УДК 519.6

Решение обратной задачи интервального анализа поисковым методом

В. Ю. Дубницкий, А. М. Кобылин
Харьковский институт банковского дела УБС НБУ, Украина

Предложено для уменьшения неопределенности в процессе выполнения финансово-экономических расчетов использовать систему нестандартных интервальных арифметических операций при решении обратной задачи интервального анализа поисковым методом. Показана ее эффективность в сравнении с результатами аналогичных вычислений, выполненных на основе классической интервальной математики.

Ключевые слова: *Банковские операции, финансовая математика, интервальные вычисления, интервальный анализ.*

Запропоновано для зменшення невизначеності в процесі виконання фінансово-економічних розрахунків використовувати систему нестандартних інтервальних арифметичних операцій при вирішені зворотної задачі інтервального аналізу пошуковим методом. Показана її ефективність у порівнянні з результатами аналогічних обчислень, виконаних на основі класичної інтервальної математики.

Ключові слова: *Банківські операції, фінансова математика, інтервальні обчислення, інтервальний аналіз.*

In order to reduce uncertainty in financial and economic calculations, we propose to apply a system of non-standard interval arithmetic operations if search method is used for solving interval analysis inverse problem. The efficiency of such approach is shown as compared to results of similar calculations performed on the basis of classic interval mathematics.

Key words: *Banking operations, financial mathematics, interval calculations, interval analysis.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Интервальный анализ как научное направление сформировался относительно недавно, в основном, как метод автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ, обусловленный тем, что во многих вычислительных задачах возникла потребность не только вычисления приближенных решений, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям. Ценность интервальных решений заключается в том, что они в целом позволяют получать наиболее достоверные решения исходных задач, учитывающие возможные диапазоны изменения исходных и вычисляемых значений [1, 2].

Из классической математики известно, что замкнутый числовой промежуток можно представить в виде интервала. Например, интервал между переменными $x_1 \in R$ и $x_2 \in R$ содержит все вещественные числа из множества R между x_1 и x_2, включая их самих, и обозначается как $[x_1, x_2]$. Соответственно, интервальную неопределенность можно понимать как состояние неполного (частичного) знания о какой-либо величине, когда возможно лишь указание ее принадлежности к данному интервалу. Иными словами, можно обозначить лишь границы возможных значений рассматриваемой величины (либо пределы ее изменения), и ширина получающегося интервала является естественной мерой интервальной неопределенности (неоднозначности). Выполнение арифметических операций над величинами, имеющими интервальную неопределенность, приводит к интервальной неопределенности в ответе, и интервал результата должен содержать все возможные результаты выполнения операции над элементами исходных интервалов. Это значит, что в результате интервальных вычислений получающийся интервал гарантированно содержит множество всевозможных ответов «точечных» задач, данные к которым содержались в исходных интервалах.

Вычислительный эксперимент [1] на базе известных методов интервальной математики показал, что для сложных задач применение интервального анализа часто дает неудовлетворительные результаты из-за чрезмерной длины получаемых интервалов. Чаще всего это происходит из-за того, что «пессимистические» оценки точности оказываются на порядок хуже, чем реально достигаемая точность результатов [2, 3]. Кроме этого, возникает естественное противоречие между относительно большим диапазоном интервальных значений, отражающим низкую точность соответствующих значений, и предельно точным заданием границ интервалов □2-5□.

2. Истоки исследования авторов

Первая монография, полностью посвященная интервальному анализу, была опубликована Р. Е. Муром в 1966 г. [5]. В этой монографии были последовательно изложены основы нового направления в вычислительной математике, а также высказана точка зрения, что первым «интервальщиком» следует считать Архимеда, широко использовавшего в своих расчетах двусторонние приближения, в частности, для определения границ числа π(отношения длины окружности к ее диаметру). Предложенные Муром новые интересные постановки задач и поучительные применения интервальной техники оказали решающее влияние на становление и развитие нового научного направления во всем мире. Началом широкого распространения интервальных методов в компьютерных технологиях можно считать первый международный симпозиум по интервальному анализу, прошедший в Великобритании в январе 1968 года [6]. На русском языке первая достаточно известная работа по интервальным вычислениям была опубликована Ю.И. Шокиным в 1981 году [7]. «Интервальная идея» начала развиваться в XX веке в тесной связи с развитием и распространением практических инженерных вычислений. Но оформление интервального анализа в самостоятельную научную дисциплину стало возможным лишь с широким распространением ЭВМ. Последующие исследования показали, что методы интервального анализа могут служить не только для учета ошибок округления на ЭВМ, но и являются достаточно эффективными аналитическими методами для теоретических исследований [8]. Еще в 1931 году Р. Янг (Великобритания) [9] предложил арифметику для вычислений с множествами чисел. Американский ученый П. Двайер в 1951 г. рассматривал специальный случай замкнутых интервалов в связи с необходимостью учета погрешностей в численном анализе [10]. В 1956-58 гг. в Польше были опубликованы работы М. Вармуса [11] и Т. Сунаги[12], предложивших классическую интервальную арифметику и намечавшие ее приложения. При этом в работе Т. Сунаги [12] впервые были использованы и современные термины «интервал», «интервальный». Кроме того, им были заложены основы интервального алгебраического формализма и даны весьма нетривиальные примеры применений новых методов, к примеру, в численном решении алгебраических уравнений и задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [13]. В 1959- м году начал публиковать свои работы в области интервальных вычислений также и Р. Э. Мур, на базе чего к 1966 году была издана упомянутая выше монография [6].

В Советском Союзе «интервальную» историю можно отсчитывать с 20-х годов прошлого века, и связана она с именем видного русского математика Владимира Модестовича Брадиса, который широко известен своими математическими таблицами. В. М. Брадис предложил так называемый метод границ – способ организации вычислений, приводящий к достоверным двусторонним границам точного значения вычисляемого результата, фактически аналогичный интервальной арифметике. Работая в Тверском Педагогическом институте, он опубликовал целый ряд работ на эту тему [14-16]. В 1962-м году в одном из первых выпусков «Сибирского математического журнала» была опубликована статья Леонида Витальевича Канторовича [17], обозначившего эту тематику как одну из приоритетных для активно набирающей обороты вычислительной науки. В 1982 г. было издано учебное пособие Т. Н. Назаренко, Л.В. Марченко по интервальным методам [18], а в 1986 г. – монография С. Л. Калмыкова, Ю. И. Шокина, З. Х. Юлдашева [19]. Обширная и подробная библиография по интервальным анализу и вычислениям имеется, в частности, в работах [20-22]. К настоящему времени разработаны различные приемы интервальных вычислений [20, 22-25] и множество пакетов прикладных программ и алгоритмических макроязыков, реализующих элементы интервального анализа на машинном уровне для нескольких типов ЭВМ [24,25].

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Одной из причин использования интервальных методов является то, что современные классические ЭВМ не учитывают, степень неточности большинства исходных данных. Даже невинно выглядящее дробное число 1/10 может порождать в определенных случаях вычислительную проблему, т. к. компьютер не может выполнять точные вычисления с этим числом [28]. В той мере, в какой точные вычислительные результаты используются для принятия критических решений, неучтенные ошибки вычислений означают повышенный риск. Очевидно, что чем сильнее зависимость точности входных данных от точности вычисляемых значений, чем более важной для последних является их корректность, и тем больше допускаемый риск. Например, широко известен такой классический пример, как катастрофа с американской зенитной ракетой Patriot 25 февраля 1991 года в Дхаране (Саудовская Аравия) [29]. Он показывает, что может произойти, если существующие вычисления с плавающей точкой будут и далее некритично применяться к новым задачам. В тот день батарея ракет Patriot не смогла перехватить иракскую ракету Scud, по официально названной причине: неадекватное вычисление в формате с плавающей точкой. Дело в том, что система управления ракеты Patriot имела внутренние системные часы, отсчитывающие время в десятых долях секунды, т. е. для перевода времени в формат с целыми секундами компьютер просто умножает данные на 1/10. Однако, как уже упоминалось выше, на современных классических ЭВМ дробь 1/10 не имеет точного внутреннего представления, и должна быть приближена подходящей двоичной дробью. В качестве такого приближения американские разработчики взяли 24-битное двоичное число 0.00011001100110011001100, которое меньше, чем 1/10, примерно на одну миллионную. Эта на первый взгляд ничтожно малая погрешность постепенно накапливалась и, после четырех дней непрерывной работы расхождение системного времени с точным временем достигло 1/3 секунды, что, в конечном счете, привело к ошибке наведения в 700 метров. В результате ракета, выпущенная на перехват Scud, попала в помещение с американскими военнослужащими, убив 28 человек [29]. Вышеприведенный и подобные ему (не столь катастрофичные) случаи, наглядно демонстрируют, что являющиеся основой современных цифровых ЭВМ числа в формате с плавающей точкой, оказываются не вполне адекватными как реальному физическому миру, так и его математическим моделям, в частности, математическому понятию вещественного (действительного) числа. Основные недостатки современного представления чисел с плавающей точкой заключаются в следующем:

– большинство чисел вещественной оси не могут быть представлены точно числами с плавающей точкой, имеющими конечную длину мантиссы и, соответственно, свойства арифметических операций над числами с плавающей точкой отличаются (из-за неизбежных округлений) от свойств идеальных математических операций над вещественными числами;

– число в формате с плавающей точкой не несет никакой информации о точности той величины, которую оно представляет.

Получается, что существующая модель вычислений с плавающей точкой не предназначена ни для адекватного представления исходных значений, ни для отслеживания вычислительных ошибок. В связи с этим постепенно усиливается тенденция к переходу от точечных значений к интервальным, что влечет за собой стремительное развитие интервальной арифметики.

4. Используемые методы решения задач интервального анализа

Интервальный тип данных и интервальная арифметика реализуются на современных ЭВМ, как правило, с помощью представления интервала в виде пары чисел – одного для левого конца интервала, а другого для правого. При этом существующее аппаратное обеспечение, в частности, арифметика чисел с плавающей точкой, используются без каких-либо изменений, так как корректность получающейся интервальной арифметики может быть обеспечена так называемыми направленными округлениями. Например, там, где в задачах внешнего интервального оценивания в процессе вычислений требуется округление результата, нижняя граница интервала должна округляться вниз, а верхняя граница интервала – вверх. Таким образом, даже неизбежные ошибки округления при вычислениях с плавающей точкой будут строго и систематически учитываются в процессе выполнения интервальной программы. В качестве примера, на рис. 1 показано, как иррациональные числа в различных числовых шкалах представлены в виде различных интервалов (числовых промежутков), причем наглядно проиллюстрировано изменение «ширины» этих интервалов. Интервалы чисел, представленных в вещественном формате (шкала floats) являются достаточными, так как в границы интервалов включены и ошибки округления исходных иррациональных чисел:

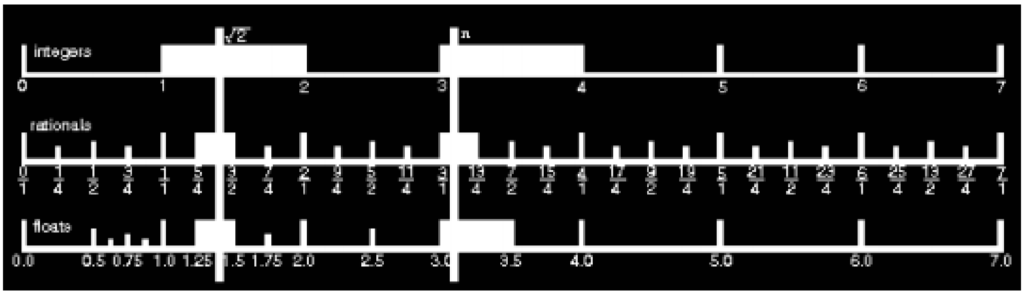


Рис. 1 – Представление иррациональных чисел в виде интервалов (integers – целые числа, rationales – рациональные числа, floats –вещественные числа) [28, с. 485].

Данный пример отражает основные положения интервального подхода к вычислениям на ЭВМ: исходные данные и промежуточные результаты представляются граничными значениями, над которыми и производятся все операции. При этом сами операции (прежде всего арифметические) определяются таким образом, что результат соответствующей точной операции обязательно лежит внутри вычисляемых границ.

$$\frac{1}{3} \in [0.33333, 0.33334]$$

$$\sqrt{2} \in [1.4142, 1.4143]$$

$$\pi \in [3.1415936, 3.1415937]$$

Традиционно аппаратное обеспечение компьютеров поддерживает две числовые системы: целые числа и числа с плавающей точкой. Целочисленная арифметика оперирует конечным подмножеством множества целых чисел и позволяет безошибочно осуществлять адресные вычисления, компиляцию и другие формы трансляции, а также реализовать различные алгоритмы типа поиска и сортировки [31].

Произвольное вещественное число представляется бесконечной систематической (например, десятичной или двоичной) дробью. На практике в научных и инженерных вычислениях вещественные числа приходится представлять в компьютере конечными дробями, чаще всего числами с плавающей точкой. Арифметика чисел с плавающей точкой поддерживается аппаратным обеспечением компьютеров и поэтому выполняется очень быстро, однако каждая операция с вещественным числом может вносить погрешности, накопление которых может существенно исказить результат [32].

Современные ЭВМ практически полностью базируются на двоичной логике и арифметике, обеспечивающих до недавнего времени практически все потребности компьютерных вычислений. Однако в 90-е годы прошлого века произошли качественные изменения, как в развитии логических основ, так и в области компьютерных технологий, которые обусловили актуальность соответствующих изменений как в кодо-логическом [33], так и в алгоритмическом [34] базисе современных компьютерных технологий. Суть данных изменений может быть сведена к переходу от преобладания фиксированной точечной определенности к эволюционирующей множественности и неопределенности.

К недостаткам привычного, подхода можно отнеси, например, отсутствие ассоциативности в цепочке операций сложения и умножения. Выходит, что результат операций типа скалярного умножения будет разным в зависимости от особенностей компьютерного окружения — транслятора, процессора, выбранной разрядности, способов округления и т. д. Как следствие, выполнение одного и того же алгоритма в разных компьютерных окружениях приводит к различным, порой совершенно непохожим друг на друга, результатам.

Постепенно у критически настроенных исследователей все чаще стал возникать вопрос, вынесенный в заголовок обобщающей статьи немецкого математика проф. К. Никеля: «Can we trust the results of our computing?» («Можем ли мы доверять результатам наших вычислений?»). Действительно, беспристрастный анализ традиционного подхода к численным вычислениям и соответствующего инструментария (алгоритмов, языков программирования и аппаратного обеспечения), проведенный специалистами в области вычислительной математики, привел к неутешительному выводу о том, что алгоритм, сформулированный в привычных нам терминах, попросту не доопределён и потому обладает, вообще говоря, непредсказуемыми свойствами. (На одной из крупных научных конференций ректор Технического университета Вены проф. П. Скалички наполовину с юмором, а наполовину всерьез заявил, что с тех пор, как подробнее узнал о принятых способах выполнения машинных вычислений, очень опасается ходить по мостам и оказываться внутри других сложных инженерных сооружений…).

В рамках интервального подхода исходные данные и промежуточные результаты представляются граничными значениями, над которыми и производятся все операции. При этом сами операции (прежде всего арифметические) определяются таким образом, что результат соответствующей точной операции обязательно лежит внутри вычисляемых границ.

Приведем правила выполнения операций вещественной интервальной арифметики:

Арифметические операции с интервальными числами выполняют согласно правилам классической интервальной арифметики [19, 20]:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left[\underline{\boldsymbol{a}};\overline{\boldsymbol{a}}\right]+\left[\underline{\boldsymbol{b}};\overline{\boldsymbol{b}}\right]=\left[\underline{\boldsymbol{a}}+\underline{\boldsymbol{b}};\overline{\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{b}}\right]; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\left[\underline{\boldsymbol{a}};\overline{\boldsymbol{a}}\right]-\left[\underline{\boldsymbol{b}};\overline{\boldsymbol{b}}\right]=\left[\underline{\boldsymbol{a}}-\overline{\boldsymbol{b}};\overline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{b}}\right]; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\left[\underline{\boldsymbol{a}};\overline{\boldsymbol{a}}\right]*\left[\underline{\boldsymbol{b}};\overline{\boldsymbol{b}}\right]=\left[\min\left\{\underline{\boldsymbol{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{b}},\underline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{b}}\right\},\max\left\{\underline{\mathrm{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{b}},\underline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{b}}\right\}\right]; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}=\left[\underline{\boldsymbol{a}};\overline{\boldsymbol{a}}\right]/\left[\underline{\boldsymbol{b}};\overline{\boldsymbol{b}}\right]=\left[\underline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{a}}\right]*\left[1/\overline{\mathrm{b}},1/\underline{\boldsymbol{b}}\right];\ 0\notin\boldsymbol{b} \tag{4}$$

Обоснование этих правил приведено в работе [19, 20].

Возникающая при вычислении границ погрешность учитывается с помощью направленных округлений: меньшая из вычисленных границ получается округлением до ближайшего машинного числа с недостатком, а большая – с избытком. Таким образом, интервальный подход позволяет единообразным способом учесть все виды погрешностей вычислительного процесса: приближенно известные исходные данные заключаются в гарантированно содержащие точное значение границы. Погрешности округлений лишь несколько расширяют границы промежуточных результатов, а сам вычислительный метод строится так, чтобы его погрешность также включалась в вычисленные границы конечного результата [20].

Полезно выписать определение интервального умножения в виде так называемой таблицы Кэли [21], дающей представление результата операции в зависимости от различных комбинаций значений операндов. Для этого выделим в ***IR*** следующие подмножества:

$$P := \left\{a \in IR \mid \underline{a} \ge 0 \text{ и } \overline{a} \ge 0\right\} \text{- неотрицательные интервалы} \tag{5}$$

$$Z := \left\{a \in IR \mid \underline{a} \le 0\, \overline{\mathrm{a}}\right\} \text{- нульсодержащие интервалы} \tag{6}$$

$$-P := \left\{a \in IR \mid -a \in P\right\} \text{- неположительные интервалы} \tag{7}$$

В целом ***IR*** = $\mathrm{P} \cup \mathrm{Z} \cup (-\mathrm{P})$. Тогда интервальное умножение (6) может быть описано с помощью Табл.1, особенно удобной при реализации этой операции на ЭВМ. В частности, при умножении интервала на число полезно помнить следующее простое правило:

$$\mu \cdot \boldsymbol{a} = \begin{cases} \left[\mu\underline{\boldsymbol{a}}, \mu\overline{\boldsymbol{a}}\right], & \text{если } \mu \ge 0 \\ \left[\mu\overline{\boldsymbol{a}}, \mu\underline{\boldsymbol{a}}\right], & \text{если } \mu < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Таблица 1. Интервальное умножение

$\cdot$	$\mathrm{b} \in \mathrm{P}$	$\mathrm{b} \in \mathrm{Z}$	$\mathrm{b} \in -\mathrm{P}$
$\mathrm{a} \in \mathrm{P}$	$[\underline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}]$	$[\overline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}]$	$[\overline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}, \underline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}]$
$\mathrm{a} \in \mathrm{Z}$	$[\underline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}]$	$[\min\{\underline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}\}, \max\{\underline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}\}]$	$[\overline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}, \underline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}]$
$\mathrm{a} \in -\mathrm{P}$	$[\underline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}, \overline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}]$	$[\underline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}, \underline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}]$	$[\overline{\mathrm{a}}\overline{\mathrm{b}}, \underline{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{b}}]$

Как можно осуществить требуемое расширение классической интервальной арифметики? Здесь нам на выручку приходит абстрактная алгебра. С более общей точки зрения арифметика ***IR*** является коммутативной полугруппой как относительно сложения, так и относительно умножения. Известно (см., например, [38]), что всякая коммутативная полугруппа, в которой справедлив так называемый закон сокращения, может быть вложена в группу (или, что эквивалентно, расширена до группы), т. е. в действительно более богатую алгебраическую структуру, в которой каждый элемент имеет обратный. Интервальная арифметика ***IR*** как раз таки является коммутативной полугруппой, удовлетворяющей закону сокращения относительно сложения, а относительно умножения полугруппу с законом сокращения образуют все интервалы, не содержащие нуля.

Все технические конструкции, необходимые для такого согласованного расширения интервальных полугрупп по сложению и умножению, были реализованы немецким исследователем Э. Каухером ещё в 70-е годы XX века. В работах [39, 40, 41] он построил алгебраическую систему, которую мы будем обозначать ***KR***, включающую в себя классическую интервальную арифметику ***IR*** как собственное подмножество. Она вполне удовлетворяет нашим требованиям, так как является группой по сложению и почти группой по умножению. Кроме того, в ***IR*** без каких-либо ограничений выполнимы операции взятия нижней и верхней граней относительно упорядочения интервалов по включению, т. е. ***KR*** обладает лучшими в сравнении с классической арифметикой ***IR*** порядковыми свойствами.

Э. Каухер при расширении ***IR*** опирался на свойство монотонности интервальных арифметических операций по включению и сохранил его в новой интервальной арифметике. Подчёркивая хорошие свойства новой алгебраической системы ***KR***, мы будем называть её полной интервальной арифметикой или, по имени её создателя, интервальной арифметикой Каухера.

Ещё одним замечательным свойством полной интервальной арифметики Каухера является то, что именно она является минимаксной интервальной арифметикой, в которой вычисление минимаксов может быть осуществлено на уровне сложения, вычитания, умножения и деления.

Элементами полной интервальной арифметики ***KR*** являются пары вещественных чисел $[\eta, \vartheta]$, не обязательно связанных соотношением $\eta \leq \vartheta$. Таким образом, ***KR*** получается присоединением неправильных интервалов$[\eta, \vartheta]$, $\eta > \vartheta$, к множеству ***IR*** = $\{[\eta, \vartheta] \mid \eta, \vartheta \in \mathrm{R},\ \ \eta \leq \vartheta\}$ правильных интервалов и вещественных чисел (отождествляемых с вырожденными интервалами нулевой ширины). Элементы арифметики Каухера и образуемые из них более сложные объекты (векторы, матрицы) мы будем выделять жирным шрифтом, как и обычные интервалы. При этом, если $\mathbf{a}$ = $[\eta, \vartheta]$, то η называется левым (или нижним) концом интервала $\mathbf{a}$ и обозначается $\underline{\mathbf{a}}$ или **inf** $\mathbf{a}$, а ϑ называется правым (или верхним) концом интервала $\mathbf{a}$ и обозначается $\overline{\mathbf{a}}$ или **sup** $\mathbf{a}$. Как и прежде, интервал $\mathbf{a}$ назовём уравновешенным, если $\underline{\mathbf{a}} = -\overline{\mathbf{a}}$.

Определение 1. Абсолютной величиной (модулем) интервала а называется величина

$$|\boldsymbol{a}| = \max\left\{|\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}|\right\} \tag{9}$$

Правильные и неправильные интервалы, две половинки ***KR***, меняются местами в результате отображения дуализации dual: ***KR***$\rightarrow$***KR***, меняющего местами (переворачивающего) концы интервала, т. е. такого что

$$\operatorname{dual} \boldsymbol{a} := \left[\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}\right] \tag{10}$$

Правильной проекцией интервала **a** называется величина

$$\mathrm{pro}\,\boldsymbol{a} := \begin{cases} \boldsymbol{a}, & \text{если } \boldsymbol{a} \text{ - правильный,} \\ \mathrm{dual}\,\boldsymbol{a}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{11}$$

Аналогично классической интервальной арифметике $\boldsymbol{IR}$ отношение включения одного интервала в другой определяется в $\boldsymbol{KR}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{a}} \geq \underline{\boldsymbol{b}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}} \tag{12}$$

Например, $[3, 1] \subseteq [2, 2] = 2 \in \mathrm{R}$.

Помимо теоретико-множественного включения на множестве интервалов $\boldsymbol{KR}$ существует ещё одно частичное упорядочение, которое естественно обобщает линейный порядок на вещественной оси.

Определение 2. Для интервалов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \boldsymbol{KR}$ условимся считать, что $\mathbf{a}$ не превосходит $\mathbf{b}$ и писать $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}$. Интервал называется неотрицательным, т.е. «$\geq$ 0», если неотрицательны оба его конца. Интервал называется неположительным, т.е. «$\leq$0», если неположительны оба его конца.`

Пример. [1, 2] $\leq$ [3, 2], причём оба сравниваемых интервала [1, 2] и [3, 2] неотрицательны.

Сложение определяется в $\boldsymbol{KR}$ совершенно так же, как в классической интервальной арифметике:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := \left[\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}\right] \tag{13}$$

Но теперь из факта существования неправильных интервалов следует то, что каждый элемент а из $\boldsymbol{KR}$ имеет единственный обратный по сложению (противоположный), обозначаемый через **opp a,** и из равенства **a** + **opp a** = **0** следует

$$\mathrm{opp}\,\boldsymbol{a} := \left[-\underline{\boldsymbol{a}}, -\overline{\boldsymbol{a}}\right]. \tag{14}$$

Таким образом, относительно сложения арифметика $\boldsymbol{KR}$ является коммутативной группой, изоморфной аддитивной группе стандартного линейного пространства R^2. Для краткости мы будем обозначать операцию, обратную сложению, так называемое внутреннее (алгебраическое) вычитание в $\boldsymbol{KR}$, через, $\ominus$ так что

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b} := \boldsymbol{a} + \mathrm{opp}\,\boldsymbol{b} = \left[\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}\right]. \tag{15}$$

Для того чтобы выписать явные формулы для умножения в полной интервальной арифметике, выделим в $\boldsymbol{KR}$ следующие подмножества:

$$\boldsymbol{P} := \left\{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{KR} \mid \left(\underline{\boldsymbol{a}} \geq 0\right) \& \left(\overline{\boldsymbol{a}} \geq 0\right)\right\} - \text{ неотрицательные интервалы} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{Z} := \left\{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{KR} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \leq 0 \leq \overline{\boldsymbol{a}}\right\} - \text{нульсодержащие интервалы} \tag{17}$$

$$-\boldsymbol{P} := \left\{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{KR} \mid -\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}\right\} - \text{неположитедьные интервалы} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{dual\ Z} := \left\{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{KR} \mid \boldsymbol{dual} \in \boldsymbol{Z}\right\} - \text{ интервалы, содержащиеся в нуле} \tag{19}$$

В целом $\boldsymbol{KR}$ = P$\cup$Z$\cup$(–P) $\cup$(dual Z). Тогда умножение в интервальной арифметике Каухера может быть описано таблицей [5], которая получается дополнением таблицы 1 ещё одной строкой и ещё одним столбцом, соответствующем случаю операндов из множества dual Z.

Замечание. Умножение в арифметике Каухера допускает нетривиальные делители нуля. Например, [–1,2]•[5,–3]=0. Интервальное умножение в арифметике Каухера оказывается коммутативным и ассоциативным [39, 40, 41], но группу по умножению в ***KR*** образуют лишь интервалы $\mathbf{a}$, для которых $\underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{a}} >$ 0, поскольку закон сокращения не выполняется ни на каком более широком подмножестве ***KR***.

Рассмотренные методы интервального анализа имеют достаточно развитые методы для решения многих задач, но общий недостаток этих методов – широкие интервальные оценки результата, что иногда неприменимо не только для проведения практических расчетов, но и для дальнейшего анализа.

Таблица 2. Таблица Кэли для операции умножения в интервальной арифметике Каухера

	$\boldsymbol{b \in P}$	$\boldsymbol{b \in Z}$	$\boldsymbol{b \in -P}$	$\boldsymbol{b \in dual\ Z}$
$\boldsymbol{a \in P}$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$
$\boldsymbol{a \in Z}$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	0
$\boldsymbol{a \in -P}$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\underline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$
$\boldsymbol{a \in dual\ Z}$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	0	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}]$

В работе [42] приведена структура, которая получила название системы правил нестандартной интервальной математики. Обозначим $\boldsymbol{M} = \left(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}), +, -, \times, /, +^-, -^-, \times^-, /^-\right)$, где $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}) = \left\{[\boldsymbol{a}^-, \boldsymbol{a}^+] \mid \boldsymbol{a}^- \le \boldsymbol{a}^+, \boldsymbol{a}^-, \boldsymbol{a}^+ \in \boldsymbol{R}\right\}$- множество действительных интервалов; $(+, -, \times, /)$ и $(+^-, -^-, \times^-, /^-)$- стандартные и нестандартные интервальные операции сложения, вычитания, произведения и деления соответственно действительным интервалам.

Для программной реализации представим значения интервальных чисел $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в форме центр-радиуса $\boldsymbol{A} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r_a} \rangle$, $\boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r_b} \rangle$, где

$$\boldsymbol{a} = \frac{\underline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{a}}}{2}, \quad \boldsymbol{r_a} = \frac{\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}}{2} \quad \boldsymbol{b} = \frac{\underline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{b}}}{2}, \quad \boldsymbol{r_b} = \frac{\overline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{b}}}{2} \tag{20}$$

- центры и радиусы соответственно интервалов ***A*** и ***B***.

Нестандартная интервально-арифметическая операция сложения определяется так:

$$\boldsymbol{A} +^- \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, |\, \boldsymbol{r_a} - \boldsymbol{r_b} \,| \rangle \tag{21}$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция вычитания определяется так:

$$A -^{-} B = \langle a - b, | r_a - r_b | \rangle \qquad (22)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция произведения определяется так:

$$A \times^{-} B = \langle ab - \operatorname{sgn}(ab) r_a r_b, | a r_b - \operatorname{sgn}(ab) b r_a | \rangle \text{ , если } \frac{|a|}{r_a} \geq 1, \frac{|b|}{r_b} \geq 1 \qquad (23)$$

$$A \times^{-} B = \langle ab - \operatorname{sgn}(b) a r_b, | b r_a - \operatorname{sgn}(b) r_a r_b | \rangle \text{ , если } \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} < \frac{|b|}{r_b} \qquad (24)$$

$$A \times^{-} B = \langle ab - \operatorname{sgn}(a) b r_b, | a r_a - \operatorname{sgn}(a) r_b r_b | \rangle \text{ , если } \frac{|b|}{r_b} < 1, \frac{|a|}{r_a} \geq \frac{|b|}{r_b} \qquad (25)$$

При умножении интервала на число применяется такое правило:

$$\mu \cdot a = \begin{cases} \left[\mu \cdot \underline{a}, \mu \cdot \overline{a} \right], \textit{если} \quad \mu \geq 0, \\ \left[\mu \cdot \overline{a}, \mu \cdot \underline{a} \right], \textit{если} \quad \mu < 0. \end{cases} \qquad (26)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция деления определяется так:

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \langle ab - \operatorname{sgn}(ab) r_a r_b, |a r_b - \operatorname{sgn}(ab) b r_a| \rangle \text{, если } \frac{|b|}{r_b} > 1, \frac{|a|}{r_a} \geq 1 \qquad (27)$$

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \langle ab - \operatorname{sgn}(b) a r_b, |b r_a - \operatorname{sgn}(b) r_a r_b| \rangle \text{, если } \frac{|b|}{r_b} > 1, \frac{|a|}{r_a} < 1 \qquad (28)$$

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \langle ab - \operatorname{sgn}(a) b r_a, |a r_b - \operatorname{sgn}(a) r_a r_b| \rangle \text{, если } \frac{|b|}{r_b} < 1, \frac{|a|}{r_a} < 1 \qquad (29)$$

При делении интервала на число применяется такое правило:

$$\mu / a = \begin{cases} \left[\mu \cdot \frac{1}{\underline{a}}, \mu \cdot \frac{1}{\overline{a}} \right], \textit{если} \quad \mu \geq 0, \\ \left[\mu \cdot \frac{1}{\overline{a}}, \mu \cdot \frac{1}{\underline{a}} \right], \textit{если} \quad \mu < 0. \end{cases} \qquad (30)$$

5. План экспериментов и оценка точности численного решения рассмотренных аксиом интервальной математики

Авторами разработаны программные системы для решения практических задач, которые использовали следующие типы интервальной математики:

- классическая интервальная математика;
- интервальная математика на основе таблиц Кели;
- полная интервальная математика Каухера;
- нестандартная интервальна математика.

Результаты проведенных сравнительных вычислений сведены в таблицу 3.

Табл.3. Фрагмент таблицы сравнительных результатов вычислительного эксперимента для различных выражений перечисленными аксиомами интервальной математики при x=[1,2], y=[-1,0]

Выражение	Выражение в интервальном виде	Классика	Кели	Каухера	Нестандартная
$\frac{2x+3y}{4x-y}$	$\frac{[2,4]+[-3,0]}{[4,8]-[-1,0]}$	[-0,2, 0,8]	[-0,2, 0,8]	[0,25, 1,0]	[0,20, 0,25]
$\frac{x+3y}{2x-y}$	$\frac{[1,2]+[-3,0]}{[2,4]-[-1,0]}$	[-1,0, 1,0]	[-1,0, 1,0]	[-1,0 , 1,0]	[-0,25, 0,25]

Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис.2 и 3.

Рис. 2. Сравнение ширина интервала для рассмотренных выражений в классической интервальной математике

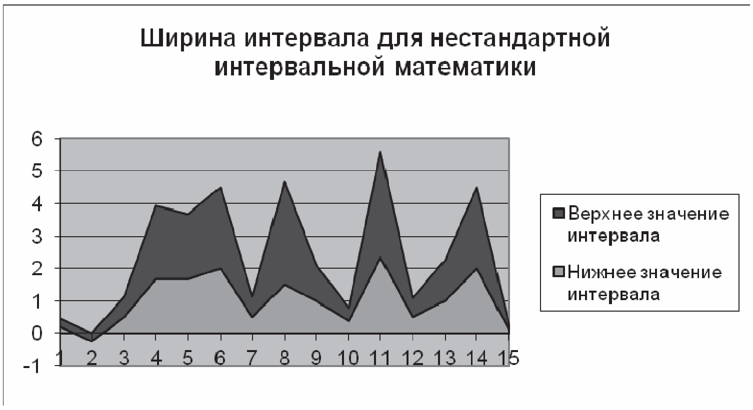


Рис.3. Сравнение ширина интервала для рассмотренных выражений в нестандартной интервальной математике

6. Вычислительный эксперимент: обоснование эффективности рассмотренных аксиом интервальной математики ее и реализация

Согласно работы [21] ширину интервала, определяющего число $A=\left[\underline{a},\overline{a}\right]$ вычисляют по формуле:

$$\Delta A = \overline{a} - \underline{a}\ , \tag{31}$$

середину интервала определяем по формуле:

$$m(A) = \frac{1}{2}\ (\overline{a} + \underline{a})\ , \tag{32}$$

тогда точность интервала ε определим следующим образом:

$$\varepsilon_{кл} = \Delta A / m(A)\,. \tag{33}$$

Для нестандартной интервальной математики это будет соответствовать условию:

$$\varepsilon_{нст} = r_a / a\,. \tag{34}$$

Эффективность ***ef*** предложенного процесса будем определять мерой уменьшения интервала окончательного результата, определенного с использованием нестандартной интервальной математики в сравнении с аналогичным, но определенным с использованием классической интервальной математики :

$$\boldsymbol{ef} = (1 - \frac{\boldsymbol{\varepsilon_{нст}}}{\boldsymbol{\varepsilon_{кл}}})100\%\,. \tag{35}$$

В таблице 4 представлены результаты численного эксперимента для финансовых функций по определению накопленных сумм на основе простой и учетной ставок разными методами интервальной математики.

Таблиця 4.Сравнение эффективности вычисления финансовых расчетов методами классической и нестандартной интервальной математики

Показатель	Методика расчета				Параметры эффективности		
	классическая интервальная математика		нестандартная интервальная математика				
	$\underline{a}$	$\overline{a}$	$\underline{a}$	$\overline{a}$	$\varepsilon_{кл}$	$\varepsilon_{нст}$	Ef
Накопленная сумма на основе простой процентной ставки	2325	2520	2362,5	2480	0,08	0,05	37
Накопленная сумма на основе сложной процентной ставки	2527,5	2757,3	2585,0	2696,0	0,08	0,04	50
Накопленная сумма на основе простой учетной ставки	5555,5	6000,0	5666,6	5882,3	0,07	0,04	43
Накопленная сумма на основе сложной учетной ставки	4477,0	4697	4566,5	4604,9	0,05	0,01	80

Приведенные расчеты показывают, что применение нестандартной интервальной математики существенно сужает интервал существования результата вычислений, т.е. эта система более эффективна, чем система, построенная на основе классической интервальной математики.

7. Решение обратной задачи интервального анализа поисковым методом

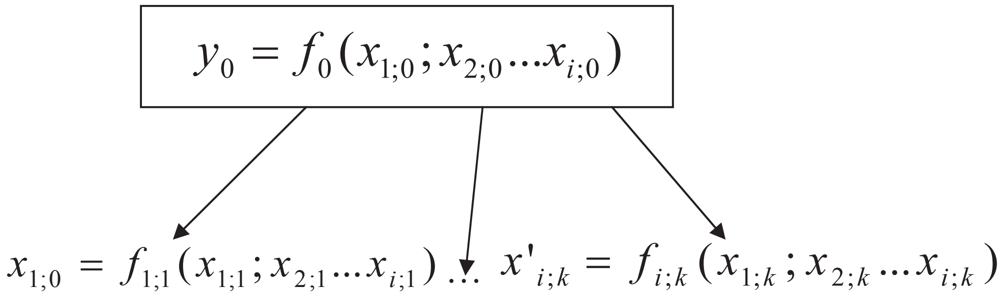
Назовем прямой задачею финансового анализа вычисления значения некоторого показателя, который является функцией от нескольких аргументов. Особенностью методов финансового анализа есть многоразовая суперпозиция функций, обусловленная особенностями расчетов показателей и учетных методов.

Обратная задача возникает при планировании деятельности фирмы, когда по заданному желательному значения окончательного показателя необходимо подобрать соответствующие значения аргументов.

Для решения задачи введем следующие обозначения. Итоговый показатель будем считать корнем дерева. Представим его в следующем виде:

$$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_{1;0};\boldsymbol{x}_{2;0}...\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n};0}), \tag{36}$$

где y_0 - финансовый показатель первого уровня (итоговый), $x_{1;0};x_{2;0}...x_{n;0}$ - аргументы первого уровня. Построение дерева покажем на рисунке:4



(далее продолжать по аналогичной схеме).

Рис. 4. Построение дерева формул

Будем считать, что на каждом уровне в зависимости от вида $f_{i;k}(x_{1;0};x_{2;0}...x_{i;k})$, т.е. зависимость i-ого уравнения переменной входят все переменные данного уровня. Часть из них может быть нулевым.

Предлагается последовательность действий, состоящую со следующих шагов:

Шаг 1: Задаем желаемое значение итогового показателя $\boldsymbol{y_0}$.

Шаг 2: Задаем допустимый интервал неопределенности пошагового показателя, т. е. интервалы изменения переменных нулевого уровня.

Шаг 3: Используя интервальный анализ вычисляем допустимый интервал для $\boldsymbol{y_0}$.

Если $y_0 \in [y_н;y_в]$, где $y_н$, $y_в$ – левая и правая граница допустимых значений, $\boldsymbol{y_0}$ то задача имеет решения.

Если $y_0 \notin [y_н ; y_в]$, то задача не имеет решения.

Шаг 4: (этот шаг используется как общий шаг алгоритма) Если задача не имеет решения, то необходимо изменить интервалы неопределенности аргументов нулевого уровня. Если задача имеет решения, то подбор значений переменных начинают с уровня дерева с наибольшим номером.

Для подбора значений переменных используют особенность, что $ЛП_\tau$ – последовательность может быть заменена случайными равномерно распределенными числами.

Для каждой переменной каждого уровня возьмем ее допустимый интервал расчета, вычислим равномерно распределенные случайные числа.

Шаг 5: Для выбранных случайных чисел вычисляется соответствующие показатели и выбираются те значения, для которых модуль отклонения расчетного значения от желаемого не превышает заданной точности.

Шаг 6: Имея вычисленные интервалы неопределенности вычисляют интервал соответствующего показателя для уровня дерева с наименьшим номером.

Эти процедуры продолжаются до достижения нулевого уровня.

Если задача не решена, то процесс начинается с шага 1.

Пример. имеем число 100, которое складывается с двоих чисел 80 та 20, которые в свою очередь складываются с 20*4 и 10*2 соответственно (рис.5). Как необходимо изменить исходные числа, чтобы получить 105, если диапазон интервала каждого элемента нижнего уровня 5%?

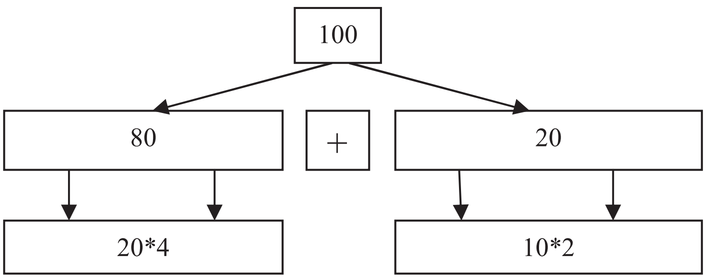


Рис. 5. Условия примера метода обратной задачи

Пояснения к рисунку: От значения каждого элемента вычитанием и сложением 5% получаем его интервальное значение и занесем их в таблицу. Следующим шагом найдем столбец E и F. Для этого проведем необходимые арифметические операции, в нашем случае это умножение. Далее находим столбец G. Его значение определяется сложением столбца E и F. В столбце H находим именно ту комбинацию столбцов A, B, C, и D, которая ближе всего находится до значения 105 (рис.6).

Обратная задача возникает при планировании деятельности фирмы, когда задан желаемый уровень значения итогового показателя, по которому необходимо подобрать соответствующие значения аргументов.

Рассмотрим задачу прогнозирования уровня рентабельности производства и решим ее методом интервальной обратной задачи. Условие задачи представлено деревом формул (рис. 7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**20**	**4**	**10**	**2**	**A*B**	**C*D**	**E+F**	**G-105**
2	19	3,8	9,5	1,9	72,2	18,05	90,25	-14,75
3	19,1	3,82	9,55	1,91	72,962	18,2405	91,2025	-13,7975
4	19,2	3,84	9,6	1,92	73,728	18,432	92,16	-12,84
5	19,3	3,86	9,65	1,93	74,498	18,6245	93,1225	-11,8775
6	19,4	3,88	9,7	1,94	75,272	18,818	94,09	-10,91
7	19,5	3,9	9,75	1,95	76,05	19,0125	95,0625	-9,9375
8	19,6	3,92	9,8	1,96	76,832	19,208	96,04	-8,96
9	19,7	3,94	9,85	1,97	77,618	19,4045	97,0225	-7,9775
10	19,8	3,96	9,9	1,98	78,408	19,602	98,01	-6,99
11	19,9	3,98	9,95	1,99	79,202	19,8005	99,0025	-5,9975
12	20	4	10	2	80	20	100	-5
13	20,1	4,02	10,05	2,01	80,802	20,2005	101,0025	-3,9975
14	20,2	4,04	10,1	2,02	81,608	20,402	102,01	-2,99
15	20,3	4,06	10,15	2,03	82,418	20,6045	103,0225	-1,9775
16	20,4	4,08	10,2	2,04	83,232	20,808	104,04	-0,96
17	20,5	4,1	10,25	2,05	84,05	21,0125	105,0625	0,0625
18	20,6	4,12	10,3	2,06	84,872	21,218	106,09	1,09
19	20,7	4,14	10,35	2,07	85,698	21,4245	107,1225	2,1225
20	20,8	4,16	10,4	2,08	86,528	21,632	108,16	3,16
21	20,9	4,18	10,45	2,09	87,362	21,8405	109,2025	4,2025
22	21	4,2	10,5	2,1	88,2	22,05	110,25	5,25

Рис. 6. Пример расчета методом обратной задачи. Ответ находится в строке 17 в рис. 6.

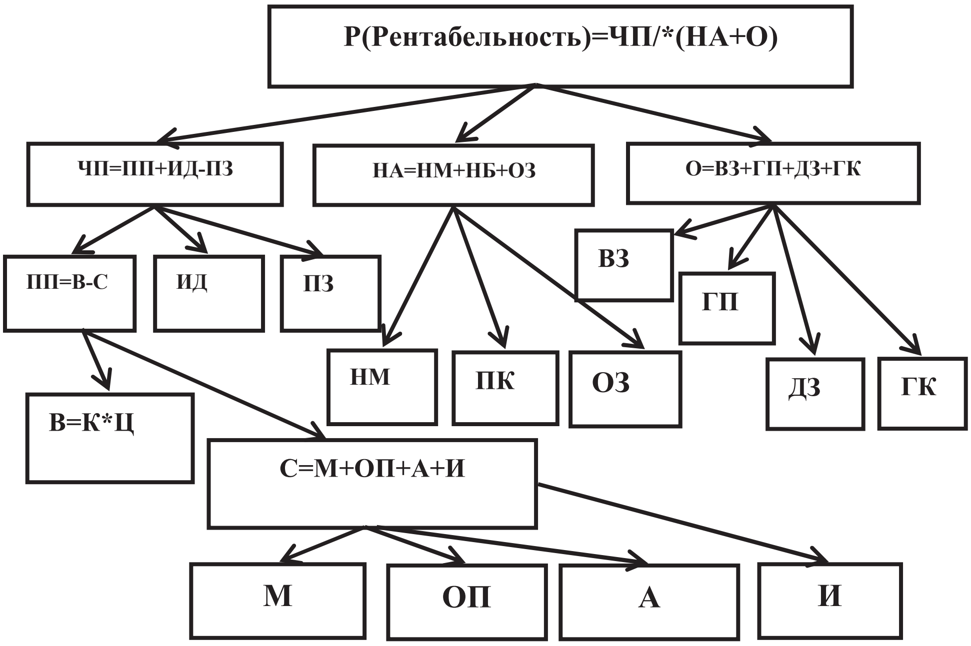


Рис. 7. Дерево показателей расчета рентабельности

Здесь: В=50327,3 грн.; М=32156 грн.; ОП=3278,7 грн.; А=1063,2 грн.; И= 589 грн.; ИД=5184,1 грн.; ПЗ=8884,6 грн.; ДФИ=1327,7 грн.; НМ=8,9 грн.; НБ=468,9 грн.; ОЗ=16456,7 грн.; ВЗ=992 грн.; ГП=1185,2 грн.; Т=7,4 грн.; ИАО=738,6 грн.; ГК=10,8 грн.; ДЗ=11102,8 грн..

Задача исследования: повысить уровень рентабельности на 7,5%, рассчитав рентабельность за формулою (37) і приведением к окончательному виду (37).

$$P = ЧП/(НА + О) \qquad (37)$$

Программная реализация системы расчета численных значений показателей финансовой деятельности фирмы, которые обеспечивают необходимый уровень прибыли предприятия, разработана на языке программирования VBA выполнена в среде MS Excel 2007 с разработкой макросов для решения как прямой так и обратной задачи.

8 Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

1. Для уменьшения интервала заключительного результату выполнения финансовых расчетов предложено использовать правила нестандартной интервальной математики .

2. Разработана программную систему, которая реализует правила нестандартной интервальной математики.

3. Показано, что правила нестандартной интервальной математики дают возможность получить результирующий интервал на 37- 80 процентов меньше, чем аналогичный, но определенный согласно с правилами классической интервальной математики.

4. Обоснованы теоретические основы решение обратной задачи интервального анализа поисковым методом и целесообразность их использования в системе задач экономического факторного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубницький В.Ю., Кобилін А.М. Порівняльний аналіз результатів планування нормативів банківської безпеки засобами класичної та нестандартної інтервальної математики. / Радіоелектронні і комп’ютерні системи. №5(69) Науково-технічний журнал. Харків: «ХАІ» 2014. стр.29-33.
2. Добронец Б. С. Интервальная математика: Учеб. Пособие. Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск. 2004. – 216 с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука. 1977. – 456с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552с.
5. Moore R.E. Intervalanalysis. Eiiglewood Cliffs / R.E. Moore – N.J.:Prentic-e-llall, 1966.
6. Hansen E. Topics in Interval Analysis. – London: Oxford UniversityPress, 1969.
7. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. / Ю. И. Шокин – Новосибирск: Наука, 1981. – 111 с.
8. Интервальный анализ и его приложения. Исторические заметки, http://www.sbras.ru/interval/index.php?j=Introduction/history.
9. Young R.C. Algebra of many-valued quantities // Mathematische Annalen / R. C. Young, 1931. S. 260-290.

10. Dwyer P.S. Linear Computations / P. S. Dwyer – New York: John Wiley & Sons, 1951. – 36 p.
11. Warmus M. Calculus of approximations // Bull. Acad. Polon. Sci./ M. Warmus – 1956, Cl. III, vol. IV, No. 5.
12. Sunaga T. Theoryof an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. – Vol. 2, Misc. II, 1958.
13. Markov S., Okumura K. The contribution of T.Sunaga to interval analysis and reliable computing // Developments in Reliable Computing / Cendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
14. Брадис В.М. Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближенными числами // Известия Тверского педагогического института. 1927. – Вып. 3.
15. Брадис В.М. Теория и практика вычислений. Пособие для высших педагогических учебных заведений. – Москва:Учпедгиз, 1937.
16. Брадис В.М. Средства и способы элементарных вычислений. – Москва: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1948.
17. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский Математический Журнал. – 1962. – Т. 3, №. 5.
18. Назаренко Т.И., Марченко Л.В. Введение в интервальные методы вычислительной математики. / Т.И. Назаренко, и др. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та. 1982.
19. Калмыков С.Л., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. /О.Л. Калмыкин и др. – Новосибирск: Наука. 1986. – 224 с.
20. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение и интервальные вычисления. / Г. Алефельд и др. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
21. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск, Институт вычислительных технологий СО РАН, 2009. – 569 с.
22. Beierbaum, F., Schwierz. K.P. A bibliography on interval mathematics // J. Comput. Appl. Math. V. 4, N 1. P.59-86.
23. Moore R.E. Methods and Applications of Interval Analysis. SIAM. Philadelphia 1979.
24. Клатте Р., Кулиш У., Неага М., Рац Д., Улльрих Х. PASCAL-XSC Язык численного программирования. / Р. Клатте и др. – М.: ДМК Пресс, 2000.
25. Агеев М. П., Алик И. П., Марков Ю. И. Алгоритм 616. Процедуры интервальной математики // Библиотека алгоритмов 516-11/06. / М. П. Агеев и др. – М.: Сов. Радио, 1976.
26. Interval arithmetic - From Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Interval_arithmetic
27. IEEE Interval Standard Working Group - P1788. http://grouper.ieee.org/groups/1788/
28. Hayes B. A Lucid Interval. A reprint from American Scientist the magazine of Sigma Xi, the Scientific Research Society, Volume 91, Number 6, November–December, 2003, p.484-488.
29. Строгий учет ошибок округлений на цифровых ЭВМ, http://www.sbras.ru/interval/index.php?j=Introduction/RusIntro.

30. Кулиш У., Рац Д., Хаммер Р., Хокс М. Достоверные вычисления. Базовые численные методы М.: «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
31. Кнут Д. Е. Искусство программирования, том 3. Сортировка и поиск, 3-е издание / Д. Е. Кнут – Спб.: Диалектика, 2005.
32. Аноприенко А.Я. Тетралогика и тетракоды. // Сборник трудов факультета вычислительной техники и информатики. Вып.1. – Донецк: ДонГТУ. – 1996. С. 32-43.
33. Аноприенко А.Я. Расширенный кодо-логический базис компьютерного моделирования / В кн. «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ- 97). Сборник научных трудов ДонГТУ. Выпуск 1. Донецк, ДонГТУ, 1997, с. 59-64.
34. Аноприенко А.Я. Эволюция алгоритмического базиса вычислительного моделирования и сложность реального мира // Научные труды Донецкого национального технического университета. Выпуск 52. Серия «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем» (МАП-2002): Донецк: ДонНТУ, 2002. – С. 6-9.
35. Соболева А.Г. Когнитивная визуализация данных с помощью лиц Чернова // Збірка тез доповідей II Міжнародної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Комп'ютерний моніторинг та інформаційні технології 2006», 15-17 травня 2006 р. – Донецьк: ДонНТУ, 2006.
36. Аноприенко А.Я. Обобщенный кодо-логический базис в вычислительном моделировании и представлении знаний: эволюция идеи и перспективы развития // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2005) выпуск 93: – Донецк: ДонНТУ, 2005. С. 289-316.
37. Юровицкий В.М. О компьютерной «вычислительной катастрофе», http://www.yur.ru/science/computer/Comcat.htm3
38. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.
39. Kaucher E. Uber metriche und algebraische Eigenschaften einiger beim numersschen Technen auftretender Raume. Dr. Naturwissen/ Dissertation. – Karlsruhe: Universitat/ Karlsruhe, 1973.
40. Kaucher E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungsund Verbandsstrukten // Grandlagen der Computer-Arithmetic / Albrecht R., Kulisch U., eds. – Wien: Springer, 1977. – P. 65-79. – (Computing Supplementum; 1)
41. Kaucher E. Interval analysis in externded interval space **IR** // Fundamentals of numerical computation (Computer-oriented numerical analysis) / Alefeld G., Grigorieff R.D/, eds. – Wien: Springer, 1980. – P. 33-49. –(Computing Supplement; 2)
42. Жуковская О.А. Исследование нестандартных интервальных арифметических операций / О.А. Жуковская // Системні дослідження та інформаційні технології. // Київ. Інститут прикладного системного аналізу НАН України та МООН України - 2005. –№2. - с.106-116.

Надійшла у першій редакції 18.07.2014, в останній - 25.10.2014.