

УДК 539.3

Моделирование взаимодействия гармонических P - и SV - волн с периодической системой криволинейных разрезов

А. М. Назаренко

Сумский государственный университет, Украина

Исследованы плоские задачи дифракции гармонических волн на периодических системах криволинейных разрезов типа трещин и тонких жестких вставок. С помощью построенных интегральных представлений амплитуд перемещений отраженного волнового поля краевые задачи сведены к системам сингулярных интегральных уравнений, которые решаются численно. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния вблизи вершин разрезов.

Ключевые слова: дифракция, периодическая система, криволинейные разрезы, сингулярные интегральные уравнения, численная реализация.

Досліджуються плоскі задачі дифракції гармонічних хвиль на періодичній системі криволінійних розрізів типу тріщин і тонких жорстких вставок. За допомогою побудованих інтегральних подань амплітуд переміщень відбитого хвильового поля краєві задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь, які розв'язуються чисельно. Проведено аналіз напружено-деформованого стану в околі вершин розрізів.

Ключові слова: дифракція, періодична система, криволінійні розрізи, сингулярні інтегральні рівняння, чисельна реалізація.

It was investigated the diffraction plane harmonic waves in periodic systems of curvilinear sections such as cracks and thin, rigid inserts. Boundary problems were reduced to systems of singular integral equations solved numerically, using built integral representations of the amplitudes of the reflected wave field. The analysis of the stress-strain state near the tops of cuts was performed.

Key words: diffraction, periodic system, curved sections, singular integral equations, additional conditions, numerical experiment.

1. Введение

Часто при изготовлении и эксплуатации элементов конструкций, используемых в технике и строительстве, в них возникают дефекты, ориентированные вдоль одной линии (сварные швы, ряды трещин или заклепок). Наличие дефектов при действии статических или динамических нагрузок приводит к сложному напряженно-деформированному состоянию. Для его изучения конечную систему дефектов удобно аппроксимировать бесконечной периодической системой, что дает возможность получить достаточно точные результаты [1, 2] и существенно упростить задачу. При анализе прочностных характеристик таких конструкций представляет интерес исследование взаимодействия гармонических упругих волн с периодической системой криволинейных разрезов типа трещин или тонких жестких вставок.

Одним из наиболее распространенных и эффективных методов исследования волновых полей в среднечастотном диапазоне волн является метод интегральных уравнений. Этим методом в [3, 4] изучена дифракция плоских гармонических волн на двух произвольно ориентированных линейных трещинах. Взаимодействие упругих волн с системой трещин и тонких жестких

включений рассмотрено также в [5–7]. Детальный обзор литературы относительно решения динамических задач для тел с трещинами приведен в [8].

Преимущества метода интегральных уравнений заключаются в сокращении числа пространственных переменных, достаточно высокой скорости сходимости численных методов, возможности привлечения эффективных параллельных вычислительных систем [1, 2]. Поэтому этот метод широко используется также при решении периодических задач дифракции. В [9, 10] исследована задача прохождения волнового поля сквозь периодическую систему прямоугольных отверстий в случае длин волн больших за период решетки. Здесь в [9] численно решается возникающая система интегральных уравнений, в [10] с помощью одномодовой аппроксимации получены аналитические выражения для коэффициентов прохождения и отражения волнового поля. Сравнение результатов полученных двумя способами, свидетельствует об эффективности метода интегральных уравнений и в низкочастотном диапазоне волн. В данной работе развивается подход, предложенный в [11] и использованный в [12], который заключается в построении интегральных представлений амплитуд перемещений отраженного волнового поля, автоматически удовлетворяющих уравнения движения и обеспечивающих необходимые скачки напряжений (1-я краевая задача) и перемещений (2-я краевая задача) на контурах периодической системы криволинейных разрезов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неограниченное упругое изотропное пространство с плотностью ρ и коэффициентами Ламе λ и μ , которое содержит $2d$ – периодическую вдоль оси Ox_1 систему криволинейных разрезов $L_j \equiv L(\text{mod } 2d)$. Будем считать, что L_j – простые разомкнутые дуги типа Ляпунова. Разрезы могут быть трещинами, поверхности которых свободны от сил, или тонкими жесткими вставками, массой которых можно пренебречь. Пусть на периодическую структуру набегают монохроматическая волна расширения-сжатия (P - случай)

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1 x_2}, \gamma_1 = \omega/c_1, \tau_1 = \text{const} \quad (1)$$

или сдвига (SV - случай)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2 x_2}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2 = \omega/c_2, \tau_2 = \text{const} \quad (2)$$

Здесь c_1 и c_2 - скорости продольной и поперечной волн, ω – частота колебаний, зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$ ($i^2 = -1$).

В результате взаимодействия падающей волны с периодической решеткой криволинейных разрезов возникают отраженные продольные и поперечные волны. Следуя принципу суперпозиции, общее поле амплитуд перемещений U_k и компонент тензора амплитуд напряжений σ_{mn} будем представлять как сумму падающего и отраженного полей:

$$U_k = U_k^{(0)} + U_k^{(1)}, \sigma_{mn} = \sigma_{mn}^{(0)} + \sigma_{mn}^{(1)}, k, m, n = 1, 2, \quad (3)$$

причем амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений формулами

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial z} + \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial \bar{z}} \right), \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad (4)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -4\mu \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial z}, \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = -4\mu \frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial \bar{z}}.$$

Отраженное волновое поле перемещений $\mathbf{U}^{(1)} = (U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$ должно удовлетворять условиям излучения на бесконечности и уравнению движения Ламе [13]

$$\mu \Delta \mathbf{U}^{(1)} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{U}^{(1)} + \rho \omega^2 \mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{f} = 0 \quad (5)$$

при $\mathbf{f} = 0$. На берегах криволинейных разрезов должны быть выполнены граничные условия соответствующих краевых задач.

В случае первой краевой задачи на берегах трещин-разрезов необходимо выполнить условия равенства нулю главного вектора амплитуд напряжений $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(0)} + \mathbf{S}^{(1)}$:

$$(S_k^{(0)} + S_k^{(1)})^\pm = 0, \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

Здесь амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений $\mathbf{S} = (S_1, S_2)'$ на L выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений:

$$2i(S_1 + iS_2) = (\sigma_{11} + \sigma_{22})e^{i\varphi_0} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12})e^{-i\varphi_0}, \quad (7)$$

$$-2i(S_1 - iS_2) = (\sigma_{11} + \sigma_{22})e^{-i\varphi_0} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})e^{i\varphi_0},$$

где φ_0 - угол между касательной к L в точке $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ и осью Ox_1 .

В случае второй краевой задачи граничные условия на берегах тонких жестких вставок задаются, исходя из уравнений движения абсолютно жесткого тела. Они имеют вид:

$$(U_1^{(0)} + U_1^{(1)})^\pm = \beta_1 - \omega_0 \eta_0, \quad (U_2^{(0)} + U_2^{(1)})^\pm = \beta_2 + \omega_0 \xi_0, \quad (8)$$

где β_1 , β_2 и ω_0 - амплитуды поступательного движения и жесткого поворота вставки L ; верхний знак соответствует левому берегу L при движении от начала a к концу b .

3. Периодические функции источника динамической и статической задач и соответствующие матрицы Грина

При построении интегральных представлений амплитуд перемещений отраженного волнового поля первой и второй краевой задач возникает необходимость в построении фундаментальных периодических решений уравнения Ламе (5) и приведении их к виду, обеспечивающему эффективный алгоритм численной реализации.

Рассмотрим два вспомогательных состояния системы, которым соответствуют волновые поля периодической системы гармонических сил, сосредоточенных в точках $(\xi + 2jd, \eta) \in L_j$ ($j = 0, \pm 1, \dots$) и направленных вдоль оси Ox_1 (1-е состояние) или вдоль оси Ox_2 (2-е состояние). В случае k -го состояния ($k=1, 2$) положим в уравнении (5) компоненты вектора \mathbf{f} равными:

$$f_{km} = F\delta_{km}, \quad F = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2jd, y), \quad x = x_1 - \xi, \quad y = x_2 - \eta, \quad (9)$$

где $\delta(x, y)$ - дельта-функция Дирака, δ_{km} - символ Кронекера ($k, m = 1, 2$)

Амплитуды перемещений 1-го и 2-го состояний образуют матрицу Грина динамической задачи. Ее компоненты u_{km} являются решениями уравнений Ламе (5) в случае (9). Они определяются соотношениями ($k, m = 1, 2$)

$$u_{kk} = \mu \frac{\partial^2 G}{\partial x_k^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 G}{\partial x_m^2} + \rho\omega^2 G, \quad u_{km} = -(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad m \neq k, \quad (10)$$

$$(\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)G = -cF, \quad c = \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)}.$$

Фундаментальное решение $G = G(x, y)$ биволнового уравнения (10) выражается через фундаментальные решения уравнений Гельмгольца:

$$G = \frac{G_1 - G_2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, \quad (\Delta + \gamma_k^2)G_k = -cF, \quad G_k = -\frac{c}{2d} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta_k |y|} \cos \alpha_j x}{\beta_k (1 + \delta_{j0})}, \quad (11)$$

$$\alpha_j = \frac{\pi j}{d}, \quad \beta_k = \sqrt{\alpha_j^2 - \gamma_k^2}, \quad \alpha_j > \gamma_k, \quad \beta_k = -i\sqrt{\gamma_k^2 - \alpha_j^2}, \quad \alpha_j < \gamma_k.$$

При указанном в (11) выборе знаков для β_k ($k = 1, 2$) волновое поле, порождаемое периодической системой источников, носит характер расходящихся волн, что соответствует условиям излучения на бесконечности.

Если известна периодическая функция источника G , то компоненты матрицы Грина могут быть найдены согласно (10). Анализ возникающих здесь рядов показывает, что u_{12} и u_{21} непрерывны в точке приложения сосредоточенной силы, а u_{11} и u_{22} имеют логарифмическую особенность. Для построения эффективного численного алгоритма фундаментальное решение (11) представим в виде $G = G^0 + (G - G^0)$, где G^0 - фундаментальное решение статической задачи ($\omega = 0$), т.е. бигармонического уравнения $\Delta^2 G^0 = -cF$. Оно имеет вид

$$G^0 = \frac{c}{4d} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_j^3} + \frac{|y|}{\alpha_j^2} \right) e^{-\alpha_j |y|} \cos \alpha_j x + \frac{1}{6} |y|^3 \right\}. \quad (12)$$

В случае $\omega = 0$ из (10) получаем такую матрицу Грина статической задачи:

$$u_{kk}^0 = \frac{c_0}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{\alpha_j} + (-1)^k |y| \right) e^{-\alpha_j |y|} \cos \alpha_j x - \frac{\chi - (-1)^k}{2} |y| \right\}, \quad k = 1, 2, \quad (13)$$

$$u_{21}^0 = u_{12}^0 = \frac{c_0}{2} y \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\alpha_j |y|} \sin \alpha_j x, \quad c_0 = \frac{c(\lambda + \mu)}{2d},$$

где $\chi = 3 - 4\nu$, ν - коэффициент Пуассона среды.

Ряды, присутствующие в (13), можно просуммировать. Тогда получим:

$$u_{kk}^0 = -\frac{c_0 d}{2} \left\{ \frac{\chi}{\pi} \operatorname{Re}(\ln(\sin \nu)) + (-1)^k \frac{y}{2d} \operatorname{Im}(\operatorname{ctg}(\nu)) + \chi \frac{\ln 2}{\pi} \right\}, \quad (14)$$

$$u_{21}^0 = u_{12}^0 = \frac{c_0 d}{2} \left\{ \frac{y}{2d} \operatorname{Re}(\operatorname{ctg} \nu) \right\}, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \nu = \frac{\pi(z - \zeta)}{2d}.$$

Как и следовало ожидать, в точке приложения сосредоточенного источника ($z = \zeta$) компоненты u_{12}^0 и u_{21}^0 непрерывны, а u_{11}^0 и u_{22}^0 имеют логарифмическую особенность. Теперь можно использовать следующие представления компонент матрицы Грина динамической задачи ($k, m = 1, 2$):

$$u_{km} = u_{km}^0 + (u_{km} - u_{km}^0), \quad u_{kk} - u_{kk}^0 = \quad (15)$$

$$= c_0 \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_j^2}{\beta_k} e^{-\beta_k |y|} - \beta_m e^{-\beta_m |y|} - \frac{\chi}{\alpha_j} + (-1)^k |y| e^{-\alpha_j |y|} \right) \cos \alpha_j x - \frac{\chi - (-1)^k}{4} \left(\frac{e^{i\gamma_m |y|}}{i\gamma_m} - |y| \right) \right\},$$

$$u_{km} - u_{km}^0 = c_0 \operatorname{sign}(y) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_j (e^{-\beta_2 |y|} - e^{-\beta_1 |y|})}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} - \frac{|y|}{2} e^{-\alpha_j |y|} \right) \sin \alpha_j x, \quad m \neq k.$$

Фигурирующие здесь ряды сходятся равномерно и абсолютно: при $y \neq 0$ в силу присутствия затухающих экспонент; в случае $y = 0$ недиагональные компоненты обращаются в нуль, а общие члены рядов, соответствующих диагональным компонентам, ведут себя как $\cos \alpha_j x / \alpha_j^3$.

Переходим к решению поставленных краевых задач. Используемый в работе подход основан на построении интегральных представлений амплитуд перемещений отраженного волнового поля $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$ в таком виде, чтобы они автоматически удовлетворяли уравнениям движения и условиям излучения на бесконечности, а также обеспечивали скачки необходимых величин при переходе через L .

4. Сведение второй краевой задачи к системе интегральных уравнений

Представления амплитуд перемещений $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$ периодической краевой задачи (5), (8) будем искать в виде потенциалов типа простого слоя (суммирование по $m = 1, 2$):

$$U_k^{(1)}(x_1, x_2) = \int_L u_{km}(x_1 - \xi, x_2 - \eta) f_m(s) ds, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad k, m = 1, 2, \quad (16)$$

где неизвестные функции $f_m(s)$ равны скачкам амплитуд напряжений на L ($f_m(s) = [S_m]$). При таком выборе представлений автоматически удовлетворяются уравнения движения. Кроме того, за счет выбора знаков для β_k в (15) в соответствии с (11) отраженное поле носит характер расходящихся волн, что отвечает условиям излучения на бесконечности.

Выполнение граничных условий по перемещениям (8) сводит вторую краевую задачу к интегральным уравнениям с логарифмическими ядрами. С целью сведения задачи к системе двух сингулярных интегральных уравнений

1-го рода были выбраны новые плотности $p_1(s) = f_1(s) + if_2(s)$, $p_2(s) = f_1(s) - if_2(s)$ и использовались модифицированные граничные условия (дифференцирование по дуговой координате s_0)

$$\left. \frac{d(U_1 \pm iU_2)}{ds_0} \right|_L = \pm i\omega_0 e^{\pm i\varphi_0}, \quad \left. \frac{dW}{ds_0} \right|_L = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \cos \varphi_0 + \frac{\partial W}{\partial x_2} \sin \varphi_0 \right)_{z \rightarrow \zeta_0}. \quad (17)$$

Дифференцируя компоненты матрицы Грина (15) по x_1 и x_2 , вычисляем соответствующие производные функций $U_k^{(1)}$ (16). Подставляя полученные выражения в граничные условия (17), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений 1-го рода (суммирование по $m = 1, 2$):

$$\int_L B_{km}(s_0, s) p_m(s) ds = N_k(s_0) + \omega_0 M_k(s_0), \quad k, m = 1, 2, \quad (18)$$

$$B_{km} = \frac{c_0}{2} \left\{ E_{km} + \sum_{j=0}^{\infty} (\cos \varphi_0 P_{km}(j) + \sin \varphi_0 Q_{km}(j)) \right\}, \quad E_{kk} = \frac{\chi}{2} \operatorname{Re} \{ e^{i\varphi_0} \operatorname{ctg} v_0 \},$$

$$E_{21} = \frac{1}{2i} \left(\operatorname{ctg} v_0 \sin \varphi_0 - \operatorname{Im}(v_0) \frac{e^{i\varphi_0}}{\sin^2 v_0} \right), \quad E_{12} = \overline{E_{21}}, \quad M_1 = ie^{i\varphi_0}, \quad M_2 = \overline{M_1},$$

$N_k = (-1)^k \gamma_1 \tau_1 e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0$ в P -случае, $N_k = i\gamma_2 \tau_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0$ в SV -случае,

$$P_{kk} = \left(\frac{\alpha_j}{\gamma} \left(\frac{t_{11}}{\beta_1} + \frac{t_{21}}{\beta_2} \right) - \chi e_0 \right) s_1, \quad Q_{kk} = \left(\frac{t_{11} + t_{21}}{\gamma} - \chi e_0 \right) s_2,$$

$$P_{km} = \left(\frac{\alpha_j}{\gamma} \left(\frac{t_{12}}{\beta_1} - \frac{t_{22}}{\beta_2} \right) + n e_0 \right) s_1 + (-1)^m i \left(\frac{2\alpha_j}{\gamma} (\beta_1 e_1 - \beta_2 e_2) + n e_0 \right) s_2,$$

$$Q_{km} = \left(\frac{t_{12} - t_{22}}{\gamma} + (n-1)e_0 \right) s_2 - (-1)^m i \left(\frac{2\alpha_j}{\gamma} (\beta_1 e_1 - \beta_2 e_2) + (n-1)e_0 \right) s_1,$$

$$x_0 = \xi - \xi_0, \quad y_0 = \eta - \eta_0, \quad v_0 = \frac{\pi}{2d} (\zeta - \zeta_0), \quad s_1 = \sin \alpha_1 x_0, \quad s_2 = \frac{\operatorname{sign} y_0 \cos \alpha_j x_0}{1 + \delta_{j0}},$$

$$t_{km} = (\alpha_j^2 + (-1)^m \beta_k^2) e_k, \quad e_k = e^{-\beta_k |y_0|}, \quad e_0 = e^{-\alpha_j |y_0|}, \quad n = \alpha_j |y_0|, \quad \gamma = \gamma_2^2 - \gamma_1^2.$$

Здесь ядра B_{kk} сингулярны, ядра B_{12} и B_{21} непрерывны.

Необходимые для однозначной разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений (18) дополнительные условия вытекают из равенства нулю главного вектора и момента сил, что возникают на берегах вставки L . Для амплитуд главного вектора сил получаем

$$\int_L p_k(s) ds = 0, \quad k = 1, 2, \quad (19)$$

а для амплитуд момента сил

$$\int_L (f_1(s) \operatorname{Im}(\zeta - w) - f_2(s) \operatorname{Re}(\zeta - w)) ds = \frac{i}{2} \int_L (p_1(s)(\bar{\zeta} - \bar{w}) - p_2(s)(\zeta - w)) ds = 0, \quad (20)$$

где $w = w_1 + iw_2$ - произвольная точка плоскости Ox_1x_2 , относительно которой вычисляется момент. Дополнительное условие (20) должно быть использовано для определения неизвестной амплитуды ω_0 жесткого поворота вставки.

Система сингулярных интегральных уравнений (18) в совокупности с дополнительными условиями (19), (20) имеет единственное решение в классе функций, имеющих корневую особенность на концах криволинейной вставки L .

5. Сведение первой краевой задачи к системе интегральных уравнений

Представления амплитуд перемещений отраженного волнового поля $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$ сформулированной периодической краевой задачи (5), (6) будем искать в виде потенциалов типа двойного слоя (суммирование по $m = 1, 2$):

$$U_k^{(1)}(x_1, x_2) = \int_L S_{km}(x_1 - \xi, x_2 - \eta) g_m(s) ds, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad k, m = 1, 2, \quad (21)$$

где неизвестные функции $g_m(s)$ равны скачкам амплитуд перемещений на L ($g_m(s) = [U_m]$), S_{km} - элементы матрицы Грина, составленной из компонент главного вектора амплитуд напряжений на L для k -го состояния ($k = 1, 2$).

Как и при решении второй краевой задачи введем в рассмотрение новые плотности $q_1(s) = g_1(s) + ig_2(s)$, $q_2(s) = g_1(s) - ig_2(s)$ и составим комбинации амплитуд перемещений $U_1 \pm iU_2$. При этом выделение статической части у амплитуд перемещений вспомогательных состояний ($k = 1, 2$) будем осуществлять согласно (15), (14), а вычисление комбинаций $S_{k1} \pm iS_{k2}$ - в соответствии с формулами (7), (4). После несложных, но довольно громоздких преобразование из (21) получаем (суммирование по $m = 1, 2$):

$$U_1^{(1)} - (-1)^k U_2^{(1)} = d_0 \int_L D_{km}(x, y) q_m(s) ds, \quad D_{km} = D_{km}^0 + (D_{km} - D_{km}^0), \quad (22)$$

$$D_{11}^0 = \frac{i}{2} (\chi e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \nu - e^{-i\varphi} \operatorname{ctg} \bar{\nu}), \quad D_{21}^0 = -\sin \varphi \operatorname{ctg} \nu + \operatorname{Im}(\nu) \frac{e^{i\varphi}}{\sin^2 \nu}, \quad D_{22}^0 = \overline{D_{11}^0}, \quad D_{12}^0 = \overline{D_{21}^0},$$

$$d_{km} = D_{km} - D_{km}^0, \quad d_{21} = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (t_1 z_1 - t_2 z_2 - t_0 z_0) r_2 + i \left(\alpha_j \left(\frac{m_1}{\beta_1} z_1 - \frac{m_2}{\beta_2} z_2 \right) - t_0 z_0 \right) r_1 \right\},$$

$$d_{11} = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (k_2 z_1 + k_0 z_2 - (k_0 + k_2) z_0) r_2 + i \left(\alpha_j \left(\frac{k_1}{\beta_1} z_1 + \frac{k_0}{\beta_2} z_2 \right) - (k_0 + k_1) z_0 \right) r_1 \right\},$$

$$z_m = e^{-\beta_m |y|}, \quad z_0 = e^{-\alpha_j |y|}, \quad k_m = (1 - 2\nu) e^{i\varphi} + (-1)^m e^{-i\varphi}, \quad k_0 = (2 - 2\nu) e^{i\varphi},$$

$$m_1 = a_1 e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}, \quad m_2 = a_2 e^{i\varphi}, \quad t_1 = b_1 e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}, \quad t_2 = b_2 e^{i\varphi},$$

$$r_1 = \sin \alpha_j x, \quad r_2 = \frac{\operatorname{sign} y \cos \alpha_j x}{1 + \delta_{j0}}, \quad a_m = \frac{4\beta_m^2 + \gamma_m^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, \quad b_m = \frac{4\alpha_j^2 - \gamma_m^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, \quad d_0 = \frac{1}{8d(1-\nu)}.$$

Здесь φ - угол положительной касательной к L в точке $\zeta = \xi + i\eta \in L$ с осью Ox_1 ; $d_{22} = \overline{d_{11}}$, $d_{12} = \overline{d_{21}}$ при условии, что величины β_1 и β_2 , определенные в (11), являются действительными числами.

Интегральные представления (22) автоматически удовлетворяют уравнениям движения (5) и обеспечивают необходимые скачки перемещений на L . Выполнение граничных условий (6) на контуре L сводит данную краевую задачу к гиперсингулярным интегральным уравнениям. Однако, используя операцию интегрирования по частям и учитывая тот факт, что скачки перемещений на концах разреза L равны нулю, можно получить формулы:

$$\int_L \frac{q_m(s)}{\sin^2 v} d\zeta = -\frac{2d}{\pi} \int_L \text{ctg} v d q_m, \int_L \frac{\sin \varphi - \frac{\pi}{d} e^{i\varphi} y \text{ctg} v}{\sin^2 v} q_m(s) ds = \int_L \frac{y}{\sin^2 v} dq_m. \quad (23)$$

С помощью равенств (23) подстановка интегральных представлений (22) в граничные условия (6), записанные относительно комбинаций $S_1 \pm iS_2$ (7), сводит первую краевую задачу к системе интегродифференциальных уравнений (суммирование по $m = 1, 2$):

$$d_0 \int_L (A_{km}(s_0, s) dq_m + C_{km}(s_0, s) q_m(s) ds) = T_k(s_0), \quad k, m = 1, 2, \quad (24)$$

$$A_{kk} = 2 \text{Re}(e^{i\varphi_0} \text{ctg} v_0), \quad A_{21} = 2i \left(\text{ctg} v_0 \sin \varphi_0 - \text{Im}(v_0) \frac{e^{i\varphi_0}}{\sin^2 v_0} \right), \quad A_{12} = \overline{A_{21}},$$

$$C_{12} = d_2 s_2^* + 4i \alpha_j \left((n_1 e^{-i\psi_1} - \cos \psi_2) e_1 - n_2 e^{-i\psi_1} e_2 + h_2 e_0 \right) s_1^*,$$

$$C_{11} = d_1 s_2^* + 4 \alpha_j \sin \psi_1 (e_1 - e_0) s_1^*, \quad \psi_k = \varphi_0 - (-1)^k \varphi, \quad h_m = \cos \psi_m + \delta_{2m} (n-1) e^{-i\psi_k},$$

$$d_m = (-1)^m \left((2n_1 \cos \psi_m - \gamma e^{i\psi_k} - a_{1m} e^{-i\psi_k}) e_1^* - 4 \alpha_j h_m e_0 \right) + a_{2m} e^{-i\psi_k} e_2^*, \quad k \neq m,$$

$$s_1^* = \text{sign } y_0 \sin \alpha_j x_0, \quad s_2^* = \frac{\cos \alpha_j x_0}{1 + \delta_{j0}}, \quad n_k = \frac{\alpha_j^2 + \beta_k^2}{\gamma}, \quad a_{km} = \frac{8 \delta_{2m} \alpha_j^2 \beta_k^2 + \gamma_k^4}{\gamma},$$

$$T_k = \frac{2\gamma_1 \tau_1}{1-2\nu} e^{-i\gamma_1 \eta_0} \left((-1)^k (1-\nu) \cos \varphi_0 - i\nu \sin \varphi_0 \right) \text{ в } P\text{-случае,}$$

$$T_k = \gamma_2 \tau_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} \left(\cos \varphi_0 + (-1)^k \sin \varphi_0 \right) \text{ в } SV\text{-случае.}$$

Здесь δ_{km} - символ Кронекера; $C_{22} = \overline{C_{11}}$, $C_{21} = \overline{C_{12}}$ при условии, что величины β_1 и β_2 (11) являются действительными числами.

Два дополнительных условия, необходимых для однозначной разрешимости системы уравнений (24), вытекают из равенства нуля скачков перемещений на концах контура L . Они имеют вид

$$\int_L dq_k(s) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (25)$$

Система интегродифференциальных уравнений (24) в совокупности с дополнительными условиями (25) имеет единственное решение в классе функций, имеющих корневую особенность на концах трещины L .

6. Асимптотический анализ напряжений вблизи вершин разрезов

Зададим контур L в параметрической форме

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad -1 < \beta < 1, \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(+1). \quad (26)$$

Тогда решение $\Lambda_k(s) = p_k(s)$ второй краевой задачи и $\Lambda_k(s) = dq_k/ds$ первой краевой задачи можно искать в виде

$$\Lambda_k(s) = \Omega_k(\beta) / s'(\beta) \sqrt{1 - \beta^2}, \quad s'(\beta) = ds/d\beta, \quad k = 1, 2. \quad (27)$$

В окрестности вершин разреза L проводился асимптотический анализ распределения амплитуд напряжений σ_r , $\sigma_{r\theta}$ и σ_θ в системе координат, связанной с вершиной c ($c = a$ при $\beta = -1$, $c = b$ при $\beta = 1$). Вычислялись безразмерные величины

$$\langle \sigma_r \rangle = \sqrt{\frac{2r}{l}} \frac{\sigma_r}{P}, \quad \langle \sigma_{r\theta} \rangle = \sqrt{\frac{2r}{l}} \frac{\sigma_{r\theta}}{P}, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \sqrt{\frac{2r}{l}} \frac{\sigma_\theta}{P}, \quad z - c = re^{i\theta_c}. \quad (28)$$

Здесь r - расстояние от рассматриваемой точки z до вершины c ; P - максимальное значение амплитуды напряжения в падающей волне, равное $\gamma_1 \tau_1 (\lambda + 2\mu)$ в P -случае и $\gamma_2 \tau_2 \mu$ в SV -случае; $2l$ - длина дуги L .

В случае второй краевой задачи для напряжений (28) в окрестности вершин криволинейной вставки получены следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_r \rangle &= \sigma(\mp 1) \left\{ \Omega_1(\mp 1) (\mp b_1 + 5b_2 + b_3) \mp \Omega_2(\mp 1) (\mp \bar{b}_1 + 5\bar{b}_2 + \bar{b}_3) \right\}, \quad b_1 = 2\chi e^{-i\varphi_c - \frac{3}{2}\alpha_c}, \\ \langle \sigma_{r\theta} \rangle &= \sigma(\mp 1) \left\{ \Omega_1(\mp 1) (\mp b_1 - b_2 - b_3) \pm \Omega_2(\mp 1) (\mp \bar{b}_1 - \bar{b}_2 - \bar{b}_3) \right\}, \quad b_2 = e^{-i\varphi_c - \frac{i}{2}\alpha_c}, \\ \langle \sigma_\theta \rangle &= \sigma(\mp 1) \left\{ \Omega_1(\mp 1) (\pm b_1 + 3b_2 - b_3) \mp \Omega_2(\mp 1) (\pm \bar{b}_1 + 3\bar{b}_2 - \bar{b}_3) \right\}, \quad b_1 = e^{-i\varphi_c + \frac{3}{2}\alpha_c}, \\ \sigma(\mp 1) &= 1 / (32(1-\nu)P\sqrt{ls'(\mp 1)}), \quad \alpha_c = \theta_c - \varphi_c. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь φ_c - угол между касательной к L в точке c и осью Ox_1 ; верхние значения соответствуют вершине $\beta = -1$, нижние - вершине $\beta = 1$.

В случае первой краевой задачи анализировались также коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) разрыва K_1 и поперечного сдвига K_2 , которые определяются через амплитуды нормального N и касательного T напряжений на продолжении за вершину трещины. Для безразмерных КИН получены следующие асимптотические формулы ($n = 1, 2$)

$$\delta_n = \frac{|K_n|}{P\sqrt{\pi l}}, \quad \delta_n = \frac{\mu}{(\chi + 1)P\sqrt{ls'(\mp 1)}} \left| \Omega_2(\mp 1)e^{i\varphi_c} + (-1)^n \Omega_1(\mp 1)e^{-i\varphi_c} \right|. \quad (30)$$

7. Результаты численных исследований

При численной реализации построенных алгоритмов в данной работе использовался метод механических квадратур [14,15]. Контур L разбивался на N точек, интегральные уравнения (18) и (24) удовлетворялись в узлах $\beta_i = \cos \theta_i$, $\theta_i = i\pi/N$ ($i=1,2,\dots,N-1$) и сводились к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций $\Omega_1(\beta)$ и $\Omega_2(\beta)$ в узлах $\beta_j = \cos \theta_j$, $\theta_j = (2j-1)\pi/2N$, ($j=1,2,\dots,N$). Полученные системы алгебраических уравнений решались в совокупности с соответствующими уравнениями, которые отвечают дополнительным условиям (19), (20) или (25). Величины $\Omega_1(\mp 1)$ и $\Omega_2(\mp 1)$, фигурирующие в (29) и (30), вычислялись с помощью интерполяционных формул

$$\Omega_k(-1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+N} \Omega_k(\beta_j) \operatorname{tg} \frac{\theta_j}{2}, \quad \Omega_k(1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} \Omega_k(\beta_j) \operatorname{ctg} \frac{\theta_j}{2}. \quad (31)$$

В качестве примера рассматривалась дифракция гармонических волн (1) или (2) на периодической системе туннельных разрезов параболического сечения. При этом контур L задавался в виде:

$$\xi = a_1 \beta, \quad \eta = a_2 - a_2 \beta^2, \quad -1 \leq \beta \leq 1. \quad (32)$$

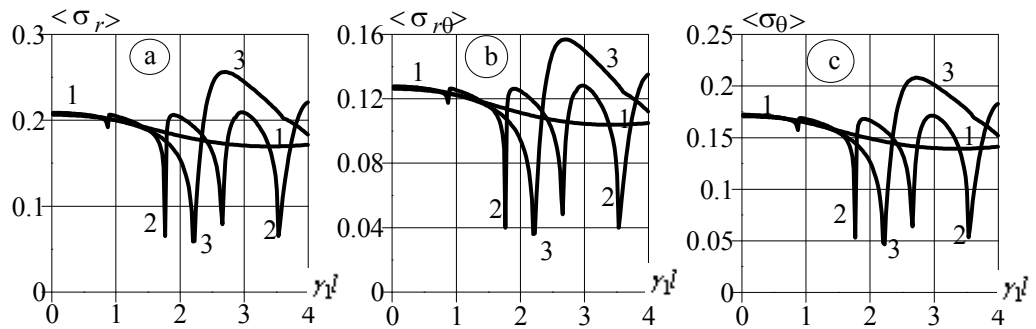


Рис.1. Распределения максимальных напряжений $\langle \sigma_r \rangle$, $\langle \sigma_{r\theta} \rangle$ и $\langle \sigma_\theta \rangle$ в окрестности вершины a параболической жесткой вставки при дифракции P -волны

На рис.1 приведены распределения максимальных напряжений (29) в окрестности вершины a параболической жесткой вставки (32) при $a_2/a_1 = -0,5$ и $\nu = 0,2$ в случае набегания на решетку P -волны (1) в зависимости от волнового числа $\gamma_1 l$. Кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям $a_1/d = 0,01$; 0,2 и 0,5. Результаты, полученные при $a_1/d = 0,01$ с точностью 1% совпадают с аналогичными результатами для одиночной жесткой вставки [11]. Видно, что периодичность структуры существенно влияет на распределение максимальных значений вычисляемых напряжений вблизи вершин вставки и может вызывать как их увеличение, так и уменьшение. Так, вблизи точек скольжения [16], определяемых соотношениями $\gamma_1 d = \pi k$,

$\gamma_2 d = \pi k$ ($k = 1, 2$) наблюдается резкое уменьшение, а затем увеличение рассчитываемых напряжений. На рассматриваемом промежутке изменения $\gamma_1 l$ преобладающим является напряжение $\langle \sigma_r \rangle$, наименьшие значения принимают напряжения $\langle \sigma_{r\theta} \rangle$.

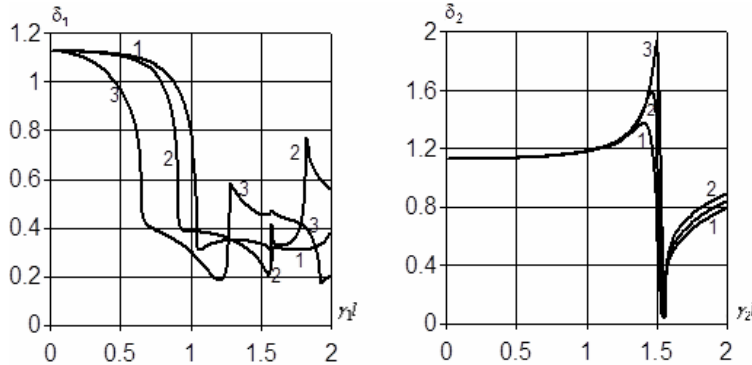


Рис.2. Распределения КИН в случае решетки из прямолинейных трещин при набегании P -волны (δ_1) и SV -волны (δ_2)

Рис.2 иллюстрирует зависимости безразмерных КИН δ_n (30) от волнового числа $\gamma_n l$ при набегании на решетку с прямолинейных трещин ($a_2 = 0$) P -волны ($n = 1$) или SV -волны ($n = 2$) при $a_1 / d = 0,5$. Кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям $\nu = 0,1$; 0,25 и 0,4. Отметим, что в P -случае $\delta_2 = 0$, а в SV -случае $\delta_1 = 0$. Вычисления показывают, что в низкочастотной области значения КИН почти не зависят от значения коэффициента Пуассона ν . Как и в случае решетки с жестких параболических вставок (рис. 1), вблизи точек скольжения наблюдается резкое изменение КИН. Так, в SV -случае слева первой точки скольжения ($\gamma_2 d = \pi$) наблюдается рост, а затем справа этой точки происходит резкое падение величины δ_2 . В P -случае вблизи точки $\gamma_2 d = \pi$ величина δ_1 постепенно уменьшается и эффект резкого изменения напряжений выражен слабо, однако вблизи других точек скольжения он проявляется.

Анализ полученных результатов подтверждает тот факт, что при динамическом нагружении угроза хрупкого разрушения возрастает. Пиковое значение КИН может превышать статическое значение в 2-3 раза. Кроме того, при заданной конфигурации решетки существуют такие волновые числа, при которых значения амплитуд напряжений близки к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной упругой среде // Проблемы программирования. – 2010. – № 2–3. – С. 604–610.

2. Панченко Б.Е., Назаренко А.М. Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 172–187.
3. Фенченко Н.В. О взаимодействии упругих гармонических волн с близко расположенными, произвольно ориентированными трещинами. //Прикл. механика. – 1999. – **35**, №10. – С. 61–67.
4. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде. //Мех. тверд. тела. – 1991.– №4. – С. 119–127.
5. Kit H.S., Khaj M.V., Mykhaskiv V.V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM //Eng. Fract. Mech. - 1996. – **55**, N2. – P. 191–207.
6. Попов В. Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов // Механика твердого тела. –1999.– №4.– С. 118–129.
7. Михаськів В.В., Хай О.М. Симетрична задача усталеної взаємодії тріщин і тонких жорстких включень у тривимірній матриці. //Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. –№2. – С. 42–50.
8. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Проблемы динамической механики разрушения без учета контакта берегов трещины. //Прикл. мех. – 1994. – **30**, №10. – С. 3-28.
9. Scarpetta E., Sumbatyan M. In-plane wave propagation throught elastic solids with a periodic array of rectangular defects // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 2001. – 69, N 2. – P. 179–188.
10. Scarpetta E., Sumbatyan M. The single-mode approximation in the problem of the propagation of a plane longitudinal wave in an elastic medium with a periodic system of rectangular defects // J. Appl. Math. Mech. –2003. 67, N 4. –P. 601–610.
11. Назаренко А.М., Фильштинский Л.А. Взаимодействие волн напряжений с жесткими вставками в полупространстве (плоская деформация). // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. –№4. – С. 95–102.
12. Назаренко О.М., Ложкін О.М. Дифракція пружних гармонічних хвиль на періодичній системі криволінійних тріщин в умовах плоскої деформації // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4 , С. 162–169.
13. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. –К.: Наукова думка, 1981. –284 с.
14. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наукова думка, 1984. - 344 с.
15. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995. –520с.
16. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. - К.: Наукова думка., 1978. – 307 с.