

Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи
управління»
УДК 519.6:537.226.86 № 629, 2004, с.39-47

Влияние формы границы поверхности пьезоэлектрического резонатора на его собственные колебания

А. Ю. Шмалий

Украинская Инженерно-Педагогическая Академия, Харьков, Украина

In this report, an analysis is given of the eigenvibrations of a convex piezoelectric plate of an arbitrary shape. It is shown that the frequency spectrum is determined by the curvature of the boundary surface at the point of a maximum. The formula is derived for the eigenfrequencies of the vibrations. It is noticed that the shape of the piezoelectric surface affects essentially the frequency spectrum that may be used to optimize the resonator performance.

1. Введение.

Необходимость исследования собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов возникла вследствие использования кварцевых резонаторов как основных элементов стабилизации частоты. В высокоточных источниках колебаний используются кварцевые резонаторы колебаний сдвига по толщине, выполненные в виде тонких пьезоэлектрических пластин с одно- или двухсторонней кривизной и, чаще всего, с двухсторонне расположенными электродами.

Первая математическая теория колебаний тонких пьезоэлектрических пластин была предложена Миндлином в 50-х годах [1]. В дальнейшем она была развита в трудах Тирстена [2] и ряда других авторов ([3-5]). Основываясь на теории колебаний тонких пластин, в первую очередь были изучены кристаллические резонаторы с выпуклой сферической поверхностью (см.[2,3]). В дальнейшем теория была распространена на эллипсоидальную поверхность [4,5]. Однако до сих пор часть вопросов остается не изученной, в частности, влияние пространственной анизотропии на частотный спектр собственных колебаний резонатора. Решение такой задачи может быть использовано для учета ошибок изготовления пьезопластин, а также для регулировки спектра путем введения искусственной асимметрии пьезопластины.

В данной работе рассматривается математическая модель резонатора с выпуклой пьезоэлектрической пластиной произвольной формы, в которой анизотропия предполагается как в направлении нормали, так и в плоскости пластины.

2. Частотный спектр собственных колебаний пьезоэлектрического резонатора с выпуклой пластиной произвольной формы.

Рассмотрим пьезоэлектрический резонатор (Рис.1) с выпуклой пластиной произвольной формы

$$z = U(x_1, x_2). \quad (1)$$

Мы предполагаем, что поверхность является выпуклой в точке $M_0(x_{10}, x_{20})$ и $U(M_0) = L_0$, где L_0 максимальная толщина пластины.

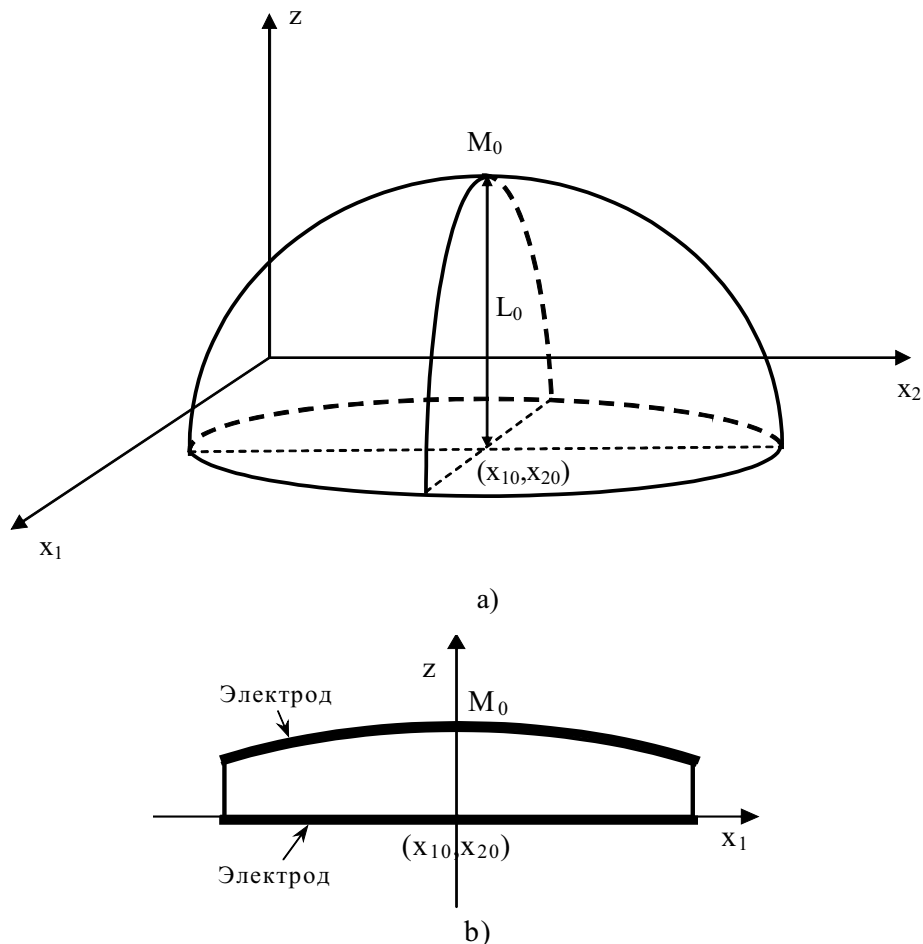


Рис 1. Кристаллический резонатор с выпуклой пьезоэлектрической пластиной произвольной формы: а) общий вид, б) сечение.

Первые члены разложения (1) в ряд Тейлора по отношению к малому параметру $\sim 1/R$, где R - кривизна пластины, дают основной вклад в частотный спектр, так что в дальнейшем мы предполагаем

$$U(x_1, x_2) = U(x_{10}, x_{20}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) + \dots \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение для нахождения главного смещения u_1^n n -ой гармонической моды поперечных колебаний дважды повернутой кварцевой пластины запишем в виде [2]:

$$M_n \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_1^2} + P_n \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_2^2} - \frac{n^2 \pi^2 \tilde{c}^{(1)}}{L^2} u^n + \rho \omega^2 u^n = \rho \omega^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e_{26}}{\tilde{c}^{(1)}} \frac{4V}{n^2 \pi^2}, \quad (3)$$

здесь V - напряжение возбуждения, L - переменная толщина пластины, ρ - плотность пластины, e_{26} - пьезоэлектрическая константа, M_n , P_n , $\tilde{c}^{(1)}$, $\tilde{c}^{(1)}$ выражаются громоздкими формулами, приведенными в [6].

Записывая выражение для переменной толщины L в случае произвольной граничной поверхности и подставляя его в (3), получим

$$M_n \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_1^2} + P_n \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_2^2} - \frac{n^2 \pi^2 \tilde{c}^{(1)}}{L_0^2} \left(1 - \frac{1}{L_0} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) \right) u^n + \rho \omega^2 u^n = \rho \omega^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e_{26}}{\tilde{c}^{(1)}} \frac{4V}{n^2 \pi^2}. \quad (4)$$

Произведем замену переменных в уравнении (4) $x_1 = \sqrt{M_n} \tilde{\xi}_1 + x_{10}$, $x_2 = \sqrt{P_n} \tilde{\xi}_2 + x_{20}$ и получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^n}{\partial \tilde{\xi}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^n}{\partial \tilde{\xi}_2^2} - \frac{n^2 \pi^2 \tilde{c}^{(1)}}{L_0^2} \times \left[1 - \frac{1}{L_0} \left(\frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1^2} M_n \tilde{\xi}_1^2 + \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \sqrt{M_n P_n} \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2 + \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_2^2} P_n \tilde{\xi}_2^2 \right) \right] \tilde{u}^n + \rho \omega^2 \tilde{u}^n = \rho \omega^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e_{26}}{\tilde{c}^{(1)}} \frac{4V}{n^2 \pi^2}. \quad (5)$$

Теперь исключим произведение $\tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2$ в уравнении (5). Для этого производим поворот на угол β , вводя переменные

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1 = \xi_1 \cos \beta - \xi_2 \sin \beta \\ \tilde{\xi}_2 = \xi_1 \sin \beta + \xi_2 \cos \beta \end{cases} \quad (6)$$

где угол поворота

$$\beta = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \sqrt{M_n P_n}}{\frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1^2} M_n - \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_2^2} P_n} \right). \quad (7)$$

Получим уравнение вида

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^n}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^n}{\partial \xi_2^2} - \frac{n^2 \pi^2 \tilde{c}^{(1)}}{L_0^2} \left(1 + \frac{1}{L_0} (c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2) \right) \bar{u}^n + \rho \omega^2 \bar{u}^n =$$

$$\rho\omega^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e_{26}}{\tilde{c}^{(1)}} \frac{4V}{n^2\pi^2}, \quad (8)$$

где

$$c_1 = -\frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1^2} M_n \cos^2 \beta - \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\sqrt{M_n P_n}}{2} \sin 2\beta - \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_2^2} P_n \sin^2 \beta, \quad (9)$$

$$c_2 = -\frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1^2} M_n \sin^2 \beta + \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\sqrt{M_n P_n}}{2} \sin 2\beta - \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_2^2} P_n \cos^2 \beta. \quad (10)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего (8), т. е. когда $V = 0$, имеет вид

$$\bar{u}_{mnp} = \left(\frac{\sqrt{b_1 b_2}}{\pi^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^{m+p} m! p!}} e^{-\frac{\sqrt{b_1} \xi_1^2 - \sqrt{b_2} \xi_2^2}{2}} H_m(\xi_1 b_1^{1/4}) H_p(\xi_2 b_2^{1/4}), \quad (11)$$

где H_m и H_p полиномы Эрмита и

$$b_1 = \frac{n^2 \pi^2 \tilde{c}^{(1)}}{L_0^3} c_1, \quad b_2 = \frac{n^2 \pi^2 \tilde{c}^{(1)}}{L_0^3} c_2. \quad (12)$$

Из (11) следует, что квадраты частот, соответствующих найденным собственным колебаниям, определяются соотношением

$$\omega_{nmp}^2 = \frac{n^2 \pi^2 \tilde{c}^{(1)}}{L_0^2 \rho} \left(1 + \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{L_0}{\tilde{c}^{(1)}}} \left(\sqrt{c_1} (2m+1) + \sqrt{c_2} (2p+1) \right) \right), \quad (13)$$

где

$$n = 1, 3, 5, \dots, \quad m, p = 0, 2, 4, \dots \quad (14)$$

Теперь найдем собственные колебания в исходной системе координат. Для этого из (11) с учетом преобразований переменных получим решение для уравнения (4)

$$u_{nmp} = \left(\frac{\sqrt{b_1 b_2}}{\pi^2 M_n P_n} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^{m+p} m! p!}} e^{-\frac{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}{2}} H_m(\zeta_1) H_p(\zeta_2), \quad (15)$$

где

$$\begin{cases} \zeta_1 = b_1^{1/4} \left(\frac{x_1}{\sqrt{M_n}} \cos \beta + \frac{x_2}{\sqrt{P_n}} \sin \beta \right) \\ \zeta_2 = b_2^{1/4} \left(-\frac{x_1}{\sqrt{M_n}} \sin \beta + \frac{x_2}{\sqrt{P_n}} \cos \beta \right) \end{cases}, \quad (16)$$

Таким образом, формулы (13) и (15) определяют частотный спектр и собственные колебания резонатора.

3. Частотный спектр собственных колебаний пьезоэлектрического резонатора с выпуклой поверхностью эллипсоидального типа.

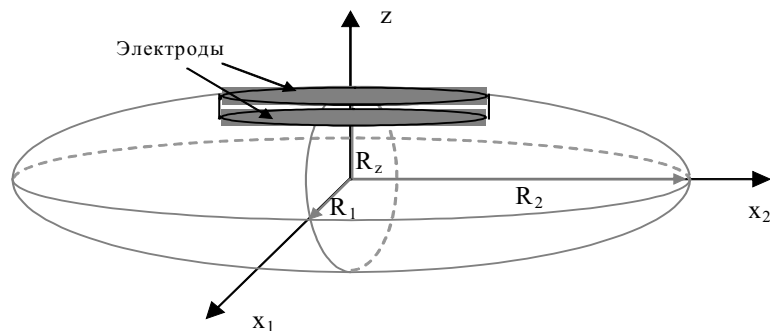
Рассмотрим кварцевый резонатор с односторонне-выпуклой поверхностью эллипсоидального типа (Рис.2). Координатные оси сориентированы таким образом, что ось z является нормалью к главной оси пластины, а ось x_1 направлена вдоль оси второго поворота дважды повернутой кварцевой пластины. Эллипсоидальная поверхность сориентирована произвольным образом относительно осей исходной системы координат в плоскости x_1x_2 . Радиусы эллипсоида в направлении x_1 , x_2 и z обозначены, соответственно, R_1 , R_2 , R_z . Максимальная толщина пластины обозначена L_0 . Для обозначения поворота главных осей эллипсоида относительно осей x_1 и x_2 введен угол α (Рис. 2б).

Запишем уравнение поверхности в виде $z = U(x_1, x_2)$:

$$U(x_1, x_2) = L_0 \left(1 - \frac{R_z}{2L_0} (a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) \right), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{R_1^2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{R_2^2} \cos^2 \alpha, \\ a_{12} &= \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \sin 2\alpha, \\ a_{22} &= \frac{1}{R_2^2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{R_1^2} \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (18)$$



a)

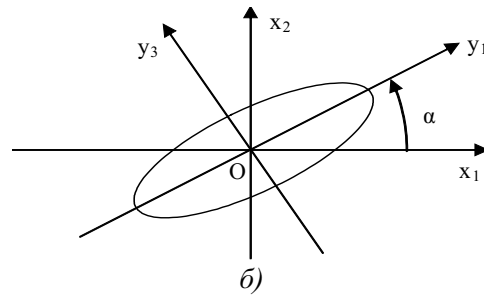


Рис 2. Модель кварцевого резонатора с выпуклой пьезоэлектрической пластиной эллипсоидальной формы: а) основной вид, б) вид сверху, α - угол между главными осями эллипсоидальной граничной поверхности и осями исходной координатной системы.

Выражения для производных $U(x_1, x_2)$ тогда имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1^2} &= -a_{11} R_z, \\ \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{1}{2} a_{12} R_z, \\ \frac{\partial^2 U(M_0)}{\partial x_2^2} &= -a_{22} R_z. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что подстановка (19) в (7) - (16), позволяет сразу получить частотный спектр ω_{nmp} и собственные колебания u_{nmp} пьезоэлектрической пластины с произвольно ориентированной эллипсоидальной поверхностью. Ниже мы приводим результаты численного анализа частотного спектра.

4. Численный эксперимент.

Уравнение (13) было использовано для вычисления резонансных частот дважды повернутой пьезопластины кварцевого резонатора SBTC-среза с ориентацией $yxb1 / +16.3^\circ / -34.5^\circ$. Рассматривалась пластина эллипсоидального типа с параметрами $R_1 = 208$ мм, $R_2 = R_3 = 260$ мм и $L_0 = 1.0679$ мм. Электрод представляет собой квадрат со сторонами длиной 8 мм. Результаты численного анализа показаны на Рис.3 для абсолютного смещения частоты $f_{nkl} = \omega_{nkl} / 2\pi$ резонатора по отношению к той же частоте для $\alpha = 0$ при изменении угла α (Рис. 2б) от 0 до π .

Из анализа Рис. 3 следует, что в данном случае при изменении угла α изменяется частотный спектр кварцевого резонатора, а именно: 1) частоты с индексами $nmp = n0p$ уменьшаются при изменении индекса p , 2) остальные частоты спектра увеличиваются. Однако, следует отметить, что для пьезопластин других срезов возможен более сложный характер изменения

частот, то есть, если оба индекса m и p отличны от нуля частоты могут как увеличиваться, так и уменьшаться [6].

На Рис. 4, 5 показано распределение амплитуды собственных колебаний резонатора с выпуклой пластиной сферической и эллипсоидальной формы соответственно. Параметры резонатора взяты из предыдущего случая, при этом для сферической пластины $R_1 = R_2 = R_3 = 260$, а для эллипсоидальной $R_1 = 208$ мм, $R_2 = R_3 = 260$ мм. Заметим, что граница электрода находится в точке 4 мм. Видно, что в эллипсоидальном случае колебания затухают быстрее при одновременном увеличении амплитуды.

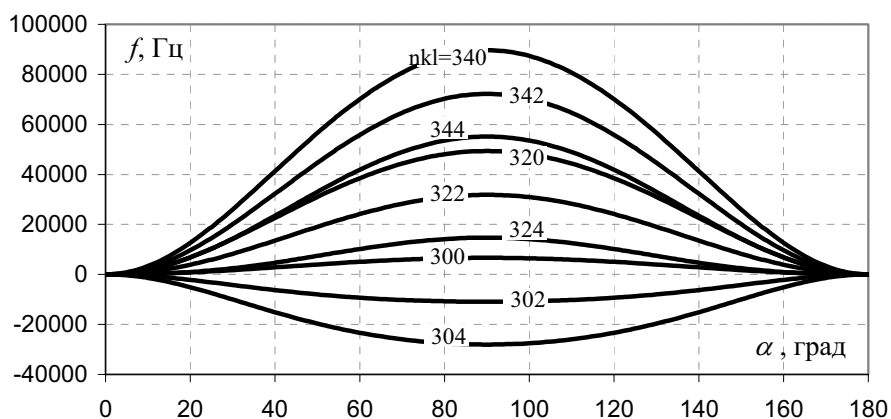


Рис 3. Абсолютные смещения ближайших частот спектра кварцевого резонатора с выпуклой поверхностью эллипсоидального типа, имеющей параметры $R_1 = 208$ мм,

$$R_2 = R_3 = 260 \text{ мм и } L_0 = 1 \text{ мм.}$$

5. Заключение.

В настоящей статье предложена математическая модель резонатора с выпуклой пьезоэлектрической пластиной произвольной формы. Эта модель отличается от известных моделей тем, что в ней учитывается пространственная анизотропия пьезоэлектрической пластины. Предложенная модель может быть, в частности, использована для резонаторов с выпуклой пьезоэлектрической пластиной эллипсоидального типа и в этом случае аналогична модели, рассмотренной в [6]. Несмотря на то, что данная модель позволяет рассматривать поверхность общего вида, остаются вопросы рассмотрения важных частных случаев геометрии пластины для применения в реальных резонаторах. Эти вопросы в настоящее время находятся в стадии изучения.

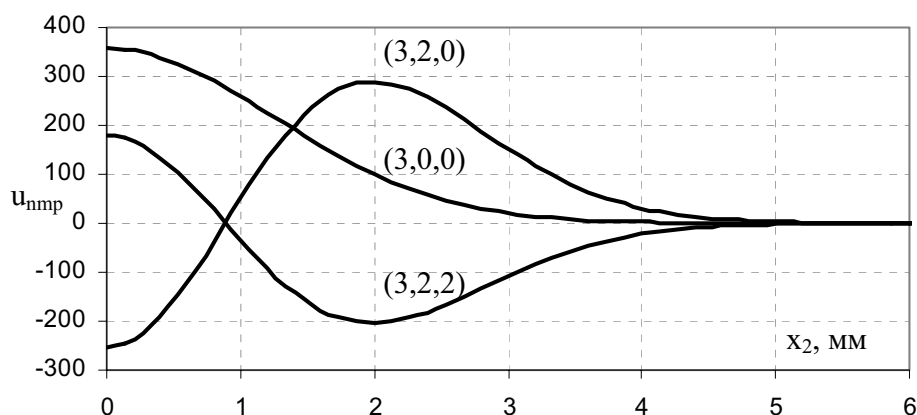


Рис.4. Распределение амплитуды собственных колебаний кварцевого резонатора с выпуклой поверхностью эллипсоидального типа, имеющей параметры $R_1 = R_2 = R_3 = 260$ мм и $L_0 = 1$ мм.

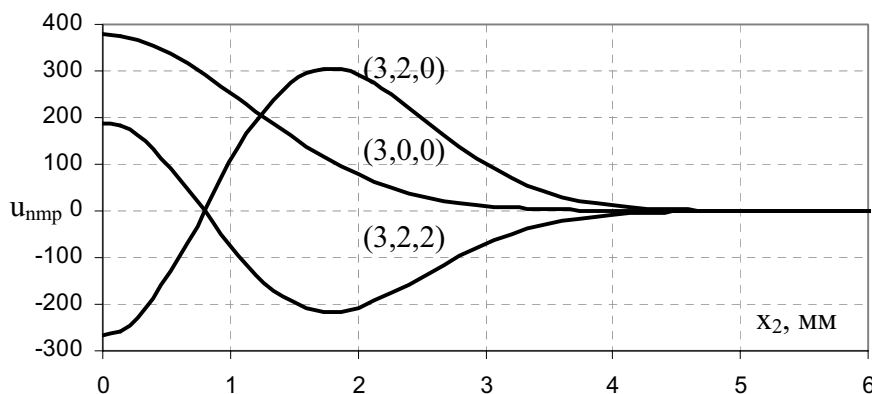


Рис.5. Распределение амплитуды собственных колебаний кварцевого резонатора с выпуклой поверхностью эллипсоидального типа, имеющей параметры $R_1 = 208$ мм, $R_2 = R_3 = 260$ мм и $L_0 = 1$ мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mindlin R. D. Mathematical theory of vibrations of elastic plates // Proc. 11th Freq. Control Symp. – 1957. – P. 1- 40.
2. Stevens D. S., Tiersten H. F. An analysis of doubly rotated quartz resonators utilizing essentially thickness modes with transverse variation // J. Acoust. Soc. Am. 79(6). – June 1986. – P. 1811-1826.
3. Tiersten H. F., Lwo B. J., Dulmet B. Analysis of transversely varying thickness modes in trapped energy resonators with shallow contours // IEEE Int. FCS. – 1994. – P. 172-183.

4. Sinha B. K. Doubly rotated contoured quartz resonators // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., vol. 48, no. 5. – 2001 – P. 1162-1180.
5. Slavov S. H. Modes of Vibrations. Motion Inductance. And Resonance Interval of Circular, Convex AT-cut Beveled Design Trapped Energy Quartz Resonators // Appl. Phys. A 40. – 1986. – P. 59-65.
6. Шмалый А.Ю. Математическая модель пьезоэлектрического резонатора с односторонне-выпуклой пластиной эллипсоидального типа // Вісник ХНУ, ном. 605, серія «Математичне моделювання...». – 2003. – С. 159-168.