

УДК 517.9

## Существование и единственность непрерывной траектории одной системы с переменной структурой

Е. В. Часновский

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

В работе предложен метод доопределения решения дифференциально-алгебраического уравнения с разрывной правой частью, который обобщает доопределение методом «скользящего режима» для явных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Используется метод спектральных проекторов характеристического пучка матриц. Получена локальная теорема существования и единственности непрерывного решения поставленной задачи в предположении, что поверхности разрыва попарно не пересекаются. Результаты иллюстрируются конкретным примером.

**Ключевые слова:** дифференциально-алгебраическое уравнение, разрывная правая часть, скользящий режим, спектральные проекторы.

У роботі запропонований метод доозначення розв'язку диференціально-алгебраїчного рівняння з розривною правою частиною, який узагальнює доозначення методом «ковзного режиму» для явних диференціальних рівнянь з розривною правою частиною. Використовується метод спектральних проекторів характеристичного жмутка матриць. Отримана локальна теорема існування та єдності неперервного розв'язку поставленої задачі за припущенням, що поверхні розриву попарно не перетинаються. Результати ілюструються конкретними прикладами.

**Ключові слова:** диференціально-алгебраїчне рівняння, розривна права частина, ковзний режим, спектральні проектори.

In the paper a method of extension of a solution definition of differential-algebraic equation with discontinuous right-hand side is introduced which generalizes extension of a solution definition with “sliding mode” method in the theory of explicit differential equations with discontinuous right-hand sides. The method of spectral projectors of a characteristic matrix pencil is used. The local theorem of existence and uniqueness of a solution of the given problem is obtained with assumption that surfaces of discontinuity pairwise don't intersect. Results are illustrated with concrete examples.

**Key words:** differential-algebraic equation, with discontinuous right-hand side, sliding mode, spectral projectors.

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Уравнение ряда динамических систем могут меняться в отдельных точках пространства-времени, в частности в теории систем с переменной структурой и в теории гибридных систем. В частности, такие задачи возникали при работе с электроприводами ([1]), при изучении модели авторулевого ([2]). Скользящие режимы в системах с переменной структурой являются предметом изучения [3], гибридные системы – [4]. Особый интерес представляет задача оптимального управления подобными системами. Для исследования этих задач необходимо иметь теорему существования и единственности решения, а в случае нелинейных систем – гарантии существования глобальных решений.

Теоретический аппарат для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью структурировано изложен в [5]. Наиболее популярными

подходами к определению решения являются подход Филиппова, основанный на «выпуклом доопределении», и концепция «скользящего режима». С помощью них решается проблема выбора разумного, «естественного» доопределения поведения системы на поверхностях разрыва. Это является основной задачей при исследовании таких конструкций.

В данной работе исследуется класс систем, каждая из которых описывается дифференциально-алгебраическим уравнением с разрывной правой частью:

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t, u)$$

Здесь  $u(t) \in \mathbf{R}^n$  – искомая вектор-функция;  $A$  и  $B$  – известные постоянные квадратные матрицы порядка  $n$ ;  $f(t, u) = \{f_i(t, u), (t, u) \in D_i \subset \mathbf{R}^{n+1} (i = \overline{1, m})$  – кусочно-непрерывная вектор-функция,  $\{D_i\}_{i=1}^m$  – набор непересекающихся односвязных областей, причем  $\mathbf{R}^{n+1} = (\bigcup_{i=1}^m D_i) \cup S$ , где  $S$  – множество нулевой меры в  $\mathbf{R}^{n+1}$ , содержащее точки разрыва правой части,  $f_i(t, u): \overline{D_i} \rightarrow \mathbf{R}^n (i = \overline{1, m})$  – известные вектор-функции непрерывные в  $D_i$  вплоть до границы.

## 2. Необходимые сведения.

### 2.1 Спектральные проекторы

Одновременно с матрицами рассматриваем линейные операторы из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^n$ . Этой паре операторов соответствует пучок операторов  $\lambda A + B$ . Предполагается, что данный пучок регулярен, т.е. в терминах матриц  $\exists \tilde{\lambda} \in \mathbf{C}: \det(\tilde{\lambda}A + B) \neq 0$ . Обозначим также  $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$  – резольвента пучка операторов. Как для вещественных  $\lambda$ , так и для комплексных  $\lambda$  при комплексном расширении пространства  $\mathbf{R}^n$  резольвента определена почти всюду, за исключением конечного множества точек  $\{\lambda_i\}_{i=1}^s (s \leq n)$ .

Основное предположение для пучка в данной работе состоит в том, что пучок имеет индекс 1, т.е.:

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbf{R}: \|R(\lambda)\| \leq C_1, |\lambda| \geq C_2 \quad (1)$$

Это эквивалентно тому, что резольвента  $(A + \mu B)^{-1}$  имеет полюс в точке  $\mu = 0$  порядка 1 или  $\mu = 0$  – регулярная точка пучка  $A + \mu B$ .

Для регулярного пучка в  $\mathbf{C}^n$  можно построить спектральные проекторы типа Рисса, предложенные в [6]. Проекторы строятся путем комплексного контурного интегрирования:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_2} R(\lambda) A d\lambda, P_2 = E - P_1, Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_2} A R(\lambda) d\lambda, Q_2 = E - Q_1 \quad (2)$$

Здесь  $E$  – единичный оператор в  $\overline{C^n}$ . Для этих проекторов выполнено свойство:  $Q_j A = AP_j$ ,  $Q_j B = BP_j$  ( $j = \overline{1,2}$ ). Как показано в [7], операторы  $P_k$ ,  $Q_k$  являются вещественными проекторами в  $\mathbf{R}^n$ .

Проекторы (2) порождают прямые разложения пространства  $\mathbf{R}^n$

$$\mathbf{R}^n = X_1 + X_2, \quad \mathbf{R}^n = Y_1 + Y_2,$$

где  $P_j \mathbf{R}^n = X_j$ ,  $Q_j \mathbf{R}^n = Y_j$  ( $j = \overline{1,2}$ ). Это разложение обладает тем свойством, что операторы  $A, B$  отображают  $X_j$  в  $Y_j$  ( $j = \overline{1,2}$ ).

Суженные операторы  $A_j = A|_{X_j}$  из  $X_j$  в  $Y_j$  и  $B_j = B|_{X_j}$  из  $X_j$  в  $Y_j$  ( $j = \overline{1,2}$ ) обладают следующими свойствами:

если  $X_1 \neq \{0\}$ , то существует обратный  $A_1^{-1}$ ;

если  $X_2 \neq \{0\}$ , то существует обратный  $B_2^{-1}$ .

При ограничении (1) подпространство  $X_2$  есть подпространство собственных векторов пучка  $A + \mu B$  в точке  $\mu = 0$ , иными словами  $X_2 = \text{Ker} A$  (ядро оператора  $A$ ); подпространство  $Y_1 = \text{Im} A$ , т.е. образ оператора  $A$ .

В [7, с. 48] вводится оператор  $G$ , который имеет вид:

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B \quad (3)$$

Данный оператор переводит  $X_j$  в  $Y_j$  ( $j = \overline{1,2}$ ) и является обратимым:

если  $X_1 \neq \{0\}$  и  $X_2 \neq \{0\}$ , то  $G^{-1} = A_1^{-1} Q_1 + B_2^{-1} Q_2$ ;

если  $X_1 = \{0\}$ , то  $G^{-1} = B^{-1}$ ;

если  $X_2 = \{0\}$ , то  $G^{-1} = A^{-1}$ .

Также выполнены важные для практики свойства:

$$G^{-1}AP_1 = P_1, \quad G^{-1}BP_2 = P_2, \quad AG^{-1}Q_1 = Q_1, \quad BG^{-1}Q_2 = Q_2 \quad (4)$$

## 2.2. Полулинейные дифференциально-алгебраические уравнения

Рассмотрим полулинейное дифференциально-алгебраическое уравнение вида

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t, u), \quad (5)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные квадратные вещественные матрицы порядка  $n$ , причем  $\det A = 0$ ,  $f(t, u): [t_0; T] \times D \rightarrow \mathbf{R}^n$  – непрерывная функция ( $D$  – открытая область в  $\mathbf{R}^n$ ). Начальное условие:

$$u(t_0) = u_0 \quad (6)$$

*Определение:* Вектор-функцию  $u(t) \in C([t_0; T])$  назовем решением уравнения (5) на отрезке  $[t_0; T]$ , если  $Au(t) \in C^1([t_0; T])$  и  $u(t)$  удовлетворяет (5) на всем отрезке  $[t_0; T]$ .

*Определение:* Решением начальной задачи (5)-(6) называется решение уравнения (5), которое удовлетворяет начальному условию (6).

Используем теорему существования и единственности решения задачи Коши (5), (6) из [7, с. 125].

**Теорема 1:** Пусть:

- 1) справедливо ограничение (1);
- 2) функция  $f(t, u)$  является непрерывной по  $t$  и удовлетворяет условию Липшица:  
 $\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq M \|u - v\|$ , при  $u, v \in D$  с константой  $M$  не зависящей от  $t \in [t_0; T]$ ;
- 3)  $M \|Q_2\| \cdot \|G^{-1}\| < 1$

Тогда: для любого вектора  $u_0 \in \mathbf{R}^n$  такого, что

$$Q_2 B u_0 = Q_2 f(t_0, u_0) \quad (7)$$

задача Коши (5)-(6) имеет единственное решение на всем интервале  $[t_0; T]$ .

Как видим, не любое начальное условие подходит для разрешимости задачи Коши в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае ограничения (1) условие (7) выделяет многообразие допустимых начальных условий  $(t_0; u_0)$  и соответственно многообразие допустимых состояний  $(t; u)$  в расширенном фазовом пространстве системы (5).

### 3. Постановка задачи и некоторые замечания

Рассматривается система, поведение которой определяется набором уравнений:

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f_i(t, u), \quad (t, u) \in D_i \subset \mathbf{R}^{n+1} \quad (i = \overline{1, m}), \quad (8)$$

где  $u(t) \in \mathbf{R}^n$  – искомая вектор-функция;  $A$  и  $B$  – известные постоянные квадратные матрицы порядка  $n$ ;  $\{D_i\}_{i=1}^m$  – набор непересекающихся областей,

причем  $\mathbf{R}^{n+1} = (\bigcup_{i=1}^m D_i) \cup S$ , где  $S$  – множество нулевой меры в  $\mathbf{R}^{n+1}$ ,

содержащее точки разрыва системы;  $f_i(t, u): \overline{D_i} \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (i = \overline{1, m})$  – известные, непрерывные в  $D_i$  вплоть до границы вектор-функции. Предполагаем также, что

множество  $S$  представимо в виде объединения поверхностей:  $S = \bigcup_{i=1}^{m-1} S_i$ , где

поверхности  $S_i$  попарно не пересекаются и представимы в виде  $S_i = \{(t, u) | \varphi_i(t, u) = 0\}$  с достаточно гладкими функциями  $\varphi_i(t, u)$ .

Основной задачей является изучение непрерывного поведения системы с переменной структурой, определяемой набором уравнений (8). Для этого будем рассматривать набор уравнений (8) как уравнение с разрывной (именно, кусочно-непрерывной) правой частью:

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t, u), \quad f(t, u) = \begin{cases} f_i(t, u), & (t, u) \in D_i \subset \mathbf{R}^{n+1} \quad (i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (9)$$

Такая трактовка задачи позволяет прибегнуть к методам, разработанным в теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, а именно к простейшему выпуклому доопределению Филиппова ([5]) и концепции скользящего режима ([3]).

При определенных условиях на входные данные задачи, внутри каждой области  $D_i$  решение будет существовать. Каждое решение представимо интегральной траекторией в расширенном фазовом пространстве  $\mathbf{R}^{n+1}$ . До того момента, как интегральная траектория не пересекает ни одну из поверхностей  $S_i$ , никаких противоречий не наблюдается: система удовлетворяет одному из уравнений (8) и находится в соответствующей области. Как только произошло пересечение интегральной кривой решения с какой-то граничной поверхностью  $S_j$ , возникает неопределенность в том плане, что на самой поверхности поведение системы заранее не определено. Возможна ситуация, когда естественным поведением системы будет продолжать свое движение из точки пересечения в «соседней» области по правилу этой же области (когда интегральные траектории «прошивают» поверхность разрыва). Но возможна ситуация, когда интегральные траектории в точке пересечения направлены навстречу друг другу, и выход в «соседнюю» область невозможен. В таком случае предлагается использовать концепцию скользящего режима из [3], [5] и доопределить поведение системы на поверхности разрыва как решение дифференциального уравнения, траектория которого находится на поверхности («скользит» по поверхности), пока не изменятся внешние условия.

#### 4. Поведение системы на поверхности разрыва

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений интегральные траектории решения проходят через любую точку расширенного фазового пространства. Траектории дифференциально-алгебраических уравнений принадлежат некоторому многообразию решений в  $\mathbf{R}^{n+1}$  и точки  $(t; u)$  не принадлежащие этому многообразию недостижимы для траекторий. Далее при доопределении поведения системы при пересечении поверхности разрыва считаем, что точка пересечения  $(t^*; u^*)$  принадлежит обоим многообразиям решений в соседних областях. Аналитическое условие этого ограничения будет дано позже.

Пусть  $(t; u_j(t))$  - интегральная кривая системы (9) в области  $D_j$  пересекает граничную поверхность  $S_i$  в точке  $(t^*; u^*)$ , см. Рис. 1.

Взаимное расположение интегральных кривых по обе стороны от поверхности  $S_i$  характеризуются «векторами скоростей» кривых, их положением относительно касательной плоскости  $P$  к поверхности  $S_i$  в точке  $(t^*; u^*)$ . Точное описание достигается сравнением знаков проекций векторов скоростей в областях  $D_j$  и  $D_k$  на полный градиент функции  $\varphi_i(t, u)$  (для

простоты обозначим эту функцию  $\varphi(t, u)$  в точке  $(t^*; u^*)$ , т.е. вектор  $(\varphi_t(t^*; u^*); \nabla \varphi(t^*; u^*))$ .

Если в случае обыкновенных дифференциальных уравнений векторы скоростей  $\mathbf{R}^{n+1}$  представлялись в виде  $(t; u(t))' = (1; u'(t)) = (1; f(t; u))$  и были уже известны в каждой точке, то в дифференциально-алгебраических уравнениях их предстоит ещё отыскать.

Логически, с точностью до обозначений, возможны 3 варианта.

**Вариант 1)** Векторы скорости направлены в одну область. Графически это иллюстрируется на Рис. 1:

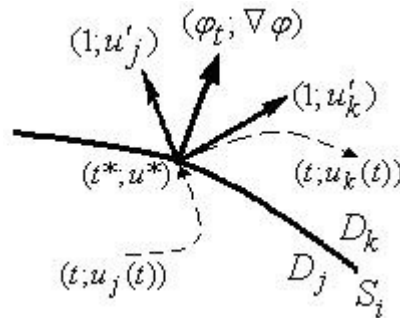


Рис. 1

При такой конфигурации векторы скоростей обеих интегральных кривых имеют один знак в проекции на вектор полного градиента функции  $\varphi(t, u)$ , что аналитически записывается следующим образом:

$$\langle (\varphi_t; \nabla \varphi), (1; u'_j) \rangle \cdot \langle (\varphi_t; \nabla \varphi), (1; u'_k) \rangle > 0 \Leftrightarrow (\varphi_t + \langle \nabla \varphi, u'_j \rangle) \cdot (\varphi_t + \langle \nabla \varphi, u'_k \rangle) > 0 \quad (10)$$

Под  $(1; u'_j)$  и  $(1; u'_k)$  понимаются предельные значения векторов скоростей из областей  $D_j$  и  $D_k$  соответственно. Предполагается, что предельные значения существуют.

Такая конфигурация отвечает тому, что система находилась в области  $D_j$ , при  $t \rightarrow t^*$  попала в точку  $(t^*; u^*)$  на границе  $S_i$  и далее будет продолжать свое движение непрерывным образом и в области  $D_k$  как решение задачи Коши:

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f_k(t, u), \quad u(t^*) = u^*.$$

**Вариант 2)** Векторы скорости направлены «на поверхность разрыва» или «с поверхности разрыва», см. Рис. 2 и Рис. 3:

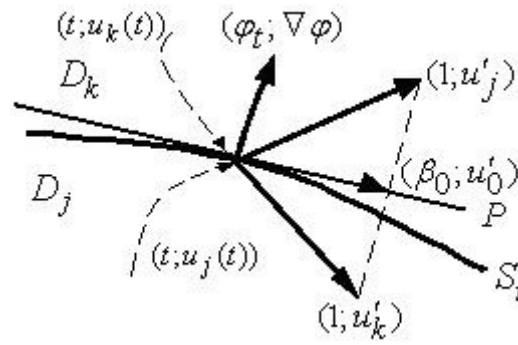


Рис. 2

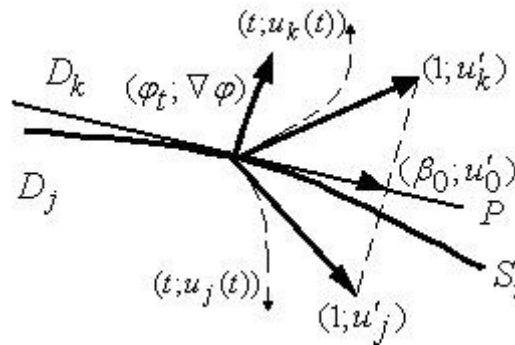


Рис. 3

Ситуация на Рис. 2 отвечает случаю, когда интегральные кривые с обеих сторон «толкают» систему на поверхность разрыва. Ситуация на Рис. 3 отвечает случаю, когда интегральная кривая находится на поверхности разрыва.

Предлагается применить концепцию скользящего режима, которая наглядно представлена в [3], [5]. Доопределим состояние системы, применяя простейшее выпуклое доопределение. В такой ситуации отрезок, соединяющий точки  $(1; u'_j)$  и  $(1; u'_k)$ , будет иметь ровно одну точку пересечения  $(\beta_0; u'_0)$  с касательной плоскостью  $P$ . Выразим эту точку через известные данные.

То, что точка  $(\beta_0; u'_0)$  лежит на отрезке, соединяющим  $(1; u'_j)$  и  $(1; u'_k)$ , означает, что:

$$(\beta_0; u'_0) = \alpha \cdot (1; u'_j) + (1 - \alpha) \cdot (1; u'_k) = (1; \alpha \cdot u'_j + (1 - \alpha) \cdot u'_k)$$

при некотором  $\alpha \in [0; 1]$ .

Следовательно:  $\beta_0 = 1$ . Найдем  $u'_0$  из того условия, что вектор  $(1; u'_0)$  должен лежать в касательной плоскости  $P$ . Это значит, что  $(1; u'_0)$  должен быть ортогонален градиенту  $(\varphi_t; \nabla \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \langle (1; u'_0), (\varphi_t; \nabla \varphi) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \alpha &= \alpha(t; u) = \frac{\varphi_t + \langle u'_k, \nabla \varphi \rangle}{\langle u'_k - u'_j, \nabla \varphi \rangle}, \quad (t; u) \in S_i \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, при такой конфигурации векторов скоростей, доопределяем поведение системы на поверхности разрыва  $S_i$ , как решение следующей задачи Коши:

$$u' = \alpha(t; u) \cdot u'_j + (1 - \alpha(t; u)) \cdot u'_k, \quad u(t^*) = u^*, \quad t \geq t^*, \quad (t; u) \in S_i, \quad (12)$$

где  $\alpha$  находится по формуле (11).

В рассматриваемом варианте знаки проекций векторов скоростей на полный градиент противоположные, что аналитически выражается следующим образом:

$$\langle (\varphi_t; \nabla \varphi); (1; u'_j) \rangle \cdot \langle (\varphi_t; \nabla \varphi); (1; u'_k) \rangle \leq 0 \Leftrightarrow (\varphi_t + \langle \nabla \varphi; u'_j \rangle) \cdot (\varphi_t + \langle \nabla \varphi; u'_k \rangle) \leq 0 \quad (13)$$

Следует заметить, что в данной ситуации допускается, чтобы ровно один из векторов скоростей принадлежал касательной плоскости. Тогда это и будет искомым вектор  $(1; u'_0)$  при доопределении. Случай, когда оба вектора принадлежат касательной плоскости, следует рассматривать отдельно.

**Вариант 3)** В случае, когда оба вектора скорости принадлежат касательной плоскости, однозначного поведения системы найти нельзя и доопределение выглядит следующим образом:

$$u' = \alpha(t; u) \cdot u'_j + (1 - \alpha(t; u)) \cdot u'_k, \quad u(t^*) = u^*,$$

где  $\alpha(t; u) \in [0; 1]$  – какая-то непрерывная функция.

Аналитическая проверка такой ситуации имеет вид:

$$\varphi_t + \langle \nabla \varphi, u'_j \rangle = \varphi_t + \langle \nabla \varphi, u'_k \rangle = 0 \quad (14)$$

Замечание: Важным свойством представленных доопределений является преемственность поведения системы на поверхностях разрыва от поведения системы в соответствующих областях непрерывности, где она задаётся дифференциально-алгебраическим уравнением.

### 5. Нахождение вектора скорости решения дифференциально-алгебраического уравнения

Как уже отмечалось выше, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений вида  $u' = f(t, u)$  вектор скорости решения находится из самого вида уравнения:  $(1; u') = (1; f(t, u))$ , и в каждой точке расширенного фазового пространства является известным.

Вектор скорости решения дифференциально-алгебраического уравнения предстоит отыскать. В данной работе предлагается один из способов нахождения вектора скорости при некоторых ограничениях на правую часть.

Рассмотрим полулинейное дифференциально-алгебраическое уравнение вида (5) при ограничении (1) на пучок  $\lambda A + B$ . Наша задача состоит в выражении  $u'(t)$  через известные данные.

Поддействуем отдельно на уравнение (5) операторами  $Q_1$  и  $Q_2$  слева. В силу свойств спектральных проекторов и того, что при ограничении (1)  $X_2 = \text{Ker} A$ , получим:



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(AP_1u(t)) + BP_1u(t) = Q_1f(t, u) \\ BP_2u(t) = Q_2f(t, u) \end{cases}$$

Домножим оба равенства на  $G^{-1}$  и воспользуемся тождествами из (4):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_1u(t)) + G^{-1}BP_1u(t) = G^{-1}Q_1f(t, u) \\ P_2u(t) = G^{-1}Q_2f(t, u) \end{cases}$$

Представим теперь вектор-функцию  $u(t)$  в виде:

$$u(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (15)$$

где  $x_j(t) = P_ju(t)$  ( $j = \overline{1, 2}$ ). С учетом новых обозначений имеем:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x_1(t)) + G^{-1}BP_1u(t) = G^{-1}Q_1f(t, u) \end{cases} \quad (16)$$

$$x_2(t) = G^{-1}Q_2f(t, x_1 + x_2) \quad (17)$$

Уравнение (16) запишем в виде:

$$x_1'(t) = G^{-1}Q_1f(t, u) - G^{-1}BP_1u \quad (18)$$

Уравнение (17) продифференцируем по  $t$ , предполагая, что функция  $Q_2f(t, u)$  имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам на  $[t_0; T] \times D$ ,  $D \subset \mathbf{R}^n$ . После преобразований получим:

$$(E - G^{-1} \frac{\partial Q_2f}{\partial u})x_2'(t) = G^{-1}(\frac{\partial Q_2f}{\partial t} + \frac{\partial Q_2f}{\partial u}x_1'(t))$$

Предположим дополнительно, чтобы  $\exists(E - G^{-1} \frac{\partial Q_2f}{\partial u})^{-1}$ . Тогда

$$x_2'(t) = (E - G^{-1} \frac{\partial Q_2f}{\partial u})^{-1}G^{-1}(\frac{\partial Q_2f}{\partial t} + \frac{\partial Q_2f}{\partial u}x_1'(t)).$$

Теперь переходим к выражению для  $u'(t)$ .

$$\begin{aligned} u'(t) &= x_1'(t) + x_2'(t) = x_1'(t) + (E - G^{-1} \frac{\partial Q_2f}{\partial u})^{-1}G^{-1}(\frac{\partial Q_2f}{\partial t} + \frac{\partial Q_2f}{\partial u}x_1'(t)) = \\ &= (E - G^{-1} \frac{\partial Q_2f}{\partial u})^{-1}(x_1'(t) + G^{-1} \frac{\partial Q_2f}{\partial t}) = \\ &= (E - G^{-1} \frac{\partial Q_2f}{\partial u})^{-1}(G^{-1}Q_1f(t, u) - G^{-1}BP_1u + G^{-1} \frac{\partial Q_2f}{\partial t}) = \\ &= (G - \frac{\partial Q_2f}{\partial u})^{-1}(Q_1(f(t, u) - Bu) + \frac{\partial Q_2f}{\partial t}) \end{aligned}$$

Итого, мы получили утверждение.

**Утверждение 1:** Пусть для некоторого  $(t; u)$ :

- 1)  $\exists \frac{\partial Q_2 f}{\partial t}$  и  $\exists \frac{\partial Q_2 f}{\partial u}$ ;
- 2)  $\exists (E - G^{-1} \frac{\partial Q_2 f}{\partial u})^{-1}$ ;

Тогда:

$$u'(t) = (G - \frac{\partial Q_2 f}{\partial u})^{-1} (Q_1(f(t, u) - Bu) + \frac{\partial Q_2 f}{\partial t}). \quad (19)$$

Таким образом, при выполнении условий из утверждения, вектор скорости интегральной кривой в расширенном фазовом пространстве в точке  $(t; u)$  имеет вид  $(1; u'(t))$ , где  $u'(t)$  находится по формуле (19).

### 5. Теорема существования и единственности непрерывного решения

Рассматривается задача (8), (6) с ограничениями на матрицы  $A$  и  $B$ , изложенными в начале п. 2.1. Считаем, что доопределение решения на поверхностях разрыва  $S_i$  осуществляется методом, описанным в п. 4, где векторы скорости в расширенном фазовом пространстве (там, где они необходимы для доопределения) вычисляются с помощью формулы (19).

**Теорема 2:** Пусть:

- 1) выполнена оценка (1), т.е. характеристический пучок каждого уравнения из (8) имеет индекс 1;
- 2) функции  $f_i(t; u): \overline{D_i} \rightarrow \mathbf{R}^n$  непрерывны и удовлетворяют оценке  $\|f_i(t, u) - f_i(t, v)\| \leq M_i \cdot \|u - v\|$  при  $(t; u), (t; v) \in \overline{D_i}$ , где  $M_i$  не зависят от  $t$  и такие, что  $M_i \cdot \|Q_2\| \cdot \|G^{-1}\| < 1$  при любом  $i = \overline{1, m}$ ;
- 3)  $\exists \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial t}$ ,  $\exists \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}$  и  $\exists (E - G^{-1} \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u})^{-1}$  в некоторой окрестности границы  $\partial D_i$  внутри области  $D_i$  при  $i = \overline{1, m}$ ;
- 4)  $\frac{\partial Q_2 f_i}{\partial t}$  и  $\frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}$  – локально липшицевы в некоторой окрестности  $\partial D_i$ ;
- 5)  $Q_2 B u_0 = Q_2 f_k(t_0, u_0)$  для какого-то  $k \in \overline{1, m}$ ;
- 6)  $Q_2 f^+(t, u) = Q_2 f^-(t, u)$  при  $(t; u) \in S_i$ , где через  $f^-$  и  $f^+$  обозначены предельные значения правой части уравнения из соседних областей  $D^+$  и  $D^-$ , граничащих друг с другом по поверхности  $S_i$ ;

Тогда: существует (возможно не единственное) непрерывное решение задачи Коши (8), (6) на некотором нетривиальном отрезке  $[t_0; T^*]$ , где  $T^* \leq T$ .

*Доказательство:* 1) Для начала, рассмотрим случаи.

- а)  $\exists j \in \overline{1, m-1}: (t_0; u_0) \in S_j$ .

Если в данной точке выполнено условие (10), то существование, и даже единственность, непрерывного решения гарантирует теорема 1, т.к. все её ограничения выполнены в силу условий доказываемой теоремы.

Если в данной точке выполнено условие (13), то правая часть при доопределении (12) является локально липшицевой на поверхности  $S_j$ .

Действительно, в силу тождества

$$\begin{aligned} & \left(G - \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}(t; u_1)\right)^{-1} - \left(G - \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}(t; u_2)\right)^{-1} = \\ & = \left(G - \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}(t; u_1)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}(t; u_1) - \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}(t; u_2)\right) \cdot \left(G - \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}(t; u_2)\right)^{-1}, \end{aligned}$$

а также ограниченности матрицы-функции  $\left(E - G^{-1} \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}(t; u)\right)^{-1}$  на липшицевой окрестности на поверхности  $\partial D_i$ , матрицы  $\left(G - \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u}(t; u)\right)^{-1}$  локально липшицевы на границах  $\partial D_i$ .

Т.к. линейные операции и умножение сохраняют локальную липшицевость (в качестве липшицевой окрестности достаточно выбрать пересечение липшицевых окрестностей слагаемых), правая часть (12) является локально липшицевой.

Локальное существование и единственность непрерывного (и даже дифференцируемого) решения, в силу локальной липшицевости правой части, гарантирует теорема существования и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая сформулирована, например, в [8, с. 9].

б)  $\exists j \in \overline{1, m} : (t_0; u_0) \in D_j$ . Тогда существование и единственность решения гарантирует теорема 1.

2) Если на промежутке существования решения его интегральная кривая  $(t; u_k(t))$  не пересекает ни одну из поверхностей  $S_i$ , то противоречий не наблюдается. Если произошло пересечение какой-то поверхности  $S_i$  в точке  $(t^*; u^*)$ , то необходимо проверить выполнение одного из условий (10), (13), (14) и продолжать траекторию системы по способам, описанным в п. 4. Проверка этих условий будет корректна, т.е. с обеих сторон от  $S_i$  будут существовать векторы скорости. Это следует из условия б) и из того, что внутри каждой из  $m$  областей интегральная кривая  $(t; u_j(t))$  подчинена правилу:  $Q_2 B u_j(t) = Q_2 f_j(t, u_j(t))$ . Следовательно, эта связь будет выполнена и при  $t = t^*$ . Теорема доказана.

Следствие (Теорема существования и единственности): Пусть:

- 1) выполнены условия теоремы 2;
- 2) при каждом фиксированном  $t \in [t_0; T]$  условие (14) может выполняться разве что в изолированных точках множества  $\partial D_i \cap \{(t; u) \mid Q_2 B u = Q_2 f_i(t, u)\} \quad (i = \overline{1, m})$ ;

Тогда: существует единственное непрерывное решение задачи Коши (8), (6) на некотором нетривиальном отрезке  $[t_0; T^*]$ , где  $T^* \leq T$ .

*Доказательство:* Решение существует в силу теоремы 2.

Если условие (14) не выполнено ни в одной точке, то единственность решения достигается в силу построения доопределения на поверхностях разрыва. Если же условие (14) выполнено лишь в изолированных точках на поверхностях разрыва, то решение можно продолжить по непрерывности, и единственность будет достигнута. Следует отметить, что в силу ограниченности функции  $\alpha(t; u)$  и того, что в числителе и знаменателе дроби из (11) существуют пределы, существует предел и у  $\alpha(t; u)$  при стремлении по поверхности разрыва к точке, где выполнено условие (14). Следовательно, доопределение в данной ситуации корректно. *Следствие доказано.*

### 7. Иллюстрация полученных результатов на примере

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4} y \cdot \text{sign}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \\ y' = -\frac{1}{4} x \cdot \text{sign}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Эту задачу можно проинтерпретировать так: вне единичной сферы происходит движение по часовой стрелке, а внутри – против часовой стрелки, при этом оставаясь на плоскости  $x + y + z = 0$ .

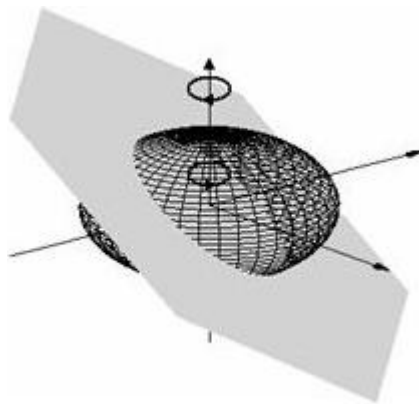


Рис. 4

Если обозначить  $u = (x; y; z)$ ,  $\varphi(t, u) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ , то у этой системы точками разрыва в фазовом пространстве будет единичная сфера, а в расширенном фазовом пространстве – множество, задаваемое уравнением  $\varphi(t, u) = 0$ , т.е. цилиндрическая поверхность, которая строится как декартово

произведение единичной сферы в  $R^3$  и вещественной оси времени  $R$ . Обозначим эту поверхность через  $S_1$ .

Области непрерывности:

$$D_1 = \{(t; x; y; z) \mid \varphi(t, u) < 0\} = \{(t; x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

$$D_2 = \{(t; x; y; z) \mid \varphi(t, u) > 0\} = \{(t; x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$$

Для этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{cases} f_1(t, u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}y \\ \frac{1}{4}x \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{при } (t, u) \in D_1, \text{ и} \\ f_2(t, u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}y \\ -\frac{1}{4}x \\ 0 \end{pmatrix} & \text{при } (t, u) \in D_2. \end{cases}$$

Таким образом, имеем постановку задачи (8) при  $m = 2$ . Функции  $f_1$  и  $f_2$  являются липшицевыми по переменной  $u$  с константами  $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}$ .

Спектральные проекторы и матрицы  $G$ ,  $G^{-1}$  имеют вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = AP_1 + BP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\|R(\lambda)\| = O(1)$  при  $\lambda$  достаточно большом по модулю.

Оказалось, что  $Q_2 f_1 = Q_2 f_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . В частности, выполнено условие

согласования многообразий решения на соседних областях. Также

$$\exists \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \exists \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \exists (E - G^{-1} \frac{\partial Q_2 f_i}{\partial u})^{-1} = E.$$

Условие  $M_i \cdot \|Q_2\| \cdot \|G^{-1}\| = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} < 1$  также имеет место.

Применив формулу (19), получим:

$$u'_1 = G^{-1} \cdot (Q_1(f_1 - Bu_1)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}y_1 \\ \frac{1}{4}x_1 \\ \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}x_1 \end{pmatrix},$$

$$u'_2 = G^{-1} \cdot (Q_1(f_2 - Bu_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}y_2 \\ -\frac{1}{4}x_2 \\ -\frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{4}x_2 \end{pmatrix}$$

Найдем теперь знак  $(\varphi_t + \langle \nabla \varphi; u'_1 \rangle) \cdot (\varphi_t + \langle \nabla \varphi; u'_2 \rangle)$ :

$\varphi_t = 0$ ,  $\nabla \varphi = (2x; 2y; 2z)$ . Т.к. при подсчете на границе разрыва  $u'_1 = -u'_2$ , то  $(\varphi_t + \langle \nabla \varphi; u'_1 \rangle) \cdot (\varphi_t + \langle \nabla \varphi; u'_2 \rangle) = -\langle \nabla \varphi; u'_1 \rangle^2 = -\frac{1}{4}z^2 \cdot (y-x)^2$ . Это выражение не превышает нуля, за исключением точек  $\{(t; x; y; z) \mid z=0\}$  и  $\{(t; x; y; z) \mid x=y\}$ , где выполняется условие (14).

Множество  $\{(t; u) \mid Q_2 Bu = Q_2 f_i(t, u)\}$  при каждом фиксированном  $t \in [t_0; T]$  есть плоскость  $\{(x; y; z) \mid x + y + z = 0\}$  в  $\mathbf{R}^3$ . Следовательно,  $\partial D_i \cap \{(t; u) \mid Q_2 Bu = Q_2 f_i(t, u)\}$  при каждом фиксированном  $t \in [t_0; T]$  – окружность на единичной сфере в данной плоскости, и множество точек, где выполняется условие (14) является конечным, состоящим из четырех точек:

$$(t; u^1) = (t; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}; 0), \quad (t; u^2) = (t; \frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0), \quad (t; u^3) = (t; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}),$$

$$(t; u^4) = (t; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}).$$

Доопределим систему на поверхности разрыва по формуле (12) (т.к. выполнено (13)).

$$\alpha = \frac{\langle u'_2; \nabla \varphi \rangle}{\langle u'_2 - u'_1; \nabla \varphi \rangle} = \frac{\langle u'_2; \nabla \varphi \rangle}{\langle u'_2 - (-u'_2); \nabla \varphi \rangle} = \frac{1}{2}, \quad u'_0 = \frac{1}{2}u'_1 + \frac{1}{2}u'_2 = 0$$

Получили, что на поверхности разрыва в точке  $(t^*; u^*)$  система доопределяется следующим образом:  $u'_0 = 0$ ,  $u(t^*) = u^*$ , что влечет за собой  $u_0(t) \equiv u^*$ . Т.е. после попадания на поверхность разрыва интегральная кривая имеет вид  $(t; u^*)$ , что эквивалентно тому, что фазовая траектория останавливается в точке пересечения с поверхностью разрыва и не двигается.

Осталось только заметить, что внутри областей также существует единственное непрерывное решение:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^0 \cos\left(\frac{t-t_0}{4}\right) - y_1^0 \sin\left(\frac{t-t_0}{4}\right) \\ y_1(t) = y_1^0 \cos\left(\frac{t-t_0}{4}\right) + x_1^0 \sin\left(\frac{t-t_0}{4}\right), \\ z_1(t) = -x_1(t) - y_1(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(t) = x_2^0 \cos\left(\frac{t-t_0}{4}\right) + y_2^0 \sin\left(\frac{t-t_0}{4}\right) \\ y_2(t) = y_2^0 \cos\left(\frac{t-t_0}{4}\right) - x_2^0 \sin\left(\frac{t-t_0}{4}\right) \\ z_2(t) = -x_2(t) - y_2(t) \end{cases}$$

– решения внутри и вне сферы соответственно.

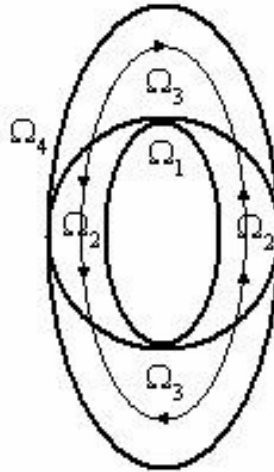


Рис. 5

Т.к. движение внутри областей непрерывности осуществляется по эллипсам, лежащим в плоскости  $x + y + z = 0$ , то можно наблюдать схематическое разбиение плоскости, изображенное на рис. 5.

Здесь при каждом фиксированном  $t$  точки касания эллипсов с окружностью – это точки  $u^j$  ( $j = \overline{1,4}$ ). В области  $\Omega_1$  фазовые траектории никогда не пересекут окружность, в области  $\Omega_2$  пересекут, двигаясь против часовой стрелки, в области  $\Omega_3$  пересекут, двигаясь по часовой стрелке, в области  $\Omega_4$

никогда не произойдет пересечение с окружностью. В случае пересечения окружности фазовая траектория останавливается в точке пересечения.

Как видим, теорема существования и единственности решения в данном примере выполняется.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Изосимов Д. Б. , Рывкин С. Е. Скользящий режим в электроприводе. Аналитический обзор. – М., 1993. – 134 с.
2. Неймарк Ю. И., Коган Н. Я., Савельев В. П. Динамические модели теории управления. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
3. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. – М.: Наука, 1974. – 272 с.
4. Куржанский А.Б., Точилин П.А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. – 2008. – т.44, № 11. – С. 1523-1533
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
6. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения  $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$  // Дифференциальные уравнения. – 1975. – т.11, № 11. – С. 1996-2010.
7. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006. – 273 с.
8. Шварц Л. Анализ: в 2 т. Т.2: перевод с фр. – М.: Мир, 1972. – 528 с.