

УДК 539.3

Сингулярные интегральные уравнения в задаче о свободных колебаниях оболочки вращения с жидкостью

У. Е. Огородник, Е. А. Стрельникова, Ю. С. Шувалова

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
Украинская государственная академия железнодорожного транспорта*

Задача анализа динамического поведения оболочек вращения, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью, сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Использована прямая формулировка метода граничных интегральных уравнений. Дан анализ особенностей ядер полученных интегральных операторов. Разработан метод численной реализации, проведено сравнение численных и аналитических результатов решения системы сингулярных интегральных уравнений. С использованием разработанного метода решена задача о свободных колебаниях упругой полусферы с жидкостью.

Ключевые слова: гидроупругое взаимодействие, методы конечных и граничных уравнений, системы сингулярных интегральных уравнений, логарифмическая особенность

Задачу аналізу динамічної поведінки оболонок обертання, частково заповнених ідеальною нестисливою рідиною, зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Застосовано пряме формулювання методу граничних інтегральних рівнянь. Надано аналіз особливостей ядер отриманих інтегральних операторів. Розроблено метод чисельної реалізації, здійснено порівняння чисельних та аналітичних розв'язків системи сингулярних інтегральних рівнянь. З використанням розробленого методу розв'язано задачу вільних коливань пружної на півсфери з рідиною.

Ключові слова: гідропружня взаємодія, методи граничних та скінченних елементів, системи сингулярних інтегральних рівнянь, логарифмічна особливість.

The problem to analyze dynamics of shells of revolution partially filled with an ideal incompressible liquid was reduced to solving the system of singular integral equations. The direct formulation of boundary integral equation method was in use. The singularities in kernels of integral operators obtained were analyzed. The method of numerical simulation was proposed, the comparison of numerical and analytical solutions of singular integral equations was accomplished. The free vibration problem for hemisphere was solved with usage of proposed method.

Key words: fluid-structure interaction, finite and boundary element methods, systems of singular integral equations, the logarithmic singularity.

1. Введение.

В машиностроении широко используются конструкции, элементами которых являются оболочки вращения с разной формой меридиана. К ним относятся корпуса энергетических установок, насосов, компрессоров, ректификационные колонны, нефтехранилища и т.п.

В данной работе рассматривается задача о свободных и вынужденных колебаниях оболочек вращения при частичном заполнении жидкостью. Задача о свободных колебаниях оболочки, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, сведена к решению системы сингулярных

интегральных уравнений. Использована прямая формулировка метода граничных элементов.

Динамический анализ НДС оболочечных конструкций часто выполняется при помощи конечно-элементных программ [1-6]. Но трехмерный анализ с учетом взаимодействия жидкости и конструкции является сложной и чрезвычайно трудоёмкой задачей. Поэтому для проведения исследования прочности, устойчивости оболочек принимаются упрощенные гипотезы. Предполагается, например, что жидкость состоит из двух частей: движущейся вместе с емкостью как жесткое целое и части, движущейся со своей собственной частотой. Определение границ этих частей жидкости производится эмпирически. Не учитывается также упругость стенок резервуара

В данной работе предложен подход, основанный на использовании метода граничных элементов, для решения задачи о собственных колебаниях упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью. Этот подход имеет определенные преимущества. В разрешающих уравнениях функции и их производные определяются только на границах области, что позволяет существенно уменьшать размерность систем уравнений. Этот метод дает также качественно новые возможности в моделировании связанной динамической задачи, именно он и будет применен в данном исследовании.

2. Постановка задачи.

Уравнения движения упругой оболочки, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, можно записать в форме

$$\mathbf{L}(U) + \mathbf{M}(\ddot{U}) = \mathbf{P}, \quad (1)$$

где \mathbf{L} , \mathbf{M} – операторы упругих и массовых сил;

\mathbf{P} – давление жидкости на смоченные поверхности конструкции;

$U = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор - функция перемещений.

Для связанной задачи гидроупругости представим вектор U в форме $U = ue^{\Omega t}$, где Ω – частота, а u – собственная форма гидроупругих колебаний

Будем искать собственные формы оболочки, частично заполненной жидкостью, в виде

$$u = \sum_{k=1}^N c_k u_k, \quad (2)$$

где u_k – собственные формы колебаний оболочки, незаполненной жидкостью;
 c_k – неизвестные коэффициенты.

$$\mathbf{L}(u_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(u_k), \quad (\mathbf{M}(u_k), u_j) = \delta_{kj}. \quad (3)$$

Таким образом,

$$(\mathbf{L}(u_k), u_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj}. \quad (4)$$

где Ω_k – k -а частота собственных колебаний незаполненной конструкции.

Эти соотношения показывают, что собственные формы колебаний незаполненной конструкции ортонормированы по матрице масс.

Рассмотрим правую часть уравнения (1). Отметим, что вектор \mathbf{P} направлен по нормали к смоченным поверхностям, вследствие того, что идеальная жидкость создает только нормальную составляющую давления на смоченные поверхности. Считаем, что $|\mathbf{P}| = p$.

Предполагается, что движение жидкости является безвихревым, т.е. существует потенциал скоростей Φ [7]. Допустим также, что уровень заполнения может меняться.

В предположении, что скорость изменения уровня жидкости задана как функция только от времени $V_0(t)$ (т.е. является гармонической функцией), в соответствии с интегралом Коши-Лагранжа величина p имеет вид

$$p = -\rho_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

где ρ_2 – плотность жидкости.

Для потенциала скоростей имеем следующую краевую задачу

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{S_0} = 0.$$

Разыскиваем потенциал скоростей Φ в виде ряда

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k \varphi_k. \tag{5}$$

На свободной поверхности должно быть выполнено условие $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, где ζ - функция, определяющая положение свободной поверхности.

Для функций φ_k имеем следующие краевые задачи

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = w_k, \quad \varphi_k \Big|_{S_0} = 0. \tag{6}$$

3. Сведение смешанной задачи для уравнения Лапласа к системе сингулярных интегральных уравнений

Опишем решение смешанной задачи для уравнения Лапласа (6). Опуская индекс k в (6), будем искать гармоническую функцию φ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев [7], т. е. используем прямую формулировку метода граничных интегральных уравнений.

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS \tag{7}$$

Для смешанной задачи (6) представление (7) приводит к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$2\pi\varphi(P_0) + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P-P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_1; \tag{8}$$

$$\iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P-P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_0$$

относительно неизвестных функций φ и q . При этом функция φ , определенная на поверхности S_1 , представляет собой давление на смоченную поверхность оболочки, а функция q , определенная на поверхности S_0 , представляет собой нормальную составляющую скорости жидкости на свободной поверхности.

Будем искать решения системы интегральных уравнений (8) в виде

$$\varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta; \quad q = q(r, z) \cos \alpha \theta. \tag{9}$$

В цилиндрических координатах имеем

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma; P_0 \in S_1, \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma; P_0 \in S_0,$$

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k); \quad a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z^* - z_0)^2; \quad b = 2\rho\rho_0.$$

Установим характер особенностей в ядрах системы (10).

Из представления функции $F_0(k)$ для k , близких к 1, согласно [8] имеем

$$F_0(k) = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1.2}\right) k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1.2} - \frac{2}{3.4}\right) k'^4 + \dots \quad k'^2 = 1 - k^2$$

Отсюда следует, что $F_0(k)$ имеет логарифмическую особенность при $z \rightarrow z_0$, что соответствует k , близким к 1.

Для произвольных целых α будем пользоваться такими формулами $F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} F_0(k) + N_{\alpha}(k)$, где

$$N_{\alpha}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{f_{\alpha}(\theta) d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad f_{\alpha}(\theta) = \begin{cases} -2 \sin^2 \alpha \theta; & \alpha = 2m + 1; \\ 2 \cos^2 \alpha \theta; & \alpha = 2m. \end{cases}$$

Из приведенных соотношений видно, что функция $F_{\alpha}(k)$ также имеет логарифмическую особенность. Функция $E_{\alpha}(k)$ не имеет особенности при $z \rightarrow z_0$.

Рассмотрим функцию

$$Q(z, z_0) = \frac{n_r}{2r} \frac{r_0^2 - r^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} + \frac{z_0 - z}{a-b} n_z,$$

представляющую собой множитель при функции $E_{\alpha}(k)$ в ядре. Покажем, что она также не имеет особенности при $z \rightarrow z_0$.

Поскольку рассматривается малая особая область, то можно считать, что выполнены приближенные равенства, следующие из разложений в ряд Тейлора

$$r^2 - r_0^2 \approx 2r_0 r'_0 (z - z_0); \quad a - b = (r - r_0)^2 + (z - z_0)^2 \approx (1 + (r'_0)^2) (z - z_0)^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q(z, z_0) &\approx \frac{n_r}{2r_0} \frac{-(z_0 - z) 2r_0 r'_0 + (z_0 - z)^2}{(z_0 - z)^2 (1 + (r'_0)^2)} + \frac{z_0 - z}{(z_0 - z)^2 (1 + (r'_0)^2)} n_z = \\ &= \frac{1}{(z_0 - z) (1 + (r'_0)^2)} \left[\frac{n_r [-2r_0 r'_0 + (z_0 - z)]}{2r_0} + n_z \right] = \frac{n_r}{2r_0 (1 + (r'_0)^2)} - \frac{1}{(z_0 - z) (1 + (r'_0)^2)} (n_r r'_0 + n_z). \end{aligned}$$

Так как

$$|\mathbf{n}|^2 = r^2 + r^2 r'^2 = r^2 (1 + r'^2), \quad n_r = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}}; \quad n_z = \frac{-r'}{\sqrt{1 + r'^2}}.$$

Отсюда получаем, что $n_r r'_0 + n_z = 0$. А, следовательно, при $z \rightarrow z_0$ имеем

$$Q(z, z_0) \rightarrow \frac{n_r}{2r_0(1+(r'_0)^2)} = \frac{1}{2r_0(\sqrt{1+(r'_0)^2})^3},$$

т. е. функция $Q(z, z_0)$ является ограниченной величиной.

4. Тестирование метода граничных элементов

В [9] получен ряд аналитических решений для уравнения

$$\iint_s \frac{\gamma(x, y) dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = f(x_0, y_0) \quad (11)$$

с правыми частями специального типа. Для $f(x_0, y_0) = \pi^2$ аналитическое решение уравнения (11) имеет вид $\gamma(x, y) = 1$. Мы рассмотрели уравнение (11) с такой правой частью и свели его к решению одномерного уравнения

$$4 \int_0^R \frac{\gamma(\rho)}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \frac{\rho}{\rho + \rho_0} F_0(k) d\rho = \pi^2 \quad (12)$$

В уравнении (12) была сделана замена переменной $\rho = R \sin \vartheta$. Это позволило избавиться от корневой особенности при ρ , близких к R . При разбиении области интегрирования на M частей в точках $\rho_j = R \sin \vartheta_j$; $\vartheta_j = \pi \left(j - \frac{1}{2} \right) / 2M$, $j = 1, \dots, M$ при $M = 40$ были получены значения интеграла, приведенные в табл. 1 и демонстрирующие высокую точность вычислений.

Таблица 1. Точность вычисления интеграла в (11)

Номер элемента	(x, y)
1	1,000092
15	1,000155
25	1,000165
35	1,000168

5. Собственные частоты и формы полусферической оболочки, заполненной жидкостью.

Рассматривается полусферическая оболочка, наполненная жидкостью, со следующими параметрами: радиус $R = 5.08$ м, толщина $h = 0.0254$ м, модуль упругости $E = 70$ ГПа ($0.7 \cdot 10^{11}$ Па), коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность материала $\rho = 2770$ кг/м³. Жидкость считается несжимаемой, плотность 1000 кг/м³. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки ($u_z = u_r = u_\varphi = 0$). Уровень заполнения жидкостью обозначен H .

Проведены расчеты собственных колебаний сферы по предложенной методике. Ниже приведены собственные частоты колебаний полусферы с жидкостью для разного числа узловых диаметров α в сравнении с результатами, полученными по комплексу ANSYS с использованием оболочечного элемента Shell63, и данными работы [1].

В таблице 2 приведены собственные частоты гидроупругих колебаний оболочки для различного числа α . Полученные результаты сравниваются с данными В.В.Мокеева [1] (для сжимаемой жидкости) и с результатами расчетов по комплексу ANSYS (для несжимаемой жидкости). Здесь приведены результаты для следующей сетки: 200 элементов на поверхности оболочки; 30 элементов на свободной поверхности; число сухих частот в разложении – 30. Число α в таблице 2 представляет собой номер гармоники в уравнении (9).

Таблица 2. Частоты колебаний полусферической оболочки с жидкостью

α	n	Частоты (Гц)		
		МГЭ	[1]	ANSYS (Shell63)
0	1	22.17	22.00	22.07
	2	33.50	33.38	33.41
	3	41.38	42.02	41.30
1	1	22.23	22.44	22.18
	2	34.77	36.88	34.68
	3	43.03	48.92	42.98
2		31.48	31.57	31.50
		40.49	41.55	40.50
		47.38	50.29	
3		36.55	36.98	36.65
		44.44	46.27	
		50.78	54.86	

На рис.1 показана зависимость изменения низшей собственной частоты оболочки от уровня заполнения H/R .

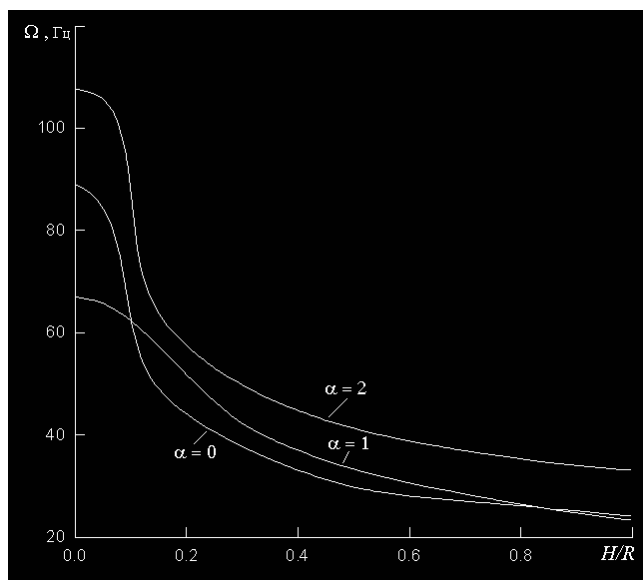


Рис. 1. Зависимость частот от уровня заполнения жидкостью.

Полученные результаты свидетельствуют о достоверности и эффективности предложенного подхода.

6. Выводы

Разработан эффективный численный метод определения частот и форм колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Задача определения давления сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Интегрирование по объему жидкости осуществляется лишь вдоль меридиана оболочки и радиуса свободной поверхности жидкости, т.е. является одномерным. В этом заключается основное преимущество нашего метода, основанного на комбинации метода граничных интегральных уравнений, метода конечных элементов и разложения в ряды Фурье. Проведены численные исследования частот и форм полусферической оболочки, частично заполненной несжимаемой жидкостью.

7. Благодарности

Авторы выражают благодарность Юрию Владимировичу Ганделю за постоянную поддержку и интерес к нашей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов// Изв. РАН. Механика твердого тела.– 1998.–№ 6.–С.166-174.
2. S.M. Hasheminejad, M. Aghabeigi, Liquid sloshing in half-full horizontal elliptical tanks, J. Sound Vib. 324, pp. 332–349, 2009.
3. L. Xu, Fluid Dynamics in Horizontal Cylindrical Containers and Liquid Cargo Vehicle Dynamics, Ph.D. Thesis, University of Regina, Saskatchewan, 2005.
4. Celebi, M.S., Kim, M.H., Beck, R.F. Fully Non-linear 3-D Numerical Wave Tank Simulation. J. of Ship Research, Vol.42, No.1, pp 33-45. 1998
5. K. Modaressi-Tehrani, S. Rakheja, I. Stiharu, Three-dimensional analysis of transient slosh within a partly-filled tank equipped with baffles, Veh. Syst.Dyn. 45, pp. 525–548, 2007.
6. L. Xu, Fluid Dynamics in Horizontal Cylindrical Containers and Liquid Cargo Vehicle Dynamics, Ph.D. Thesis, University of Regina, Saskatchewan, 2005.
7. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C. Boundary Element Techniques, Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
9. Вандышев К.В., Еселева Е.В., Стрельникова Е.А. Собственные формы сингулярных и гиперсингулярных операторов на круге/ Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», Харьков-Херсон, 2009, ч.1, С.34-37.