УДК 519.6

Новый метод вычисления базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора

О. А. Иванова

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

В статье приведен новый метод вычисления базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора, который основан на разложении базисных функций в ряд Фурье. Были выведены формулы преобразований Фурье базисных функций и записаны разложения с помощью рядов Фурье базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора порядка от нуля до трех.

Ключевые слова: *атомарная функция, атомарный обобщенный ряд Тейлора, базисная функция, преобразование Фурье, ряд Фурье.*

У статті приведено новий метод обчислення базисних функцій атомарного узагальненого ряду Тейлора, який заснований на розкладанні базисних функцій в ряд Фур'є. Було виведено формули перетворень Фур'є базисних функцій і записано розкладання за допомогою рядів Фур'є базисних функцій атомарного узагальненого ряду Тейлора порядку від нуля до трьох.

Ключові слова: *атомарна функція, атомарний узагальнений ряд Тейлора, базисна функція, перетворення Фур'є, ряд Фур'є.*

The paper presents a new method of basis functions computation for atomic generalized Taylor series. The method is built on Fourier series expansion of basis functions in question. The Fourier transform formulas for the basis functions are derived and Fourier series expansion of the basis functions of atomic generalized Taylor series can be explicitly written for series of order from zero to third.

Key words*: atomic function, atomic generalized Taylor series, the basis function, Fourier transform, Fourier series.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Атомарный обобщенный ряд Тейлора удобно применять для решения задач с дифференциальными и с интегральными уравнениями в таких областях науки, как в механике, в частности в теории упругости, статической механике, механике сплошных сред, электродинамики, теории антенн и других [1-4].

Атомарный обобщенный ряд Тейлора [5-6] разложения функции f имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) baf_{n,k}(x), \tag{1.1}$$

где

$N_0 = \{-1,0,1\}$;

$N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1}+1, ..., 2^{n-1}-1, 2^{n-1}\}$, $n \neq 0$;

$x_{n,k} = \dfrac{k}{2^{n-1}}$, $n \neq 0$, $k \in N_n$, $x_{0,k} = k$, $k \in N_0$;

$baf_{n,k}(x) \in H_1$ - БАФ атомарного обобщенного ряда Тейлора.

При практическом применении атомарного обобщенного ряда Тейлора, пользоваться ранее известными формулами [3, 8] по нахождению базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора несколько неудобно, поскольку они выражаются с помощью линейных комбинаций различных сдвигов функции $up(x)$. Привести подобные слагаемые и упростить вычисления весьма затруднительно. Таким образом, возник вопрос о необходимости нахождения таких формул вычисления базисных функций (БАФ) атомарного обобщенного ряда Тейлора, которые упрощали бы вычисления.

В данной статье предлагается новый метод нахождения базисных функций обобщенного атомарного ряда Тейлора с помощью разложения их в ряд Фурье.

2. Преобразование Фурье базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора.

Для того чтобы записать разложение базисных функций в ряд Фурье, необходимо сначала найти преобразование Фурье для каждой базисной функции.

Пусть прямое преобразование Фурье функции $g(x)$ имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x)dx = G(t). \tag{2.1}$$

Выпишем некоторые формулы, необходимые нам для дальнейшего вычисления.

1. Преобразование Фурье интегрирования имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \int_{-\infty}^{x} g(\xi)d\xi dx = -\frac{1}{it} G(t). \tag{2.2}$$

Доказательство:

Проделаем интегрирование по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \int_{-\infty}^{x} g(\xi)d\xi dx = \left| \begin{matrix} e^{itx}dx = dv \\ \int_{-\infty}^{x} g(\xi)d\xi = u \end{matrix} \right| = \frac{e^{itx}}{it} \int_{-\infty}^{x} g(\xi)d\xi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{it} g(x)dx = -\frac{1}{it} G(t).$$

2. Преобразование Фурье сжатия имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(ax)dx = \frac{1}{a} G\left(\frac{t}{a}\right). \tag{2.3}$$

Доказательство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(ax)dx = \left| \begin{matrix} ax = u \\ dx = \dfrac{du}{a} \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\frac{u}{a}} g(u)du = \frac{1}{a} G\left(\frac{t}{a}\right).$$

3. Преобразование Фурье сдвижки имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x-h)dx = e^{ith} G(t) . \qquad (2.4)$$

Доказательство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x-h)dx = |x-h=u| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(u+h)} g(u)du = e^{ith} G(t).$$

Преобразование Фурье базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора вычисляются с помощью рекуррентной формулы.

Поскольку БАФ следующего порядка вычисляется путем интегрирования сжатой функции БАФ предыдущего порядка в нужной точке и вычитаемой сжатой и сдвинутой функции up(x) с нужным коэффициентом:

$$baf_{n,\frac{y}{2}}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \int_{-\infty}^{x} \left[baf_{n-1,y}(2\xi) - \alpha up(2\xi+1) \right] d\xi . \qquad (2.5)$$

Введем обозначения:

$FTbaf_{n-1,\frac{y}{2}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} baf_{n-1,\frac{y}{2}}(x)dx$ - преобразование Фурье БАФ $baf_{n-1,\frac{y}{2}}(x)$.

$FTup(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} up(x)dx = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{t}{2^k}}{\frac{t}{2^k}}$ – преобразование Фурье функции $up(x)$.

Преобразование Фурье функции $baf_{n,\frac{y}{2}}(x)$ будет иметь вид:

$$FTbaf_{n,\frac{y}{2}}(t) = \frac{\frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2} \left[FTbaf_{n-1,y}\left(\frac{t}{2}\right) - \alpha e^{\frac{-it}{2}} FTup\left(\frac{t}{2}\right) \right]}{-it}. \qquad (2.6)$$

Чтобы найти коэффициент α, вычислим $\lim\limits_{t\to 0} FTbaf_{n,\frac{y}{2}}(t)$:

$$\lim_{t\to 0} FTbaf_{n,\frac{y}{2}}(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2} \left[FTbaf_{n-1,y}\left(\frac{t}{2}\right) - \alpha e^{\frac{-it}{2}} FTup\left(\frac{t}{2}\right) \right]}{-it}.$$

Очевидно,

$$\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{FTbaf_{n-1,y}\left(\frac{t}{2}\right)}{e^{\frac{-it}{2}} FTup\left(\frac{t}{2}\right)}. \qquad (2.7)$$

Обозначим

$$H(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}\left[FTbaf_{n-1,y}\left(\frac{t}{2}\right)-\lim_{t\to 0}\frac{FTbaf_{n-1,y}\left(\frac{t}{2}\right)}{e^{\frac{-it}{2}}FTup\left(\frac{t}{2}\right)}e^{\frac{-it}{2}}FTup\left(\frac{t}{2}\right)\right] \quad (2.8)$$

и проделаем это же исследование для БАФ следующего порядка:

$$baf_{n+1,\frac{y}{4}}(x)=\frac{1}{2^n}\int_{-\infty}^{x}\left[baf_{n,\frac{y}{2}}(2\xi)-\beta up(2\xi+1)\right]d\xi. \quad (2.9)$$

$$FTbaf_{n+1,\frac{y}{4}}(t)=\frac{\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}\left[FTbaf_{n,\frac{y}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)-\beta e^{\frac{-it}{2}}FTup\left(\frac{t}{2}\right)\right]}{-it}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{t}{2}\right)-\beta e^{\frac{-it}{2}}FTup\left(\frac{t}{2}\right)\right]}{-it}.$$

Найдем коэффициент β, вычислив $\lim\limits_{t\to 0}FTbaf_{n+1,\frac{y}{4}}(t)$:

$$\lim_{t\to 0}FTbaf_{n+1,\frac{y}{4}}(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{t}{2}\right)-\beta e^{\frac{-it}{2}}FTup\left(\frac{t}{2}\right)\right]}{-it}.$$

Числитель приравниваем к нулю:

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{H\left(\frac{t}{2}\right)}{-i\frac{t}{2}}-\beta e^{\frac{-it}{2}}FTup\left(\frac{t}{2}\right)\right]=0.$$

Применив правило Бернулли-Лопиталя к первому слагаемому, получим

$$\beta=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{H'\left(\frac{t}{2}\right)}{-\frac{i}{2}}}{e^{\frac{-it}{2}}FTup\left(\frac{t}{2}\right)}. \quad (2.10)$$

Эти умозаключения верны и для БАФ высшего порядка.

3. Ряды Фурье базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора.

Запишем общий вид ряда Фурье для функции $f(x) \in [-L; L]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{\pi nx}{L} \right), \tag{3.1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx \,,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{\pi nx}{L} dx \,,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{\pi nx}{L} dx \,.$$

Выпишем разложения базисных функций атомарного обобщенного ряды Тейлора в ряды Фурье.

$$baf_{0,0}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} FTbaf_{0,0}(\pi n) \cos \pi nx \,. \tag{3.2}$$

Функции нулевого порядка в точках 1 и -1 находят с помощью переноса функции $baf_{0,0}(x)$ соответственно вправо или влево на одну единицу:

$$baf_{0,1}(x) = baf_{0,0}(x-1) \,, \; baf_{0,-1}(x) = baf_{0,0}(x+1) \,.$$

Аналогичными переносами можно найти функции $baf_{1,1}(x)$ и $baf_{1,-1}(x)$, $baf_{2,1}(x)$ и $baf_{2,-1}(x)$, $baf_{3,1}(x)$ и $baf_{3,-1}(x)$ соответствующих им функций $baf_{1,0}(x)$, $baf_{2,0}(x)$ и $baf_{3,0}(x)$:

$$baf_{1,0}(x) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} FTbaf_{1,0}(\pi n) \sin \pi nx \,, \tag{3.3}$$

$$baf_{2,0}(x) = \frac{17}{2304} + \sum_{n=1}^{\infty} FTbaf_{2,0}(\pi n) \cos \pi nx \,, \tag{3.4}$$

$$baf_{3,0}(x) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} FTbaf_{3,0}(\pi n) \sin \pi nx \,. \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} baf_{2,-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{128} + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(& \left(FTbaf_{2,-\frac{1}{2}}(2\pi n) + FTbaf_{2,-\frac{1}{2}}(-2\pi n) \right) \cos 2\pi nx + \\ & + \left(FTbaf_{2,-\frac{1}{2}}(2\pi n) + FTbaf_{2,-\frac{1}{2}}(-2\pi n) \right) \frac{\sin 2\pi nx}{i} \Bigg), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$baf_{3,-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(FTbaf_{3,-\frac{1}{2}}(2\pi n)+FTbaf_{3,-\frac{1}{2}}(-2\pi n)\right)\cos 2\pi nx+\right.$$
$$\left.+\left(FTbaf_{3,-\frac{1}{2}}(2\pi n)+FTbaf_{3,-\frac{1}{2}}(-2\pi n)\right)\frac{\sin 2\pi nx}{i}\right), \tag{3.7}$$

$$baf_{3,-\frac{1}{4}}(x)=\frac{1}{4096}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(FTbaf_{3,-\frac{1}{4}}(2\pi n)+FTbaf_{3,-\frac{1}{4}}(-2\pi n)\right)\cos 2\pi nx+\right.$$
$$\left.+\left(FTbaf_{3,-\frac{1}{4}}(2\pi n)+FTbaf_{3,-\frac{1}{4}}(-2\pi n)\right)\frac{\sin 2\pi nx}{i}\right), \tag{3.8}$$

$$baf_{3,-\frac{3}{4}}(x)=-baf_{3,-\frac{1}{4}}(-x-1). \tag{3.9}$$

Базисные функции для положительных точек легко находятся из соответствующих им симметричных отрицательных точек. Все формулы преобразование Фурье для каждой базисной функции легко находятся по алгоритму, предложенному в разделе 2 данной статьи.

4. Выводы по результатам

Предложен новый метод вычисления базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора, основанный на разложении непосредственно самих базисных функций в ряд Фурье. Данный метод имеет ряд преимуществ, благодаря компактности формул. Поэтому при практическом применении атомарного обобщенного ряда Тейлора, пользоваться полученными формулами по нахождению базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора весьма удобно, поскольку возникает возможность привести подобные слагаемые и упростить дальнейшие вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.А., Рвачева Т.В., Томилова Е.П. Применение атомарных обобщенных рядов Тейлора к решению интегральных уравнений электродинамики и теории антенн // Радиоэлектр. и компьют. сист. – 2013. – № 1 (60) – С. 7-14.
2. Ivanova O.A. Application generalized Taylor series for solving the Cauchy problem for differential equations of the second order // Всеукраїнськ. Наукова конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів»: 22-23 лютого 2013 р.: тез. доп. – Рівне, 2013. – С. 206.
3. Иванова О.А. Новый метод нахождения ядра интегрального уравнения в обратной задаче об определении характеристик вязкоупругих материалов // Вопросы проектир. и произв. конструкц. летат. аппаратов. – 2013. – № 4 (76). – С. 50-55.

4. Рвачев В.А., Рвачева Т.В. О построении мультимодальных многопараметрических экспоненциальных семейств вероятностных законов// Радиоэлектр. и компьют. сист. – 2011. – № 4 (52) – С. 72-76.
5. Рвачев В.А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций // Мат. методы анализа динамических систем. – 1982. –№ 6. – С. 99-102.
6. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение // Успехи мат. наук. – 1990. – № 1(271). – С. 77-103.
7. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Об одной финитной функции // ДАН УССР. – 1971. – сер. А. – С. 705-707.
8. Рвачев В.А., Рвачева Т.В. Об Эрмитовой интерполяции с помощью атомарных функций // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 4(45). – С. 100-104.
9. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Теория приближений и атомарные функции. – М.: Знание, 1978. – 62 с.
10. Рвачева Т.В. О скорости приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка». – 2010. – 931. – С. 93–98.
11. Смирнов Д.В. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями в радиофизических приложениях: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.03. – М. – 2005. – 165 с.
12. Колодяжный В.М., Рвачев В.А. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – 43, № 6. – С. 155–177.

Надійшла у першій редакції – 05.09.2014, в останній – 11.09.2014.