

УДК 532.546

Сравнительный анализ двоякопериодических систем заводнения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса

А. Е. Касаткин

Самарский Государственный Университет, Россия

Основной задачей исследования стала разработка программного комплекса для количественного и качественного сравнения различных схем расстановки скважин, применяемых при заводнении. Результаты анализа могут быть использованы при проектировании заводнения реальных месторождений. В основе программного комплекса лежит модель бесконечного однородного пласта фиксированной толщины, поверхность которого покрывается двоякопериодической решеткой с добывающими и нагнетательными скважинами в ячейках. Для описания процесса совместной фильтрации воды и нефти использовалась модифицированная дзета-функция Вейерштрасса.

Ключевые слова: заводнение, двоякопериодическая решетка, дзета-функция Вейерштрасса, граница ВНК, обводнение скважин, коэффициент извлечения нефти.

The main task of that research is a program tool creation to compare waterflooding schemes both of by quantitative and qualitative characteristic: the achieved results may be used to design waterflooding for real oilfields. The program realization is based on the oil keeping reservoir pattern representing a homogeneous formation with fixed thickness and infinite borders and covering by dual periodical lattice: it includes production and injection wells into her cells. The oil-water filtering process is described using by modified Weierstrass dzeta-function.

Key words: waterflooding, dual-periodical lattice, Weierstrass dzeta-function, water oil contact border, drowning, oil extraction coefficient.

1. Введение

Вторичные интенсивные методы добычи нефти в настоящее время сохраняют популярность в нефтяной промышленности: их использование на старых ранее истощенных месторождениях позволяет частично восстановить пластовую энергию и поднять упавшие показатели нефтедобычи, причем порою весьма значительно. Основная идея вторичных методов заключается в закачке в нефтеносный пласт т.н. «вытесняющих агентов» - воды и газа: нагнетаемые с поверхности вещества восстанавливают упавшее пластовое давление, а также вытесняют нефть к добывающим скважинам, повышая уровень нефтеотдачи.

Исторически первым вторичным методом, случайно открытым в середине 1860-х гг. [10], стало Заводнение. Операторами одного из месторождений штата Пенсильвания было обнаружено, что поверхностная вода, просочившаяся в пласт сквозь обшивку ранее отключенных, но не законсервированных скважин, частично восстановила упавшее пластовое давление: в результате объемы извлекаемой нефти в соседних, все еще работавших скважин, возросли, причем в некоторых из них значительно. Замеченный эффект был изучен и впоследствии обрел статус технологии: с 1920-х и 1930-х гг. заводнение начало постепенно распространяться по территории нефтедобывающих штатов

(Оклахома, Канзас, Техас и т.д.)[9]. В СССР новая технология впервые была применена в промышленном масштабе на территории Туймазинского месторождения в 1948 г. [5]. Считается, что к концу XX-началу XXI вв. заводнение обеспечивало 90% всей нефти, добываемой на территории РФ [5], и около 50% «черного золота» в США [9, 10].

2. Актуальность задачи и особенность предлагаемого подхода

Высокая популярность технологии и широкое распространение обуславливают актуальность задач по ее оптимизации, в первую очередь, на стадии проектирования. Планирование разработки месторождения – достаточно трудоемкий процесс, требующий тщательного анализа характеристик нефтеносных пластов, их геометрии, особенности проницаемости и т.д. Не менее значимым является вопрос об оптимальном подборе параметров для применяемой технологии добычи нефти. Ошибки в планировании, неучет важных характеристик пласта, игнорирование особенностей метода извлечения нефти или его недостаточная изученность могут привести к многомиллионным убыткам. При исследовании заводнения весьма важной является оценка его потенциальной эффективности при различных способах взаимной расстановки разнопрофильных скважин – одного из ключевых аспектов технологии. Задачи, занимающиеся подобным теоретическим анализом, остаются актуальными: их решения следует использовать при проектировании системы разработки для реальных месторождений.

Прогнозирование хода заводнения, анализ количественных и качественных характеристик процесса при различных схемах расстановки скважин – цель настоящего исследования.

Соответствующая ей задача заключалась в разработке программного средства для мониторинга границы водонефтяного контакта (ВНК), расширяющейся со временем: для этих целей предполагалось описать и визуально отобразить трассировку нагнетаемой в пласт воды. Работа программы подразумевает сравнительный анализ схем заводнения, качественный и количественный: в качестве выходных данных выступают как графические изображения границы ВНК, построенные для любого этапа процесса вплоть до прорыва воды в добывающие скважины, так и значения числовых критериев, таких как время начала обводнения и Коэффициент Извлечения Нефти (КИН).

Для выполнения основной задачи требовалось построить модель нефтеносного пласта, математически описать фильтрацию жидкостей в нем, представить в виде уравнений процесс трассировки нагнетаемой воды, вытесняющей нефть, и, наконец, разработать алгоритмы для визуального отображения фронта заводнения и подсчета числовых параметров.

Настоящая работа принадлежит к достаточно широко распространенному ряду модельных исследований: являясь исключительно теоретическими, эти задачи рассматривают вопрос о продвижении границы водонефтяного контакта (ВНК), используя при этом т.н. вероятностно-статистическое описание нефтеносного пласта. Кроме того, отличительной особенностью рассматриваемого ряда исследований является допущение об одинаковых физических свойствах воды и нефти – т.н. модель «разноцветных» жидкостей

[3]. Задачи, решаемые в подобной постановке, имеют давнюю историю. Одним из первых ими занялся Маскет [8]: приняв равными вязкости фильтрующихся жидкостей, исследователь поставил и аналитически решил задачи о продвижении линейного водяного фронта (моделирующего действие законтурной краевой воды), а также о течении воды между нагнетательной и добывающей скважиной в бесконечном однородном плоском резервуаре. В своей работе Чарный [11] также изучал вопрос о продвижении фильтрующихся частиц в одножидкостной среде: автором были приведены как формулы для определения координат частиц (решением обыкновенного дифф. уравнения с известной функцией скорости), так и рассмотрены задачи линейного и радиального вытеснения нефти водой в резервуаре с постоянной мощностью, проницаемостью и пористостью. Также следует отметить реализованную исследователем идею о трубках тока, моделирующих проводящие водонефтяные каналы в пористой структуре пласта: указанное представление также использовалось И.А.Чарным в задаче о продвижении частиц в одножидкостной среде. Линейное и радиальное течение однородной жидкости также рассматривалось В.Н. Щелкачевым и Б.Б. Лапуком [13]: исследуя поток при водонапорном режиме, авторы аналитически вывели простые формулы для расчета таких показателей процесса фильтрации, как расход вещества, давление, градиент давления и скорость, а также продемонстрировали общее свойство гидродинамического поля – ортогональность линий тока и кривых постоянного давления (изобар). Наконец, задача о продвижении границы ВНК при площадном заводнении с допущением равенства динамических вязкостей воды и нефти решалась С.Файем и М.Пратсом [14], а также Р.Коллинзом [6]: в качестве объекта исследования авторами была выбрана пятиточечная схема расстановки скважин.

В настоящей работе предлагается решение задачи о продвижении границы ВНК для равных вязкостей нефти и воды, но с большим разнообразием форм моделируемого резервуара: особенностью исследования является применение двоякопериодических функций, позволяющих анализировать многочисленные схемы заводнения с сохранением простоты представлений скорости и давления, остающихся аналитическими.

3. Математическая модель

Построение модели нефтеносного пласта, выделение особенностей геометрии и задание границ – первый этап в создании представления о совместном течении воды и нефти на участке, подверженном заводнению. При этом следует помнить об использованном вероятностно-статистическом описании резервуара [5], при котором не учитывается реальная физико-геологическая структура, индивидуальная для каждого месторождения, а все характеристики породы (пористость, проницаемость и т.д.) усредняются. Как известно, в нефтяной промышленности используются несколько вторичных методов добычи, разделяемых по разным признакам. В частности, выделяют рядные и площадные схемы заводнения, особенности которых определяют их применение на тех или иных участках разработки. Так, рядные модели обладают большей устойчивостью к отказам в работе скважин и оказывают более равномерное

воздействие на месторождение, однако площадные, обладающие меньшей зоной охвата, учитывают больше деталей в строении пласта и позволяют распределить влияние заводнения по его (пласта) участкам наиболее рационально за счет своей «компактности» [5]. С развитием практики и теории нефтедобычи актуальными становятся вопросы повышения эффективности тех или иных методов: так, некоторыми авторами [4] предлагаются меры по повышению интенсивности разработки за счет видоизменения схем заводнения, что увеличивает их возможное число. Тем не менее, можно выделить общее качество, объединяющее все виды этих моделей: независимо от их сложности и направленности, при использовании всякой схемы расстановки скважин последние размещаются на месторождении в определенном порядке. Этот порядок обеспечивает периодичность во взаимном расположении скважин: при взгляде «сверху» пласт словно покрывается сеткой из ячеек – повторяющихся элементов у схем заводнения (рис.3.1).

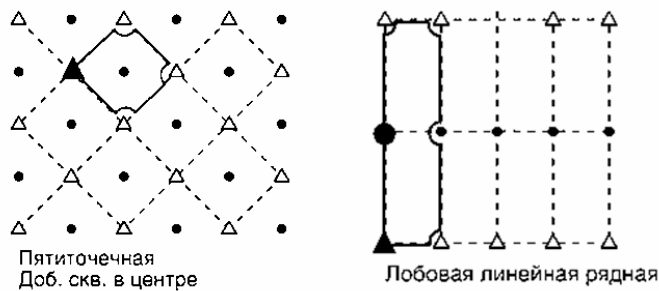


Рис.3.1. Пример площадной (слева) и рядной (справа) схем заводнения: добывающие скважины обозначены кружками, нагнетательные – треугольниками. Жирные контуры выделяют повторяющиеся элементы во взаимном расположении скважин – эти же элементы можно представить ячейками воображаемой сетки, покрывающей месторождение.

Итак, после ознакомления с особенностями рассматриваемого метода нефтедобычи можно перейти к моделированию системы разработки воображаемого месторождения: в рамках настоящей задачи нефтесодержащий пласт представляется однородным, фиксированной толщины, имеющим вид плоскости в комплексных координатах, покрываемой сеткой из добывающих и нагнетательных скважин. Для описания последней (сетки) математический аппарат располагает специальным средством – это т.н. двоякопериодическая решетка [1,2]. На рис. 3.2 показан фрагмент указанной структуры с выделенной ячейкой.

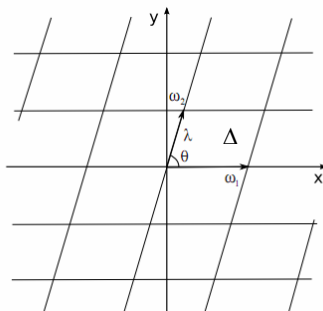


Рис.3.2. Фрагмент двоякопериодической решетки L канонической формы (одна из осей направлена вдоль OX). Типичная ячейка, образованная векторами ω_1 и ω_2 , имеет вид параллелограмма.

Как видно из изображения решетка L формируется набором узлов, образуемых векторами ω_1 и ω_2 . На рис. представлен т.н. «канонический» случай, при котором ω_1 совпадает с горизонтальной осью, а ω_2 описывается следующим образом: $\omega_2 = \lambda e^{i\theta}$. Здесь λ представляет длину второго вектора ω_2 , θ – угол, образуемый ω_2 с осью OX , а Δ соответствует площади ячейки, имеющей вид параллелограмма. Отдельно следует указать вид узлов ω , задающих решетку: $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n \in \mathbb{Z}$). Благодаря использованию L и бесконечности границ пласта область исследования может быть сужена до одной ячейки, процессы в которой дублируются в ее соседях. В то же время указанное свойство решетки накладывает определенные ограничения на поведение определяемых на ней функций, а именно – соблюдение двоякой периодичности.

Подобное выражение для скорости фильтрации было описано в работе [1,2], в которой использовалась двоякопериодическая решетка с одиночной добывающей скважиной в ячейке. Соответствующая ей формула представлена ниже:

$$v(z, \bar{z}) = -\frac{Q}{2\pi h} (\overline{\zeta(z)} + \alpha \bar{z} - \beta z). \quad (3.1)$$

Здесь $\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$ - дзета-функция Вейерштрасса [1,2];

$\beta = \frac{\pi}{\Delta}$ и $\alpha = \frac{\beta \bar{\omega} - 2\zeta(\omega/2)}{\omega}$ - числовые параметры; Δ - площадь ячейки; Q - мощность добывающей скважины, h - толщина пласта, ω - узел решетки L ($\omega = m\omega_1 + n\omega_2/m, n \in \mathbb{Z}$) [1,2]. Важно отметить, что именно величины α и β обеспечивают двоякопериодичность функции $v(z, \bar{z})$. Таким образом, выражение (3.1) может быть использовано для описания течения жидкости в открытом нефтеносном пласте толщины h , разрабатываемом системой добывающих скважин одинаковой мощности Q : последние располагаются в узлах покрывающей месторождение двоякопериодической решетки L .

Линейный характер формулы (3.1) позволяет легко обобщить ее на случай размещения нескольких скважин в одной ячейке. Кроме того, рассматриваемое выражение для скорости $v(z, \bar{z})$ также позволяет учесть направленность работы скважин: добывающие отмечаются знаком «минус» перед соответствующим им слагаемым, нагнетательные – знаком «плюс». Формула (3.2) демонстрирует итоговый вид функции скорости, принятый в решаемой задаче после всех указанных модификаций выражения (3.1):

$$v(z, \bar{z}) = -\sum_{u=1}^{n_1} \frac{Q_u^{(prod)}}{2\pi} (\zeta(z - z_u, \bar{z} - \bar{z}_u) + a\overline{(z - z_u)} - \beta(z - z_u)) + \sum_{w=1}^{n_2} \frac{Q_w^{(inject)}}{2\pi} (\zeta(z - z_w, \bar{z} - \bar{z}_w) + a\overline{(z - z_w)} - \beta(z - z_w)). \quad (3.2)$$

Здесь n_1 и n_2 – число добывающих (мощности Q_u) и нагнетательных (мощности Q_w) скважин соответственно, размещенных в точках z_u и z_w (u и w – индексы сумм).

4. Методика решения

В ходе рассуждений, описанных в предыдущем разделе, было построено представление о совместном течении нефти и воды в нефтеносном пласте, необходимое для постановки задачи о движении границы ВНК во времени. Результатом стала математическая модель плоского фильтрационного течения в резервуаре, разрабатываемом двоякопериодической системой нагнетательных и добывающих скважин, размещенных в соответствии с определенной схемой заводнения. С завершением подготовительного этапа решения можно приступить к следующей стадии – формулированию уравнений, описывающих движение границы ВНК во времени. Здесь следует отметить использованную в работе т.н. «поршневу» модель вытеснения нефти водой, продемонстрированную в [13]: согласно указанному представлению граница ВНК изображается в виде кривой нулевой толщины. Таким образом, область смешанных жидкостей, образующаяся на краю фронта заводнения, не учитывается, в отличие от двухфазной модели. Сделанное допущение заметно упростило решение задачи о движении границы ВНК: последняя совпадает с внешним контуром заводненного участка, который описывается трассировкой нагнетаемой воды. Ниже представлена система для построения следа (или траектории) одной выделенной частицы жидкости в пласте:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} &= v(z); \\ z_{t=0} &= z_0 + r_w e^{i\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Здесь m – пористость пласта, z_0 – центр призабойной зоны радиуса r_w нагнетательной скважины, сквозь которую в месторождение поступает вода. Выражение для $v(z)$ совпадает с формулой (3.2). Угол θ используется для построения кривых движения воды: изменяя значение θ в диапазоне $[0, 2\pi)$, можно перемещаться вдоль края ствола нагнетательной скважины, от одной траектории течения к другой, а величина $\Delta\theta$ определяет их (траекторий) суммарное число.

Наращивая параметр θ с шагом $\Delta\theta$, можно построить несколько решений задач Коши, аналогичных (4.1): объединение траекторий течения и образует искомую заводненную область, граница которого совпадает с границей ВНК в выбранный момент времени. Рис. 4.1 демонстрирует описанную выше технику решения.



Рис.4.1. Схема построения границы ВНК путем объединения нескольких трассеров: каждая траектория течения соответствует решению одной задачи Коши (4.1).

В качестве переменной интегрирования удобно ввести т.н. безразмерное время τ , связанное с реальным t следующим соотношением: $\tau = mQt / h|\omega_1^2|$. Для решения системы (4.1) использовались методы Рунге-Кутты, измененные с учетом комплексной природы переменных, входящих в уравнения.

5. Результаты расчетов

Ниже представлен ряд картин фронта заводнения, полученных при обработке схем из рис.3.1: круги соответствуют добывающим скважинам, а треугольники – нагнетательным. Для удобства местоположение «притоков» (нагнетательных скважин) дополнительно отмечено перекрестием черных сплошных линий. На рис.5.1 представлены картины течения закачиваемой в пласт воды, построенные для пятиточечной и однорядной линейной схем расстановки скважин. Первый ряд изображений демонстрирует движение линий тока, вдоль которых осуществлялось интегрирование. Ниже расположены «снимки» заводненной области для каждой схемы в момент прорыва воды в добывающие скважины: время начала обводнения указано в единицах безразмерной величины τ .

Результаты для этих и нескольких других схем заводнения качественно сравнивались с изображениями, полученными другими авторами: при этом рассматривались как исключительно модельные расчеты [12], так и итоги экспериментов, проводимых с целью изучения характера совместного течения воды и нефти [8]. Следует отметить качественное совпадение результатов, полученных в настоящей работе, с изображениями из обоих типов источников. Также было замечено удовлетворительное соответствие наблюдаемого течения с его описанием в других работах [7]: нагнетаемая вода с началом процесса распространяется по пласту радиально, после чего ее траектории искривляются, образуя мысы, направленные в сторону добывающих скважин. Подобное поведение придает своеобразие картинам заводненной области: к моменту начала обводнения граница ВНК имеет характерные изгибы, размещенные

между «водными языками», протянутыми к добывающим скважинам. Рис. 5.1 наглядно демонстрирует описанный характер течения.

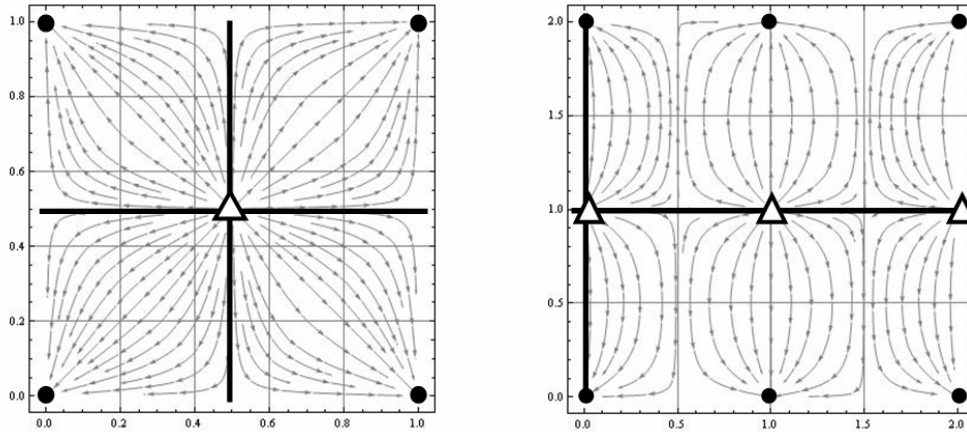


Схема линий тока

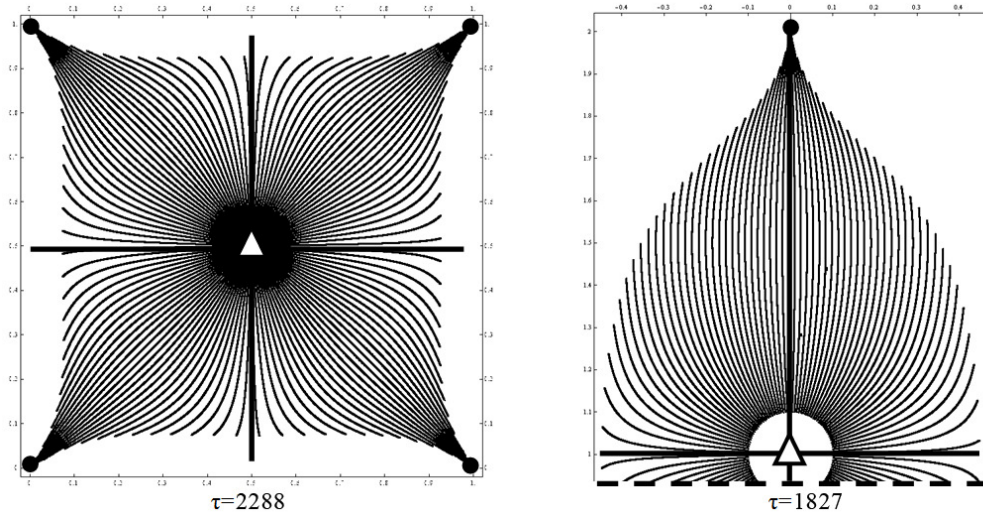


Рис.5.1. Картины фронта заводнения, построенные для пятиточечной (левый столбец рисунков) и однорядной линейной (правый столбец рисунков) схем расстановки скважин. Значения τ отражают момент прорыва воды в добывающие скважины. Траектории движения жидкости обозначены кривыми, направленными от нагнетательных (треугольники) скважин к добывающим (кружки).

Оценочный потенциал программного комплекса, создаваемого в рамках решения задачи, включает как качественный, так и количественный аспект сравнения. При использовании разрабатываемого программного средства возможен сравнительный анализ различных схем заводнения, включая как визуальную, так и строго числовую оценку их эффективности. При этом в качестве числовых критериев в настоящий момент приняты *время начала обводнения добывающих скважин*, после которого нагнетание воды следует

прекратить¹, а также коэффициент извлечения нефти². Учет первого параметра осуществлялся с помощью введенного ранее безразмерного времени τ . Для подсчета КИНа использовалось свойство гладкости границы ВНК, сохраняющейся вплоть до момента прорыва воды в добывающие скважины: заводненный участок аппроксимировался набором выпуклых четырехугольников, площади которых далее рассчитывались с помощью формул векторного произведения, как показано на рис.5.2. На изображении представлен четырехугольник $Z_{i,k} Z_{i+1,k} Z_{i+1,k+1} Z_{i,k+1}$ площади S , построенный на точках – «следах», оставленных водой в процессе трассировки в моменты времени t_k и t_{k+1} . Разбивая полученную фигуру на два образующих ее треугольника, можно вычислить значение S по предлагаемой формуле, обведенной в рамку.

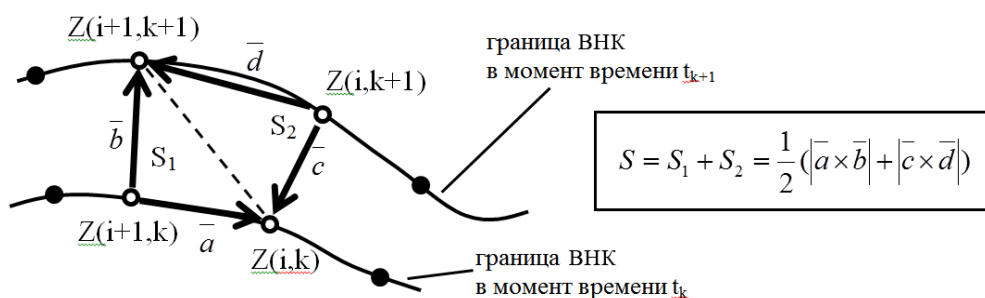


Рис.5.2. Схема вычисления площади S четырехугольника, построенного на «следах» трассеров в соседние моменты времени.

Ниже представлен пример сравнения нескольких широко известных схем заводнения с использованием вышеуказанных количественных критериев. На Рис.5.3 изображена граница ВНК для пятиточечной (а), семиточечной (б), девятиточечной (в) и лобовой рядной (г) схем в момент прорыва воды в добывающие скважины: обратите внимание на значения времени τ .

¹ В рамках настоящей модели предполагается, что в последующий водный период [5] разработки объемы извлекаемой нефти будут незначительными, ввиду чего дальнейшая эксплуатация скважин - нерентабельна.

² КИН представляет собой площадь, занятую водой и взятую по отношению к общей площади исследуемого участка, и используется для оценки не извлекаемых нефтяных запасов [10].

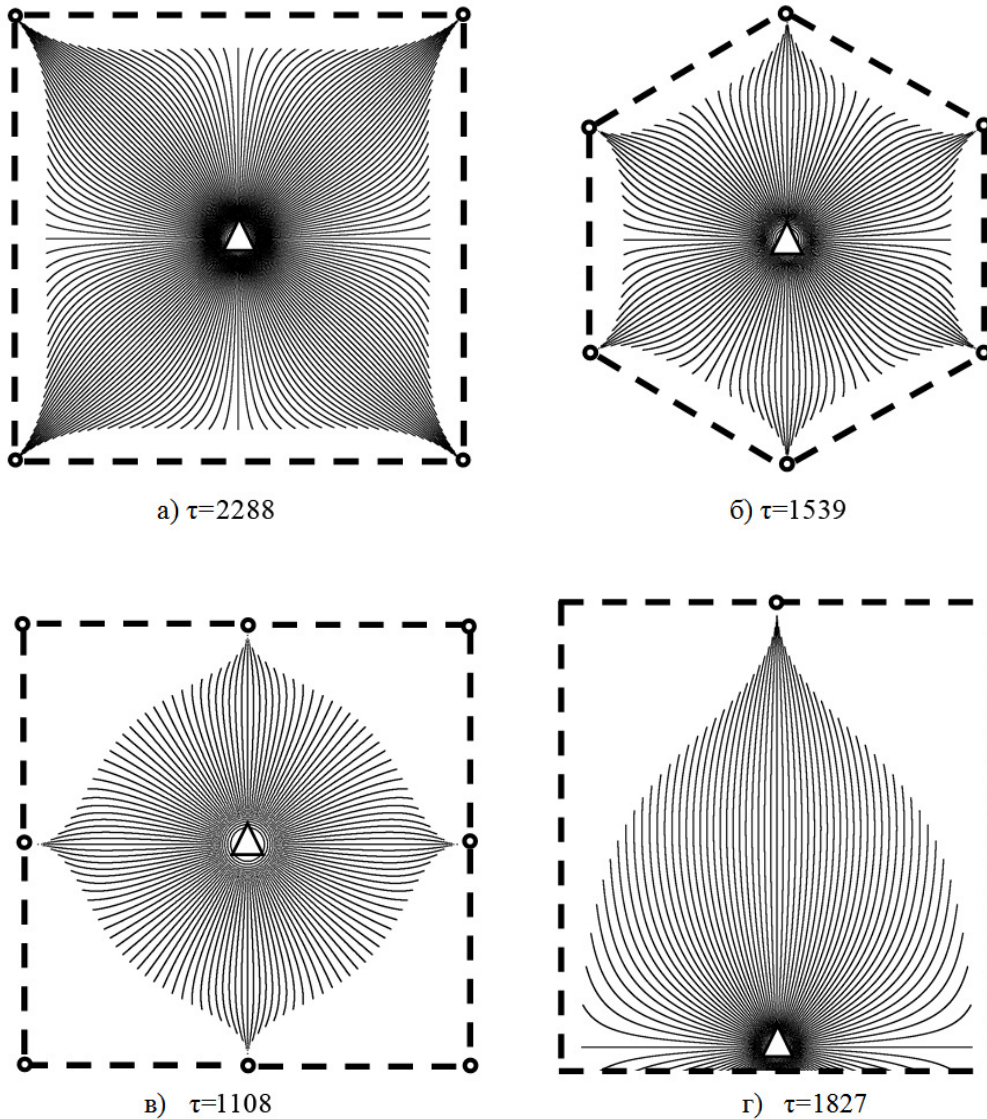


Рис.5.3. Сравнительный анализ времени прорыва τ : жирный пунктир очерчивает элементы схем заводнения (для лобовой рядной – половину элемента); траектории движения воды обозначены кривыми, направленными от нагнетательных скважин (треугольники) к добывающим (кружки).

В таблице 1 внизу собраны значения КИНа, полученные для схем заводнения (а) – (г) в рамках численного счета: для сравнения результатов была добавлена колонка с данными, полученными при анализе графиков из монографии Ф.Ф.Крэйга [7].

Таблиця 1. Результати вычисления КИИНа для схем заводнения (а)-(г)

Схема размещения скважин	КИИ (результаты расчетов)	КИИ (данные Ф.Ф.Крэйга)
Пятиточечная	71%	70%
Семиточечная	74%	73%
Девятиточечная	55%	55%
Лобовая рядная	57%	58%

6. Выводы и направления развития исследования

В ходе исследования были последовательно решены все поставленные задачи: результатом проделанной работы стало программное средство, позволяющее проводить качественный и количественный анализ совместного течения нефти и воды при различных схемах расстановки добывающих и нагнетательных скважин. В качестве выходных данных программы можно отметить как графические материалы – картины заводненной области, так и значения числовых характеристик – время начала обводнения и Коэффициент Извлечения Нефти. При этом объектом исследования в программе является выбранная конфигурация скважин в одном элементе, ее геометрия, соотношение мощностей источников и стоков (термины гидромеханики) и т.д. В результате проводимых теоретических сравнений возможно выявление слабых и сильных сторон различных систем заводнения: данные анализа могут применяться при проектировании разработки реальных месторождений в качестве рекомендаций к выбору схемы расстановки скважин из числа возможных вариантов. Известно, что при планировании нефтедобычи с помощью вторичных методов весьма существенную роль играет предварительный анализ состояния пласта и степени его истощенности: во многом свойства участка разработки, его геометрия и геофизические особенности породы, изучаемые на первом этапе проектирования, определяют границы выбора схем расстановки скважин. Однако на следующей стадии планирования необходима сравнительная оценка возможных систем заводнения, устанавливающая, прежде всего, рентабельность и экономическую оправданность того или иного решения. Именно на этом этапе возможно использование выходных данных предлагаемого решения: проанализировав вероятное поведение фронта заводнения при различных возможных конфигурациях добывающих и нагнетательных скважин, инженер-проектировщик может дополнить этими данными выводы, полученные при исследовании свойств пласта, что, в конечном итоге, позволит построить наиболее оптимальную систему разработки для конкретного месторождения.

Несмотря на разрешение основной задачи, настоящее исследование располагает значительным потенциалом для дальнейшего развития: основным направлением модернизации может стать усложнение модели с целью учета большего числа деталей, проявляющихся при заводнении реальных месторождений. Наиболее существенным путем развития для предлагаемого решения можно указать учет различий в вязкости фильтрующихся жидкостей. Кроме того, в дальнейшем построенная модель может быть обобщена на случай

непостоянства дебитов добывающих и нагнетательных скважин, что также приблизит предлагаемое представление к реалиям нефтедобытчиков.

(Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-97008-р_поволжье_a)

ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин. // Вестник СамГУ. – 2010. - Т78, №4. – С.5-11.
2. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин. 2. Коэффициент продуктивности. // Вестник СамГУ. – 2011. – Т89, №8. – С.118-127.
3. Герольд С.П. Аналитические основы добычи нефти, газа и воды из скважин. – М.-Л.: Нефтеиздат, 1932.
4. Горбатилов В.А., Костюченко С.В., Пальянов А.П. Технология дискретных закачек - основа для модернизации систем пзд и совершенствования методов заводнения нефтяных залежей. // Вестник инженерингового центра ЮКОС. – 2001. – №2. – С. 45-53.
5. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений: Учеб. для вузов. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: ОАО Издательство Недр, 1998. – 465 с.
6. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1964. – 350 с.
7. Крэйг Ф.Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении. – Даллас, 1971. Пер. с англ. под ред. проф. В.Л. Данилова. – М.: Недр, 1974. – 192 с.
8. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер. с англ. – М.: Гостоптехиздат, 1949. – 628 с.
9. Уиллхайт Г. Пол. Заводнение пластов. – М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2009. – 788 с.
10. Уолкотт Д. Разработка и управление месторождениями при заводнении. – М, 2001. – 144 с.
11. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.
12. Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г., Якобовский М.В. Моделирование процессов нефтедобычи на многопроцессорных вычислительных системах. – МСЦ РАН, 2001.
13. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика: учебное пособие для студентов нефтегаз. спец-ней. – М., Ижевск: РХД, 2001. – 675 с.
14. Fay C.H., Prats M. The Application of Numerical Methods to Cycling and Flooding Problems // Proc. Third World Petr. Congress, Sect. II, 1951. – P. 555-562.