

## Компьютерное моделирование дифракции электромагнитных волн на ленточных решетках (случай произвольного падения)

Г. Н. Жолткевич, В. В. Хорошун, В. Б. Хохольков  
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Work is devoted to the qualitative and quantitative analysis of distinctive features of diffraction of flat electromagnetic waves of linear polarization on tape grating at general fall in comparison with cases of excitation of grate E-and H-the polarized waves.

### Постановка задачи

На решетку из бесконечно тонких и идеально проводящих лент ( $l$  – период решетки,  $d$  – ширина ее щелей) из верхнего полупространства ( $z > 0$ ) под произвольным углом к ней (рис.1) падает плоская электромагнитная волна

$$\vec{E}_{над} = \vec{E}_0 e^{ik_0(\vec{n}, \vec{r})}, \quad \vec{H}_{над} = \vec{H}_0 e^{ik_0(\vec{n}, \vec{r})},$$

где  $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число

свободного пространства,  $\lambda$  – длина волны,  $\omega$  – круговая частота,  $c$  – скорость

света в вакууме. (Временной дифференциальный оператор  $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$ ).

Требуется определить дифракционные поля во всем пространстве, исключая ленты решетки.

### Решение задачи

Пусть  $\vec{E}(x, y, z)$  и  $\vec{H}(x, y, z)$  – искомое дифракционное поле. Так как уравнения Максвелла инвариантны относительно пространственных сдвигов, а решетка переходит в себя при любых сдвигах в направлении оси OX и при сдвигах, кратных периоду решетки  $l$ , в направлении оси OY, то векторы

$$e^{-ik_0(ax+\beta y)} \vec{E}(x, y, z) \text{ и } e^{-ik_0(ax+\beta y)} \vec{H}(x, y, z)$$

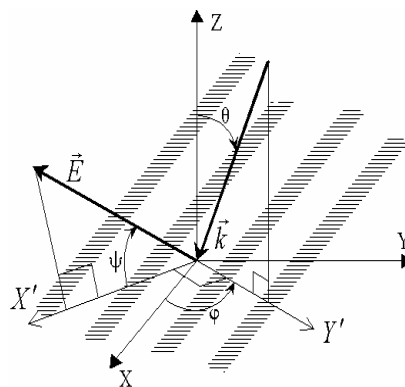


Рис.1 Геометрия структуры и углы Эйлера

не зависят от  $x$  и являются периодическими функциями от  $y$  с периодом  $l$ . Разлагая эти векторы в ряды Фурье, используя уравнения Гельмгольца для определения вида коэффициентов Фурье и учитывая при этом поведение искомого поля на бесконечности, получим

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} e^{ik_0\alpha x} \left[ \vec{E}_0 e^{-ik_0\gamma z} + \sum_n \vec{a}_n e^{i\gamma_n z} e^{i\beta_n y} \right], & (z > 0), \\ e^{ik_0\alpha x} \sum_n \vec{b}_n e^{-i\gamma_n z} e^{i\beta_n y}, & (z < 0). \end{cases} \quad (1a)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \begin{cases} e^{ik_0\alpha x} \left[ \vec{H}_0 e^{-ik_0\gamma z} + \sum_n \vec{A}_n e^{i\gamma_n z} e^{i\beta_n y} \right], & (z > 0), \\ e^{ik_0\alpha x} \sum_n \vec{B}_n e^{-i\gamma_n z} e^{i\beta_n y}, & (z < 0), \end{cases} \quad (1b)$$

где направляющие косинусы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  связаны соотношением  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , причем

$$\alpha = \sin \theta \cos \varphi, \quad \beta = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma = \cos \theta, \quad \beta_n = k_0 \beta + \frac{2\pi}{l} n, \\ \gamma_n = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\kappa^2 - (n + \kappa\beta)^2 - \kappa^2 \alpha^2}, \quad \kappa = l / \lambda.$$

Для отраженного поля векторные коэффициенты  $\vec{a}_n, \vec{A}_n$ , удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \beta_n A_{nz} - \gamma_n A_{ny} &= -a_{nx}, & \beta_n a_{nz} - \gamma_n a_{ny} &= A_{nx}; \\ \tilde{\alpha} A_{nz} - \gamma_n A_{nx} &= a_{ny}, & \tilde{\alpha} a_{nz} - \gamma_n a_{nx} &= -A_{ny}; \\ \tilde{\alpha} A_{ny} - \beta_n A_{nx} &= -a_{nz}, & \tilde{\alpha} a_{ny} - \beta_n a_{nx} &= A_{nz}; \\ \tilde{\alpha} a_{nx} + \beta_n a_{ny} + \gamma_n a_{nz} &= 0, & \tilde{\alpha} A_{nx} + \beta_n A_{ny} + \gamma_n A_{nz} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tilde{\alpha} = k_0 \alpha$ .

Для коэффициентов прохождения  $\vec{b}_n$  и  $\vec{B}_n$  получаем аналогичные соотношения путем замены  $\vec{a}_n \leftrightarrow \vec{b}_n$ ,  $\vec{A}_n \leftrightarrow \vec{B}_n$ , и изменением знака  $\gamma_n$  на противоположный.

Подчиняя искомым поля точным граничным условиям, требующим обращения в нуль тангенциальных компонент электрического поля и непрерывности всего поля на щелях решетки, получаем связь между неизвестными коэффициентами

$$a_{nx} + \delta_{n0} E_{0x} = b_{nx}; \quad A_{nx} - \delta_{0n} H_{0x} = -B_{nx};$$

$$\begin{aligned} a_{ny} + \delta_{n0} E_{0y} &= b_{ny}; & A_{ny} - \delta_{0n} H_{0y} &= -B_{ny}; \\ a_{nz} - \delta_{n0} E_{0z} &= -b_{nz}; & A_{nz} + \delta_{0n} H_{0z} &= B_{nz}. \end{aligned} \quad (3)$$

и две независимые канонические системы сумматорных уравнений, которые методом АМШ [5] в его модифицированной форме [6] сведены к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода (СЛАУ-2) следующего вида

$$\begin{cases} -b_{0x} = i\kappa\gamma(b_{0x} - E_{0x})W_0^0(u) + \sum_{n \neq 0} b_{nx}|n|\tilde{\chi}_n W_0^n(u), & (m=0), \\ mb_{mx} = i\kappa\gamma(b_{0x} - E_{0x})W_m^0(u) + \sum_{n \neq 0} b_{nx}|n|\tilde{\chi}_n W_m^n(u), & (m \neq 0), \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} -A_{0x} = i\kappa\gamma(A_{0x} - H_{0x})W_0^0(-u) + \sum_{n \neq 0} A_{nx}|n|\tilde{\chi}_n W_0^n(-u), & (m=0), \\ mA_{mx} = i\kappa\gamma(A_{0x} - H_{0x})W_m^0(-u) + \sum_{n \neq 0} A_{nx}|n|\tilde{\chi}_n W_m^n(-u), & (m \neq 0), \end{cases} \quad (4b)$$

где

$$\tilde{\chi}_n = 1 + i\sqrt{\frac{\kappa^2}{n^2}(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) - \left(1 + \frac{\kappa}{n} \sin \theta \sin \varphi\right)^2}, \quad (5)$$

$$W_m^n(u) = \frac{m}{2(m-n)} [P_n(u)P_{m-1}(u) - P_m(u)P_{n-1}(u)], \quad (m \neq n) \quad (6)$$

$$W_0^n(u) = \begin{cases} \ln \frac{1+u}{2}, & (n=0), \\ \frac{1}{2n} [P_n(u) - P_{n-1}(u)], & (n \neq 0), \end{cases} \quad u = \cos \pi \frac{d}{l}, \quad (7)$$

где  $P_n(u)$  - полиномы Лежандра первого рода.

Из решения редуцированных СЛАУ-2 вида (4a)-(4b) определяются значения коэффициентов  $b_{nx}$  и  $A_{nx}$ , через которые с помощью формул (2) и (3) выражаются остальные неизвестные амплитуды дифракционных полей. Заметим, что системы (4a) и (4b) являются независимыми только в случае, когда решетка находится в безграничной изотропной среде. При наличии одной или нескольких границ раздела магнитоэлектрических сред подсистемы (4a) и (4b) являются связанными и, следовательно, их решение следует проводить совместно.

### Случай Е-поляризации.

В этом частном случае исходная математическая модель имеет вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\zeta} = 0, \quad (\Phi < \zeta \leq 2\pi - \Phi), \quad (8a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \eta_n e^{in\zeta} = \kappa, \quad (|\zeta| < \Phi), \quad (8b)$$

где  $\eta_n = \sqrt{\kappa^2 - (n + \kappa \sin \theta)^2}$ ,  $\kappa = l / \lambda$ ,  $\lambda$  - длина падающей волны.

Учитывая связь между коэффициентами отражения  $a_n$  и прохождения  $b_n$ :

$$a_n + \delta_0^n = b_n, \quad (9)$$

где  $\delta_0^n$  - символ Кронекера, получим математическую модель исходной задачи в ином виде, а именно:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\zeta} = -1, \quad (\Phi < \zeta \leq 2\pi - \Phi), \quad (10a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \eta_n e^{in\zeta} = 0 \quad (|\zeta| < \Phi), \quad (10b)$$

Решение системы сумматорных уравнений (8a-8b) может быть получено путем сведения ее к краевой задаче Римана с коэффициентом задачи  $G(\varphi) = -1$  и свободным членом  $g(\varphi)$ , удовлетворяющим условию Гельдера, причем это можно проделать двумя способами, которые отличаются друг от друга различным видом так называемого параметра малости:

1-й способ

$$\chi_n = 1 + i \sqrt{\frac{\kappa^2}{(n + \kappa \sin \theta)^2} - 1}, \quad \kappa = \frac{l}{\lambda} \quad (11)$$

2-й способ

$$\tilde{\chi}_n = 1 + i \sqrt{\frac{\kappa^2}{n^2} - \left(1 + \frac{\kappa}{n} \sin \theta\right)^2}, \quad n \neq 0. \quad (12)$$

Очевидно, что в случае нормального падения плоской волны на решетку (этот случай рассмотрен в работе [5]) оба способа совпадают. В случае наклонного падения применение первого из указанных способов приводит к СЛАУ-2, некоторые матричные элементы которой выражаются через полиномы Лежандра, а остальные – через функции Лежандра первого рода, что значительно усложняет их вычисление [7,8]. Этот недостаток устраняется при введении параметра малости  $\tilde{\chi}_n$  вторым способом.

В работе [9] изложен метод решения задачи дифракции плоской Е-поляризованной электромагнитной волны на однослойной многоэлементной решетке (случай нормального падения), основанный на регуляризации эквивалентного исходной математической модели (10a-10b) сингулярного интегрального уравнения с логарифмическим ядром:

$$\frac{1}{\pi} \int_L j(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(y-\tau)}}{\gamma_n} d\tau = -1, \quad y \in L \quad (13)$$

В самом деле, вводя в рассмотрение функцию плотности тока на лентах решетки:

$$j(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_n e^{in\tau}, \quad (14)$$

из условия (10b) получим, что  $j(\tau) = 0$  на щелях решетки, т.е. при  $\tau \in [0, 2\pi] \setminus L$ . Подставляя в условие (10a) выражение для коэффициентов Фурье  $a_n \gamma_n$  из (14), получим СИУ в виде (13), ядро которого является  $2\pi$ -периодической функцией  $y$  и  $\tau$  и при  $y = \tau$  имеет логарифмическую особенность, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = i|n|$  и

$$\sum_{n \neq 0} \frac{e^{in(y-\tau)}}{|n|} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(y-\tau)}{n} = -2 \ln \left[ 2 \sin \frac{|y-\tau|}{2} \right]$$

В указанной работе СИУ в виде (13) решено путем сведения к краевой задаче Римана с коэффициентом задачи  $G = -1$  и индексом задачи, равным  $-1$ . В результате решение неоднородной задачи Римана имеет вид:

$$x(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau) \tau - z} d\tau, \quad (15)$$

где  $X(z) = \sqrt{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})}$  - выделенная в плоскости с разрезом по дуге  $L$  однозначная ветвь многозначной функции (каноническое решение задачи Римана),  $\alpha = e^{i\Phi}$ ,  $\bar{\alpha} = e^{-i\Phi}$ .

Решение в виде (15) существует тогда и только тогда, если выполняется условие разрешимости  $\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} d\tau = 0$ ,

В итоге получена СЛАУ-2, матричные элементы которой вычислены в работе [9].

Заметим, что решение системы сумматорных уравнений (10a-10b) может быть непосредственно сведено к задаче Римана с тем же коэффициентом задачи  $G = -1$ , путем введения функций

$$x^+(z) = \sum_{n \geq 0} x_n z^n, \quad z < 1 \quad (16)$$

$$x^-(z) = -\sum_{n < 0} x_n z^n, \quad z > 1$$

голоморфных соответственно внутри и вне окружности  $|z| = 1$ , причем  $x_n = a_n \gamma_n$ . Продифференцировав (10a) по  $\zeta$  и введя аналогично [9] параметр малости

$$\varepsilon_n = \frac{i}{\gamma_n} - \frac{1}{|n|}, \quad n \neq 0 \quad (17)$$

придем к задаче Римана:

$$x^+(e^{i\zeta}) + x^-(e^{i\zeta}) = g(e^{i\zeta}), \quad (18)$$

где  $g(e^{i\zeta}) = a_0 \kappa + i \sum_{n \neq 0} n x_n \varepsilon_n e^{in\zeta}$ .

Отметим, что решение задачи Римана ищется в классе функций, ограниченных на концах дуг окружности единичного радиуса. Решение получено в виде СЛАУ-2 с матричными элементами, которые выражаются через полиномы Лежандра первого рода.

### Результаты расчетов

В качестве примера на рис.2 и рис.3 представлена зависимость модуля коэффициента прохождения основной волны  $|b_0|$  от  $l/\lambda$  и обратного параметра  $\lambda/l$ .

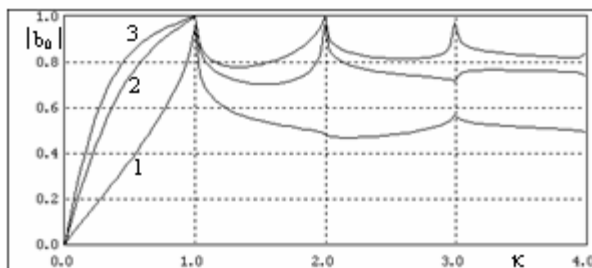


Рис. 2. Зависимость модуля коэффициента прохождения основной волны  $|b_0|$  от  $l/\lambda$

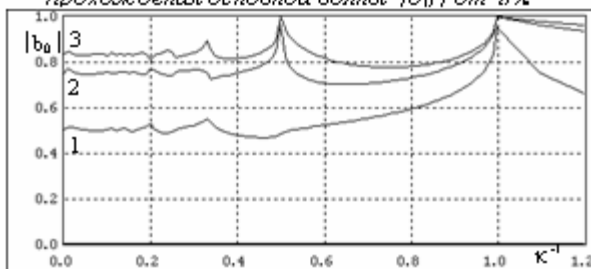


Рис. 3. Зависимость модуля коэффициента прохождения основной волны  $|b_0|$  от  $\lambda/l$ .

Кривым под номерами 1 – 3 соответствуют значения коэффициента заполнения решетки  $d/l = 1/2, 3/4, 5/6$  соответственно. На рис.4 представлена зависимость модуля коэффициента прохождения основной волны от коэффициента заполнения решетки  $d/l$ , кривым под номерами 1-3 соответствуют значения  $l/\lambda = 1, 2, 3$  соответственно. На рис.5 представлена зависимость модуля коэффициента прохождения от  $d/l$  для высших гармоник  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3/l$  при  $l/\lambda = 1, 2, 3$ .

Результаты вычислений коэффициентов отражения и прохождения во всех рассматриваемых случаях полностью совпадают [10].

Авторы выражают благодарность проф. Ю.В. Ганделю за постоянный интерес к работе и плодотворные дискуссии.

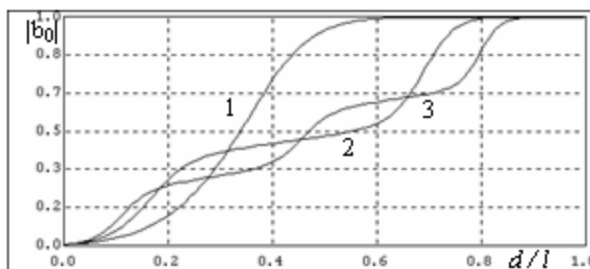


Рис. 4. Зависимость  $|b_0|$  от  $d/l$  ( $l/\lambda = 1, 2, 3$ )

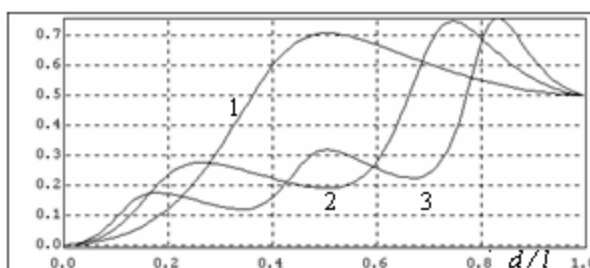


Рис. 5. Зависимость  $|b_n|$  от  $d/l$  ( $l/\lambda = 1, 2, 3$ ;  
 $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ )

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gandel Yu. The numerically analytic methods for solution diffraction problems on multi-element gratings //2005 5th international conference on antenna theory and techniques, 2005 May, Kiev, pp.42-45.
2. Gandel Yu. The method of dual and singular integral equations in the problems of diffraction by finite gratings //Electromagnetic Phenomena, Kharkov, 1998, Vol.1, No. 2, pp. 220-232.
3. Khoroshun V. The Riemann-Hilbert problem method in the theory of electromagnetic wave diffraction by periodic structures //2005 5th international conference on antenna theory and techniques, 2005 May, Kiev, pp. 424-426.
4. Жолткевич Г.М., Хохольков В.Б. Математичне моделювання явищ дифракції хвиль на стрічкових металевих ґратках. // Зб. доп. "Перші Каразінські природознавчі студії".-2004 .Харків.-С.94-96.
5. З.С.Агранович, В.А.Марченко, В.П.Шестопапов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ.- 1962.- Т.32, №4.- С. 381-394.
6. В.В.Хорошун. О модификации метода задачи Римана-Гильберта для случая наклонного падения плоской электромагнитной волны на решетку из лент // Вестник ХГУ. Радиофизика и электроника.- 1998.- Вып. 405.- С. 137-141.
7. А.И. Адонина, В.П. Шестопапов. Дифракция электромагнитных волн на плоской металлической решетке с экраном (случай произвольного падения) // РиЭ, 8, № 8, 1963.

8. Е.Н.Подольский. Дифракция электромагнитной волны, падающей под произвольным углом на плоскую металлическую решетку. // Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и Харьковск. матем. о-ва, 30, № 4, 1964.
9. Плещинский Н.Б. Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. 1987. - Изд-во Казанского ун-та,- 158 с.
10. K.Uchida, T.Noda, T.Matsunaga. Spectral domain analysis of electromagnetic wave scattering by an infinite plane metallic grating. // IEEE Trans. on antennas and propagation, vol.35, № 1, 1987.