,R,t) + F_{i-m}(x,0,t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_{i-m+\frac{1}{2}}(x,0,t)) dx, \quad \kappa_i(t) = -\sum_{m=0}^{i-1} k_m(t) \int_0^l (c_{i-m}(x,t) + \Pi_{i-m}(\xi,t)) dx, \quad \text{при } i = \overline{1, n}.$$

Поправки  $\Pi = \sum_{p=0}^{n+1} \varepsilon^p \Pi_p(\xi,t)$  та  $F = \sum_{j=0}^{2n+2} \varepsilon^{\frac{j}{2}} F_{\frac{j}{2}}(x,\rho,t)$  будуються з метою задовольнити відповідно другу з крайових умов (3.4) та умови (3.5). Врахувавши співвідношення  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}$ ,

а також розклад функцій  $v(l - \varepsilon\xi)$  та  $\frac{2}{R - \sqrt{\varepsilon}\rho}$  в ряд Тейлора в околах  $x = l$  та

$r = R$  відповідно, отримуємо задачі для знаходження поправок:

$$\begin{cases} D^* \Pi_{p\xi\xi}(\xi,t) + v(l) \Pi_{p\xi}(\xi,t) = \mu_p(\xi,t), \\ \Pi_{p\xi}(0,t) = v_p(t), \Pi_p(\xi,t) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\mu_0(t, \xi) = 0, \quad v_0(t) = -c_{0\xi}(l,t), \quad \mu_p(\xi,t) = \sigma_1 \Pi_{p-1\xi}(\xi,t) - v'(l) \xi \Pi_{i-1\xi}(t, \xi) - \frac{1}{2} v''(l) \xi^2 \Pi_{i-2\xi}(t, \xi) + \dots + (-1)^i v^{(i)}(l) \xi^i \Pi_{0\xi}(t, \xi) \quad \text{при } p = \overline{1, n+1},$$

$$v_p(t) = -c_{p\xi}(l,t) \text{ при } p = \overline{1, n}, \quad v_{n+1}(t) = 0;$$

$$\begin{cases} D^*(x,t) F_{\frac{j}{2}\rho\rho}(x,\rho,t) - \sigma_2 F_{\frac{j}{2}t}(x,\rho,t) = \gamma_{\frac{j}{2}}(x,\rho,t), \\ F_{\frac{j}{2}}(x,\rho,0) = 0, F_{\frac{j}{2}}(x,0,t) = \lambda_{\frac{j}{2}}(x,t), F_{\frac{j}{2}\rho}(x,\rho,t) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$\gamma_0(x,\rho,t) = 0, \quad \lambda_0(x,t) = k_0(t)(c_0(x,t) + \Pi_0(\xi,t)) - q_0(x,R,t), \quad \gamma_{\frac{j}{2}}(x,\rho,t) =$$

$$= -2D^* \sum_{m=1}^j \frac{\overline{r}^{m-1}}{R^m} F_{\frac{j-m}{2}\rho}(x,\rho,t) \text{ при } j = \overline{0, 2n+2},$$

$$\lambda_{\frac{j}{2}}(x,t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{j}{2}} k_m(t) (c_{\frac{j-m}{2}}(x,t) + \Pi_{\frac{j-m}{2}}(\xi,t)) - q_{\frac{j}{2}}(x,R,t), & \text{при } j \text{ парне,} \\ 0, & \text{при } j \text{ непарне;} \end{cases}$$

$$\lambda_{n+1}(x, t) = k_0(t) \Pi_{n+1}(\xi, t) + \sum_{m=1}^n k_m(t) (c_{n+1-m}(x, t) + \Pi_{n+1-m}(\xi, t)).$$

Розв'язки наведених вище задач мають вигляд:

$$c_0(x, t) = \begin{cases} c_*(\sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x)), t \geq \sigma_1 f(x), \\ c_0^*(f^{-1}(f(x) - \frac{t}{\sigma_1})), t < \sigma_1 f(x), \end{cases}$$

де  $f(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$ ,  $f^{-1}(x)$  – функція, обернена до функції  $f(x)$  стосовно змінної  $x$  [3];

$$\Pi_0(\xi, t) = D_* v^{-1}(l) c_{0\xi}(l, t) e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}};$$

$$k_0(t) = \frac{K_*^*(t)}{\int_0^l (c_0(x, t) + \Pi_0(\xi, t)) dx};$$

$$q_0(x, r, t) = q_0^0(x, r),$$

$$d_0(t) = \frac{D_*^*(t)}{\int_0^l (q_0(x, R, t) + F_0(x, 0, t) + \varepsilon^2 F_{\frac{1}{2}}(x, 0, t)) dx};$$

$$q_1(x, r, t) = \frac{1}{\sigma_2} \int_0^t D^*(q_{0rr}(x, r, \tilde{t}) + \frac{2}{r} q_{0r}(x, r, \tilde{t})) d\tilde{t};$$

$$c_1(x, t) = \begin{cases} \int_0^{\tilde{x}} \frac{u_1(\tilde{x}, \sigma_1(\frac{t}{\sigma_1} - f(x) + f(\tilde{x})))}{v(\tilde{x})} d\tilde{x}, t \geq \sigma_1 f(x), \\ \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t u_1(f^{-1}(\frac{\tilde{t}}{\sigma_1} - \frac{t}{\sigma_1} + f(x)), \tilde{t}) d\tilde{t}, t < \sigma_1 f(x); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(t, \xi) = v^{-1}(l) e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}} (v'(l) c_{0\xi}(t, l) (\frac{\xi^2}{2D_*} + \frac{\xi}{v(l)} + \frac{D_*}{v^2(l)}) - \\ - \sigma_1 v^{-1}(l) c_{0\xi t}(t, l) (\xi + \frac{D_*}{v(l)})); \end{aligned}$$

$$\Pi_2(t, \xi) = \xi^4 e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}} s_1 + \xi^3 e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}} s_2 + \xi^2 e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}} s_3 + \xi e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}} s_4 + s_5,$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{(v'(l))^2}{v(l)D_*^3} c_{0\xi}, \quad s_2 = \left( \frac{v'(l)}{2v(l)D_*} - \frac{\sigma_1}{3v(l)D_*} - 1 \right) \frac{v'(l)}{v(l)D_*} c_{0\xi} - \frac{\sigma_1 v'(l)}{6v^2(l)D_*^2} c_{0\xi t}, \\
s_3 &= \left( \frac{3v'(l)}{v(l)D_*} - 1 \right) \frac{v'(l)}{2v(l)^2} c_{0\xi} - \frac{2\sigma_1 v'(l)}{v^3(l)D_*} c_{0\xi t} + \frac{\sigma_1^2}{2v^3(l)D_*} c_{0\xi t t}, \quad s_4 = \left( -\frac{3v'(l)}{v(l)D_*} - 1 \right) \times \\
&\times \frac{v'(l)}{v(l)^3} c_{0\xi} - \frac{5\sigma_1 v'(l)}{v^4(l)} c_{0\xi t} + \left( \frac{1}{v(l)} - 1 \right) \frac{\sigma_1^2}{v^3(l)} c_{0\xi t t}, \quad s_5 = -\frac{5\sigma_1 v'(l)D_*}{v^5(l)} c_{0\xi t} e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}} - \\
&- \left( \frac{3}{v(l)} + D_* \right) \frac{v'(l)D_*}{v(l)^4} c_{0\xi} e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}} + \left( \frac{1}{v(l)} - 1 \right) \frac{\sigma_1^2 D_*}{v^4(l)} c_{0\xi t t} e^{-\frac{v(l)\xi}{D_*}}; \\
k_1(t) &= -\frac{k_0(t) \int_0^l (c_1(x,t) + \Pi_1(\xi,t)) dx}{\int_0^l (c_0(x,t) + \Pi_0(\xi,t)) dx}; \\
d_1(t) &= -\frac{d_0(t) \int_0^l (q_1(x,R,t) + F_1(x,0,t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_{\frac{3}{2}}(x,0,t)) dx}{\int_0^l (q_0(x,R,t) + F_0(x,0,t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}}(x,0,t)) dx}.
\end{aligned}$$

Поправки  $F_{j/2}(x, \rho, t)$  ( $j = \overline{0,4}$ ) шукаємо числовими методами, наприклад використовуючи неявну кінцево-різницеву схему [9]. Для оцінки залишкових членів маємо задачу, аналогічну до [8].

#### 4. Числові розрахунки.

Наведемо результати комп'ютерного експерименту при  $n=1, \varepsilon=10^{-10}$ ,  $\sigma_1=0.7$ ,  $\sigma_2=0.8$ ,  $l=1$  м,  $R=10^{-5}$  м,  $v(x)=1$  м/год,  $D_*=0.2$  м<sup>2</sup>/с,  $D^*=0.6$  м<sup>2</sup>/с,  $c_0^0(x)=0.125 \cos(\pi x + \pi) + 0.625$  мг/л,  $q_0^0(x,r) = (k(0)c_0^0(x) \times (2/\pi) \arctg(10^7(r-R)) + 1)$  мг/л,  $c_*(t) = (0.25 \cos(2t + \pi) + 0.75)$  мг/л.

На рис.1 зображено графік шуканої функції адсорбційної рівноваги при  $K_*(t)$ . Зокрема крива 1 відповідає функції  $k(t) = k_0(t) + \varepsilon k_1(t)$  при  $K_{*1}^*(t) = 0.3e^{\frac{t}{2}}$ , крива 2 - при  $K_{*2}^*(t) = 0.4 + 0.3 \sin(0.7t - \frac{3\pi}{8})$ , крива 3 - при  $K_{*3}^*(t) = 0.4t + 0.1$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $T=2$  год. Розподіл концентрації  $q(x, r, t)$  розчинної речовини в нанопористій частинці з координатою  $x=0.4$  в момент часу  $t=0.8$  при  $K_*(t) = K_{*1}^*(t)$  (крива 1),  $K_*(t) = K_{*2}^*(t)$  (крива 2),  $K_*(t) = K_{*3}^*(t)$  (крива 3) проілюстровано на рис.2.

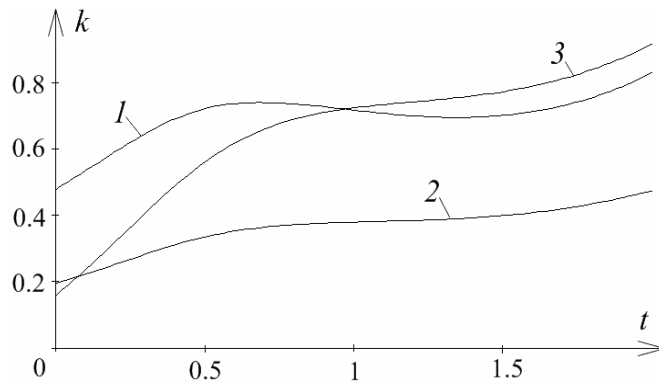


Рис. 1. Вплив  $K_*(t)$  на функцію адсорбційної рівноваги.

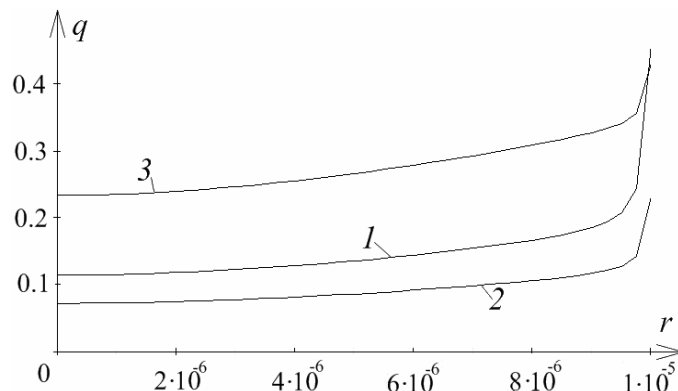


Рис. 2. Розподіл концентрації речовини в нанопористій частинці.

Графік функції впливу внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий при різних значеннях  $D_*(t)$  зображено на рис.3. Тут крива 1

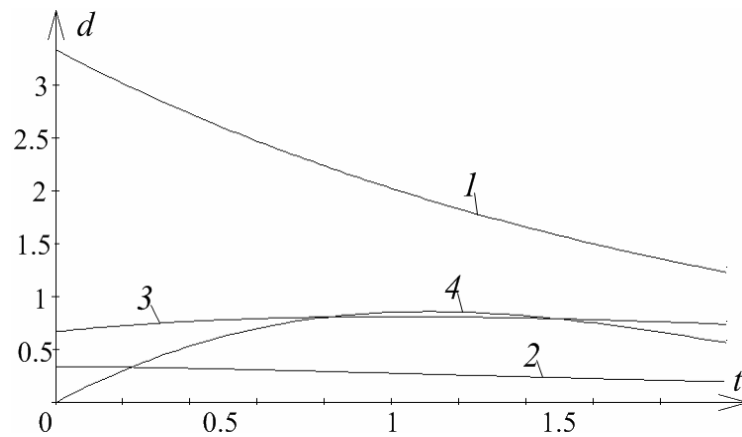


Рис.3. Залежність функції впливу внутрішньочастинкового дифузійного переносу на міжчастинковий від функції  $D_*(t)$ .

відповідає функції  $d(t) = d_0(t) + \varepsilon d_1(t)$  при  $D_{*1}^*(t) = 1$ , крива 2 - при  $D_{*2}^*(t) = 0.1 + 0.05 \ln(t+1)$ , крива 3 - при  $D_{*3}^*(t) = \frac{t+1}{5}$ , крива 4 - при  $D_{*4}^*(t) = 0.5 \sin(t)$  при  $T = 2$  год.

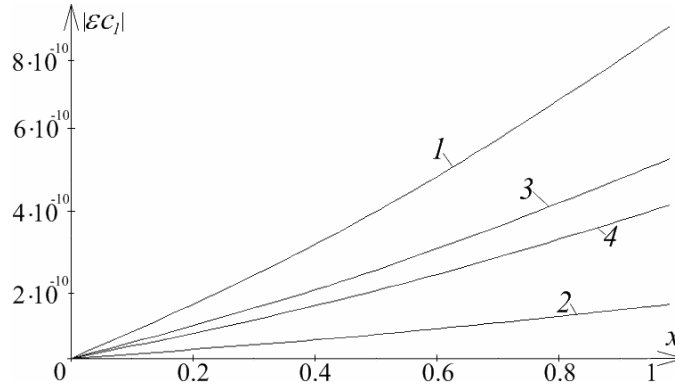


Рис. 4. Розподіл концентрації розчинної речовини в міжчастинковому просторі.

На рис.4 проілюстровано розподіл концентрації  $|\varepsilon c_1(x, t)|$  розчинної речовини в момент часу  $t = 0.8$  при  $D_*^*(t) = D_{*1}^*(t)$  (крива 1),  $D_*^*(t) = D_{*2}^*(t)$  (крива 2),  $D_*^*(t) = D_{*3}^*(t)$  (крива 3),  $D_*^*(t) = D_{*4}^*(t)$  (крива 4).

## 5. Висновки.

Побудовано математичну модель сингулярно збуреного процесу поширення забруднюючої речовини в двопористому середовищі та її нагромадження у нанопористих частинках. Запропонована модель включає можливість визначення невідомих масообмінних коефіцієнтів. Адаптовано асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених крайових задач конвективної дифузії до такого роду обернених задач який можна застосовувати у випадку, коли невідомими є одночасно як коефіцієнти дифузії, так і параметри масообміну процесу конвективної дифузії в двопористому середовищі. В перспективі дослідження такого роду процесів у випадку залежності коефіцієнтів дифузії та масообміну від температури середовища, а також із урахуванням термодифузії.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшко И.И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И.И. Ляшко, Л.И. Демченко, Г.Е. Мистецкий – Київ: Наук. думка, 1991. – 264с.
2. Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло – та масопереносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький – Київ, Наукова думка, 2005, – 282с.
3. Бомба А.Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» / А.Я. Бомба, С.В. Барановський І.М. Присяжнюк – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.



4. Chen N.Y. Molecular Transport and Reaction in Zeolites: Design and Application of Shape Selective Catalysis, V.C.H. Weinheim / N.Y. Chen, T.F. Degnan, M.C. Smith – New York, 1994.
5. Петрик М.Р. Моделирование и анализ концентрационных полей нелинейной конкурентивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частей / М.Р. Петрик, Ж. Фрессард, Д.М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 73-83.
6. Дейнека В. Идентификация кинетических параметров однокомпонентного адсорбционного массопереноса в микропористых каталитических средах / В.С. Дейнека, М.Р. Петрик, Д.М. Михалик // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 12-25.
7. Сергиенко И.В. Идентификация градиентными методами параметров задач диффузии вещества в нанопористой среде / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Пробл. управления и информатики. – 2010. – № 6. – С. 5–18.
8. Бомба А.Я. Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збурених задач процесу масопереносу в різнопористих середовищах / А.Я. Бомба, І.М. Присяжнюк, О.В. Присяжнюк // Доповіді НАН України. – 2013.- № 3. – С. 28-34.
9. Бомба А.Я. Обернені сингулярно збурені задачі процесу масопереносу в різнопористих середовищах / А.Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О.В.Присяжнюк, О.А. Фурсачик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, – 2012. – Вип. 7. – С. 3–11.
10. Бомба А.Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін в умовах неповних даних. / А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк, А.П. Сафоник, О.А. Фурсачик // Монографія. – Рівне: НУВГП, 2011. – 276 с.