

## Математическое моделирование аэродинамики и динамики вертикально-осевых ветроагрегатов

А. А. Приходько, Д. А. Редчиц

*Днепропетровский национальный университет, Украина  
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины*

For the solution of the coupled problem of dynamics and aerodynamics of vertical - axis wind turbine the numerical algorithm is designed on the basis of Navier-Stokes equations. Algorithms of the solution of unsteady incompressible Navier-Stokes equations in mobile curvilinear coordinates are implemented on the basis of implicit schemes. Testing of numerical algorithms for problems steady and unsteady flows past a cylinder, laminar flow past a rotating circular cylinder is carried out. Solution results of the coupled problem of dynamics and aerodynamics of Savonius rotor are parsed

### 1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется развитию возобновляемых, экологически чистых источников энергии. Одним из наиболее перспективных направлений является ветроэнергетика. Во всем мире с середины 70-х годов XX века наблюдается непрерывный рост установленной мощности ветроэнергетических установок (ВЭУ). Ветроэнергетика может стать источником наиболее дешевой электроэнергии, вырабатываемой в промышленных масштабах.

Эффективность ВЭУ напрямую связана с величиной коэффициента использования ветра. Аэродинамическая оптимизация формы лопастей ветроколеса является актуальной задачей повышения коэффициента полезного действия энергоустановки.

Существующие методики конструирования роторов ВЭУ опираются на известные данные по авиационным крыльевым профилям. Это не позволяет в должной мере учесть особенности обтекания вращающихся ветроколес. При выборе конструкции ВЭУ следует проводить комплексное исследование аэродинамических характеристик лопастей с учетом как нестационарных, так и пространственных эффектов.

При конструировании ветроагрегатов необходим учет взаимодействия многих физических процессов (отрыв потока, взаимодействие лопастей, течение в следе и вблизи гондолы ветроагрегата), которые происходят при вращении ветроколеса. Экспериментальные методы исследований зачастую оперируют ограниченными объемами данных. Кроме того, натурные эксперименты не всегда возможны, как по техническим, так и экономическим соображениям.

В настоящей работе представлены результаты численного исследования динамики и аэродинамики ВЭУ на примере роторов Дарье, Савониуса и их элементов.

**2. Постановка задачи**

Процессы динамики и аэродинамики ветроагрегата описываются уравнением вращения твердого тела относительно неподвижной оси и уравнениями Навье-Стокса.

Используя произвольные подвижные координаты  $\xi = \xi(x, y, t)$ ,  $\eta = \eta(x, y, t)$ , запишем систему нестационарных уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в безразмерном виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V}{J} \right) = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{e} - \bar{e}_v) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{f} - \bar{f}_v) \equiv -\bar{r}, \tag{2.2}$$

где  $\bar{r}$  – правая часть уравнений количества движения,

$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$  – якобиан преобразования координат,

$$\bar{u} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \bar{e} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \xi_x p + uU + \xi_t u \\ \xi_y p + vU + \xi_t v \end{bmatrix}, \bar{f} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \eta_x p + uV + \eta_t u \\ \eta_y p + vV + \eta_t v \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

$U = \xi_x u + \xi_y v$ ,  $V = \eta_x u + \eta_y v$ ,  $U, V$  – контравариантные компоненты скорости,  $\xi_t = -x_t \xi_x - y_t \xi_y$ ,  $\eta_t = -x_t \eta_x - y_t \eta_y$ ,  $\xi_x = J y_\eta$ ,  $\xi_y = -J x_\eta$ ,  $\eta_x = -J y_\xi$ ,  $\eta_y = J x_\xi$  – метрические коэффициенты.

Вязкие члены в неортогональной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{e}_v &= \frac{\nu}{\text{Re} J} \begin{bmatrix} (\xi_x^2 + \xi_y^2) u_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) u_\eta \\ (\xi_x^2 + \xi_y^2) v_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) v_\eta \end{bmatrix}, \\ \bar{f}_v &= \frac{\nu}{\text{Re} J} \begin{bmatrix} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) u_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) u_\eta \\ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) v_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) v_\eta \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $\text{Re}$  – число Рейнольдса,  $\nu$  – кинематическая вязкость.

Для определения положения ротора и текущей угловой скорости ветротурбины, одновременно с аэродинамической задачей, решалось уравнение вращения твердого тела относительно неподвижной оси

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_{aэp} - M_{наэp} - M_{сопp}, \tag{2.5}$$

где  $I_z$  – момент инерции ротора,  $M_{aэp}$  – аэродинамический момент, определяемый из решения задачи аэродинамики,  $M_{наэp}$  – момент нагрузки на валу ветроагрегата,  $M_{сопp}$  – момент трения на оси.

Момент сопротивления на валу ветроагрегата определялся квадратичной функцией угловой скорости вращения  $M_{\text{сопр}} = A\omega^2 + B\omega + C$ , а момент нагрузки – из условия поддержания заданной угловой скорости вращения  $\omega_3$

$$M_{\text{нагр}} = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_3 \\ M_{\text{аэр}} - M_{\text{сопр}}, & \omega = \omega_3 \end{cases} \quad (2.6)$$

*Начальные и граничные условия.* В качестве начальных условий для стационарных задач задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области. Для нестационарных задач использовалось решение уравнений Навье-Стокса в стационарной формулировке. На внешней границе, за исключением выходного участка, где задавались условия Неймана, значения зависимых переменных рассчитывались по методу характеристик. На поверхности тела ставилось условие прилипания. При вычислении давления на обтекаемой поверхности нормальный градиент давления полагался равным нулю.

### 3. Численный алгоритм. Стационарная формулировка.

Метод искусственной сжимаемости [1] модифицирует уравнение неразрывности путем добавления производной давления по псевдвремени

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\beta \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V}{J} \right) \right], \quad (3.1)$$

где  $\tau$  – псевдвремя,  $\beta$  – параметр искусственной сжимаемости.

В уравнения количества движения также вводится псевдвременная производная скорости. В случае стационарной формулировки, уравнения интегрируются до тех пор, пока правая часть  $\bar{r}$  в уравнении (2.2) и дивергенция скорости не обратится в ноль. Таким образом, система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{E} - \bar{E}_v) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{F} - \bar{F}_v) = -\bar{R}, \quad (3.2)$$

где  $\bar{R}$  – вектор невязок этих уравнений,

$$\bar{D} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} \beta U \\ J \\ \bar{e} \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \beta V \\ J \\ \bar{f} \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{e}_v \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}_v \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Аппроксимируем псевдвременную производную с помощью неявной схемы Эйлера

$$\frac{\bar{D}^{m+1} - \bar{D}^m}{\Delta \tau} = -\bar{R}^{m+1}, \quad (3.4)$$

где верхний индекс  $m$  соответствует псевдвременному итерационному слою. После линеаризации правой части  $\bar{R}^{m+1}$ , уравнение (3.4) принимает вид

$$\left[ \frac{1}{\Delta \tau} I + \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{D}} \right)^m \right] (\bar{D}^{m+1} - \bar{D}^m) = -\bar{R}^m, \quad (3.5)$$

где  $I$  – единичная  $3 \times 3$  матрица. Это уравнение итерационно решается до тех пор, пока норма невязки  $\bar{R}$  не станет меньше некоторой, наперед заданной, малой величины.

### Нестационарная формулировка

При исследовании нестационарных течений в уравнениях количества движения производные по времени вычисляются по конечно-разностной второго порядка трехточечной схеме

$$\frac{3\bar{u}^{n+1} - 4\bar{u}^n + \bar{u}^{n-1}}{2\Delta t} = -\bar{r}^{n+1}, \quad (3.6)$$

где верхний индекс  $n$  обозначает величину времени  $t = n\Delta t$  и  $\bar{r}$  – правая часть в уравнениях количества движения (2.2).

Для решения уравнений (3.2) и выполнения уравнения неразрывности на временном слое  $n+1$ , введем псевдовременной слой и обозначим верхним индексом  $m$ . Уравнения решаются итеративно так, чтобы  $\bar{u}^{n+1,m+1}$ ,  $\bar{v}^{n+1,m+1}$  приближались к значению скорости  $\bar{u}^{n+1}$ ,  $\bar{v}^{n+1}$  на новом временном слое, а дивергенция скорости стремилась к нулю.

Когда дивергенция скорости обращается в нуль, формулировка искусственной сжимаемости представляется в виде очень похожего для стационарного случая, а уравнение неразрывности совпадает с уравнением неразрывности для стационарных течений

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial \tau} + \frac{1}{2\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ 3\bar{u}^{n+1} - 4\bar{u}^n + \bar{u}^{n-1} \end{bmatrix} = -\bar{R}^{n+1}. \quad (3.7)$$

Это уравнение решается до тех пор, пока производная по псевдовремени  $\partial \bar{D} / \partial \tau$  не обратится в нуль. В этом случае, уравнение (2.1) выполняется и дивергенция скорости обращается в нуль. Применяя неявную конечно-разностную схему Эйлера к псевдовременной производной

$$I_{\tau} (\bar{D}^{n+1,m+1} - \bar{D}^{n+1,m}) = -\bar{R}^{n+1,m+1} - \frac{I_m}{\Delta t} (1.5\bar{D}^{n+1,m} - \bar{D}^n + 0.5\bar{D}^{n-1}), \quad (3.8)$$

где

$$I_{\tau} = \text{diag} \left[ \frac{1}{\Delta \tau}, \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1.5}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1.5}{\Delta t} \right], \quad I_m = \text{diag} [0, 1, 1]. \quad (3.9)$$

Линеаризуем невязку  $\bar{R}^{n+1,m+1}$  и запишем уравнение (3.7) в дельта форме [2]

$$\begin{aligned} & \left[ I_{\tau} + \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{D}} \right)^{n+1,m} \right] (\bar{D}^{n+1,m+1} - \bar{D}^{n+1,m}) = \\ & = -\bar{R}^{n+1,m} - \frac{I_m}{\Delta t} (1.5\bar{D}^{n+1,m} - \bar{D}^n + 0.5\bar{D}^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Линеаризация уравнения (3.8) выполнено по псевдовремени. В случае нестационарной постановки задачи, необходимо устанавливать решение по псевдовремени на каждом шаге физического времени. Обе системы уравнений (3.4) и (3.8) требуют дискретизации вектора невязки  $\bar{R}$ . Производные

в вязких членах аппроксимируются центрально-разностной схемой второго порядка. Для конвективных потоков используется противопоточное дифференцирование, основанное на методе Roe [3]. Для всех результатов, полученных в настоящей работе, использовался пятый порядок для внутренних точек и второй вблизи границ.

Вектор потоков  $\bar{E}_i$  отличается от стационарной формулировки метода искусственной сжимаемости наличием нестационарных метрических членов, которые являются ненулевыми в случае подвижных сеток. Применение противопоточных схем, основанных на расщеплении разностей потоков, позволяет естественным образом добавлять диссипацию в исходную систему, в то время как центрально-разностное дифференцирование требует введения искусственных диссипативных членов. Исходя из этого, в данной работе для дискретизации конвективных членов в уравнении (3.2) используется противопоточная схема, основанная на расщеплении разностей потоков [2].

Противопоточная схема требует использования собственных чисел матриц Якоби векторов конвективных потоков. Обобщенный вектор потоков для двумерной системы уравнений имеет вид

$$\bar{E}_i = \begin{bmatrix} \beta Q \\ k_x p + uQ + k_t u \\ k_y p + vQ + k_t v \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где  $\bar{E}_i = \bar{E}, \bar{F}$  для  $i=1,2$  соответственно, нормированные метрики определяются из следующих соотношений

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad i=1,2, \\ k_y &= \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad i=1,2, \\ k_t &= \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

контравариантная компонента скорости

$$Q = k_x u + k_y v. \quad (3.13)$$

Преобразуем матрицу Якоби к диагональному виду

$$\bar{A}_i = \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial D} = \begin{bmatrix} 0 & \beta k_x & \beta k_y \\ k_x & k_x u + Q & k_y u \\ k_y & k_x v & k_y v + Q \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Аналог преобразования для матрицы Якоби

$$A_i = X_i \Lambda_i X_i^{-1}, \quad (3.15)$$

где  $\Lambda_i$  – диагональная матрица собственных значений

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3], \\ \lambda_1 &= Q + k_t, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= Q + c + \frac{1}{2}k_t, \\ \lambda_3 &= Q - c + \frac{1}{2}k_t,\end{aligned}\tag{3.17}$$

и  $c$  – искусственная скорость звука

$$c = \sqrt{\left(Q + \frac{1}{2}k_t\right)^2 + \beta(k_x^2 + k_y^2)}.\tag{3.18}$$

Эта величина всегда больше чем  $Q$ , следовательно, второе собственное значение  $\lambda_2$  будет всегда положительным, а третье – всегда отрицательным.

Матрица левых собственных векторов

$$X_i = \frac{1}{2\beta c\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right)} \begin{bmatrix} 0 & \beta\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right) & -\beta\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right) \\ -2\beta ck_y & (u\lambda_2 + \beta k_x)\left(c + \frac{1}{2}k_t\right) & (u\lambda_3 + \beta k_x)\left(c - \frac{1}{2}k_t\right) \\ 2\beta ck_x & (v\lambda_2 + \beta k_y)\left(c + \frac{1}{2}k_t\right) & (u\lambda_3 + \beta k_y)\left(c - \frac{1}{2}k_t\right) \end{bmatrix},\tag{3.19}$$

и ей обратная матрица правых собственных векторов

$$X_i^{-1} = \begin{bmatrix} k_y u - k_x v & -v\lambda_1 - \beta k_y & u\lambda_1 + \beta k_x \\ -\lambda_3 & \beta k_x & \beta k_y \\ -\lambda_2 & \beta k_x & \beta k_y \end{bmatrix}.\tag{3.20}$$

Противопоточная схема обладает диссипацией, которая автоматически подавляет осцилляции, возникающие вследствие нелинейности конвективных членов. В дополнении, вектор потока, основанный на противопоточном дифференцировании, вводит члены на главную диагональ матрицы Якоби вектора невязки, которые в центрально-разностной схеме отсутствуют. Это приводит к диагональному преобладанию в неявной схеме и устойчивости численного алгоритма.

Противопоточная схема рассмотрена для одномерного случая и применяется для каждого направления отдельно. Расщепление разностей потоков основано на знаке собственных значений матрицы Якоби конвективных членов. Эта схема была описана Roe [3] для аппроксимаций решения задачи Риммана уравнений сжимаемого газа и модифицирована Rogers и Kwak [2] для несжимаемых течений.

Производная конвективных потоков в направлении  $\xi$  аппроксимируется

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} \approx \frac{[E_{j+1/2} - E_{j-1/2}]}{\Delta \xi},\tag{3.21}$$

где  $E_{j+1/2}$  – вектор потока,  $j$  – индекс для направления  $\xi$ .

Вектор потока определяется соотношением

$$E_{j+1/2} = \frac{1}{2} [E(D_{j+1}) + E(D_j) - \phi_{j+1/2}],\tag{3.22}$$

где  $\phi_{j+1/2}$  – диссипативный член.

Для  $\phi_{j+1/2} = 0$  эта запись соответствует центрально-разностной схеме. Противопоточная схема первого порядка имеет вид

$$\phi_{j+1/2} = \Delta E_{j+1/2}^+ - \Delta E_{j+1/2}^-, \quad (3.23)$$

где  $\Delta E^\pm$  – разность потоков в направлении положительного и отрицательного распространения волн. Разность потоков вычисляется как

$$\Delta E_{j+1/2}^\pm = A^\pm(\bar{D})\Delta D_{j+1/2}, \quad (3.24)$$

где

$$\Delta D_{j+1/2} = D_{j+1} - D_j. \quad (3.25)$$

Плюс (минус) матрицы Якоби имеют только положительные (отрицательные) собственные значения

$$A^\pm = X \Lambda^\pm X^{-1}, \quad (3.26)$$

$$\Lambda^\pm = \frac{1}{2}(\Lambda \pm |\Lambda|). \quad (3.27)$$

При расчете матрицы Якоби используется некоторое промежуточное значение, которое является функцией окрестностей точек  $j$  и  $j+1$ . Свойства Roe [3], которые необходимы для консервативной схемы, удовлетворяются, если оно берется как среднее из этих величин

$$\bar{D} = \frac{1}{2}(D_{j+1} + D_j). \quad (3.28)$$

Схемы более высокого порядка могут быть получены с использованием разностей потоков. Схема третьего порядка записывается с помощью соотношения

$$\phi_{j+1/2} = -\frac{1}{3}[\Delta E_{j-1/2}^+ - \Delta E_{j+1/2}^+ + \Delta E_{j+1/2}^- - \Delta E_{j+3/2}^-]. \quad (3.29)$$

Основная проблема с использованием схем выше второго порядка заключается в сохранении точности вблизи границ. Увеличение порядка точности приводит к расширению вычислительного шаблона. Так схема, предложенная Rai [4], пятого порядка точности, основанная на противопоточном дифференцировании требует 11 точек для расчетного шаблона, а схема Rogers и Kwak [2] лишь 7 точек и имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_{j+1/2} = -\frac{1}{30}[-2\Delta E_{j-3/2}^+ + 11\Delta E_{j-1/2}^+ - 6\Delta E_{j+1/2}^+ - 3\Delta E_{j+3/2}^+ + \\ + 2\Delta E_{j+5/2}^- - 11\Delta E_{j+3/2}^- + 6\Delta E_{j+1/2}^- + 3\Delta E_{j-3/2}^-]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

В точках вблизи границ порядок схемы должен быть понижен до второго с помощью соотношения

$$\phi_{j+1/2} = \epsilon[\Delta E_{j+1/2}^+ - \Delta E_{j+1/2}^-], \quad (3.31)$$

где  $\epsilon=0$  соответствует центрально-разностной схеме второго порядка. Для  $\epsilon=1$  это получаем схему первого порядка в соотношении (3.22). Ненулевое значение коэффициента  $\epsilon$  в уравнении (3.31) приводит к добавлению диссипации вблизи границ. В настоящей работе, в соответствии с рекомендациями [2], принято значение  $\epsilon=0.01$ .

Матрицы левых и правых собственных векторов (3.19), (3.20) четко показывают, что параметр искусственной сжимаемости  $\beta$  оказывает влияние не

только в уравнении неразрывности, но и в уравнениях количества движения. Анализ для декартовых координат показывает, что диссипативные члены, добавляя диссипацию в уравнения количества движения, растут пропорционально корню квадратному из  $\beta$  [5].

**Неявная схема**

Матрица Якоби вектора невязок  $\bar{R}$  необходима для добавления в левую часть уравнения (3.10). Используя формулу (3.22) для конвективных и центрально-разностную для вязких членов запишем численную аппроксимацию вектора невязки относительно точки  $x_{j,k}, y_{j,k}$

$$R_{j,k} = \frac{\tilde{E}_{j+1/2,k} - \tilde{E}_{j-1/2,k}}{\Delta\xi} + \frac{\tilde{F}_{j,k-1/2} - \tilde{F}_{j,k+1/2}}{\Delta\eta} - \frac{(\bar{E}_v)_{j+1,k} - (\bar{E}_v)_{j-1,k}}{2\Delta\xi} - \frac{(\bar{F}_v)_{j,k+1} - (\bar{F}_v)_{j,k-1}}{2\Delta\eta}, \quad (3.32)$$

где численные потоки  $\tilde{E}$  и  $\tilde{F}$  определяются с помощью соотношения (3.22) с первым, третьим или пятым порядком диссипативных членов выражений (3.23), (3.29), (3.30), соответственно. Дальнейший вывод сделан в предположении, что  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$  эквивалентны единице.

Формирование точной матрицы Якоби вектора невязки сложно для практической реализации, особенно, когда используется противопоточное дифференцирование высокого порядка точности. Поэтому, в неявной части используют первый порядок противопоточного дифференцирования. Применяя первый порядок для конвективных членов, получим вектор невязки

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \bar{E}_{j+1,k} - \bar{E}_{j-1,k} - \Delta E_{j+1/2,k}^+ + \Delta E_{j+1/2,k}^- + \Delta E_{j-1/2,k}^+ - \Delta E_{j-1/2,k}^- + F_{j,k+1} - F_{j,k-1} - \Delta F_{j,k+1/2}^+ + \Delta F_{j,k+1/2}^- + \Delta F_{j,k-1/2}^+ - \Delta F_{j,k-1/2}^- + (\bar{E}_v)_{j+1,k} + (\bar{E}_v)_{j-1,k} - (\bar{F}_v)_{j,k+1} + (\bar{F}_v)_{j,k-1} \right]. \quad (3.33)$$

Аппроксимируя матрицы Якоби вектора невязки сформируем ленточную матрицу

$$\frac{\partial R}{\partial D} = B \left[ \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k-1}}, 0, \dots, 0, \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j-1,k}}, \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k}}, \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j+1,k}}, 0, \dots, 0, \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k+1}} \right], \quad (3.34)$$

где  $B$  – ленточная матрица.

Члены, входящие в неявную часть, определяются с помощью следующих соотношений

$$\frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k-1}} \approx \frac{1}{2} \left[ -\bar{B}_{j,k-1} - B_{j,k-1/2}^+ + B_{j,k-1/2}^- + (\gamma_2)_{j,k-1} \right],$$

$$\frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j-1,k}} \approx \frac{1}{2} \left[ -\bar{A}_{j-1,k} - A_{j-1/2,k}^+ + A_{j-1/2,k}^- + (\gamma_1)_{j-1,k} \right],$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k}} &\approx \frac{1}{2} \left[ A_{j+1/2,k}^+ + A_{j-1/2,k}^+ - A_{j+1/2,k}^- - A_{j-1/2,k}^- \right. \\ &\quad \left. + B_{j,k+1/2}^+ + B_{j,k-1/2}^+ - B_{j,k+1/2}^- - B_{j,k-1/2}^- \right], \quad (3.35) \\ \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j+1,k}} &\approx \frac{1}{2} \left[ A_{j+1,k} - A_{j+1/2,k}^+ + A_{j+1/2,k}^- - (\gamma_1)_{j+1,k} \right], \\ \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k+1}} &\approx \frac{1}{2} \left[ B_{j,k+1} - B_{j,k+1/2}^+ + B_{j,k+1/2}^- - (\gamma_2)_{j,k+1} \right], \end{aligned}$$

где  $\bar{A} = \bar{A}_1$ ,  $\bar{B} = \bar{A}_2$  в уравнении (3.14)

$$\begin{aligned} A^\pm &= X_1 \Lambda_1^\pm X_1^{-1}, \quad (3.36) \\ B^\pm &= X_2 \Lambda_2^\pm X_2^{-1}. \end{aligned}$$

В левой части уравнения (3.10) сохранились вязкие члены лишь для ортогональной сетки. В результате

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\nu}{\operatorname{Re} J} (\xi_x^2 + \xi_y^2) I_m \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.37) \\ \gamma_2 &= \frac{\nu}{\operatorname{Re} J} (\eta_x^2 + \eta_y^2) I_m \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

где  $I_m$  – модифицированная единичная матрица

$$I_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Система уравнений решалась с помощью метода Гаусса-Зейделя. В этой процедуре матрица в левой части неявного уравнения формировалась из величин с предыдущего временного слоя. Для каждой точки

$$V[V, 0, \dots, 0, X, Y, Z, 0, \dots, 0, W] \Delta D = R. \quad (3.39)$$

#### 4. Результаты расчетов

Рассмотренный алгоритм был применен для расчета стационарного и нестационарного обтекания цилиндра, вращающегося цилиндра (эффект Магнуса) и трехлопастного ротора Савониуса.

*4.1. Обтекание кругового неподвижного цилиндра.* С целью проверки эффективности разработанного численного алгоритма рассчитано стационарное (рис.1 а, б, в) и нестационарное течение несжимаемой жидкости за круговым цилиндром (рис.1 г, д). Краткий обзор работ посвященной этой задаче приведен в [6-8].

Ламинарное течение в следе за цилиндром при обтекании несжимаемой жидкостью характеризуется следующими режимами: безотрывное стационарное, стационарный отрыв и нестационарное отрывное периодическое. Линии тока, построенные по мгновенному полю скоростей, для различных чисел Рейнольдса приведены на рис. 1. При числах Рейнольдса  $Re < 5$  обтекание

цилиндра происходит без отрыва пограничного слоя (рис. 1 а). Увеличение числа Рейнольдса приводит к отрыву ламинарного пограничного слоя от поверхности цилиндра. Отрыв является следствием взаимодействия конвективных, вязких сил и градиента давления. Под действием положительного градиента давления возникает возвратное течение, которое приводит к утолщению пограничного слоя. В точке отрыва потока, где касательные напряжения обращаются в нуль, поток отходит от поверхности цилиндра. Экспериментальные и численные расчеты свидетельствуют, что при значении Рейнольдса  $Re < Re_{кр}$  (для цилиндра  $Re = 40$ ) реализуется стационарный режим течения, характеризующийся наличием в ближнем следе двух симметричных вихрей. При малых числах Рейнольдса  $Re = 5 - 40$  ширина и длина вихревого следа увеличивается с ростом числа Рейнольдса (рис. 1 б, в). При увеличении числа Рейнольдса размеры вихревой зоны растут до тех пор, пока не будет достигнуто его критическое значение. В этом случае длина отрывной зоны равна примерно двум диаметрам цилиндра. Границу вихревой области для стационарного режима течения можно определить по линии нулевой скорости.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса течение в следе приобретает асимметричный характер (рис. 1 г, д и рис. 6 а). Обтекание цилиндра, при числах Рейнольдса, превышающих критическое значение, сопровождается отрывом вихрей, которые сносятся вниз по потоку через равные интервалы времени. Периодическое вихревое течение можно разделить на два диапазона в зависимости от числа Рейнольдса. Для  $40 < Re < 300$  реализуется устойчивый ламинарный режим течения, с регулярной вихревой дорожкой, при котором можно еще не учитывать влияние турбулентных пульсаций. При высоких числах Рейнольдса возникает турбулизация течения в следе за цилиндром, что приводит к необходимости моделирования турбулентности.

Распределение коэффициентов давления  $C_p$  и трения  $C_f$  по поверхности цилиндра при изменении Рейнольдса приведены на рис. 2 и 3. Рост числа Рейнольдса является причиной понижения коэффициента давления в передней и увеличения в задней критических точках, а, следовательно, и уменьшения лобового сопротивления. Анализируя коэффициент трения можно установить положение точки отрыва потока от поверхности цилиндра. Угол отрыва пограничного слоя, отсчитываемый от задней критической точки, растет с увеличением числа Рейнольдса. Нестационарный режим течения  $Re > 40$  не имеет строго определенного угла отрыва. В донной части цилиндра может формироваться сразу несколько вихрей. Их количество и интенсивность зависит от времени и числа Рейнольдса, и они влияют на положение точек отрыва и присоединения потока на поверхности цилиндра.

Численный расчет вихревой структуры течения для числа Рейнольдса  $Re = 140$  сравнивался с экспериментом из альбома течений Ван-Дайка [9].

Зависимость чисел Струхала  $St$  от Рейнольдса  $Re$ , которые сопоставляются с экспериментальными данными Roshko [10] приведены на рис. 5.

4.2. *Эффект Магнуса.* При расчете нагрузок, действующих на опорную башню, необходимо учитывать нестационарные эффекты, возникающие при

взаимодействии подвижных элементов конструкции с набегающим потоком ветра. Одной из таких нестационарных нагрузок является поперечная сила, возникающая при вращении несущего цилиндра опорной башни. Такое явление известно в литературе как эффект Магнуса. Течение, за вращающимся цилиндром, исследовалось многими авторами: экспериментально Taneda [11], Tokumaru и Dimotakis [12], Filler [13] и численно Wu [14], Beak [15].

В настоящей работе проведены численные исследования двумерного ламинарного течения за круговым цилиндром, вращающимся против часовой стрелки с постоянной скоростью. Моделирование выполнено для течений при различных числах Рейнольдса  $Re$  и линейной скорости поверхности цилиндра  $\alpha$ , отнесенной к скорости невозмущенного потока в диапазоне  $0 \leq \alpha \leq 2$ . В расчетах  $\alpha$  определяется как  $\alpha = \omega d / (2U_\infty)$ , где  $\omega$  – угловая скорость цилиндра. Численное моделирование показало, что вихревой след существует при низких скоростях вращения и полностью подавляется при  $\alpha > \alpha_L$ , где критическая скорость вращения  $\alpha_L$  зависит от числа Рейнольдса, например,  $\alpha_L \approx 1.4, 1.8, 1.9$  и  $2.0$  для  $Re = 60, 100, 160$  и  $200$ , соответственно. При  $Re = 40$  след за цилиндром носит стационарный характер и не зависит от скорости вращения  $\alpha$ . Вращение цилиндра приводит к изменению течения в следе и конфигурации вихревой дорожки, которая может уменьшить осцилляции, вызванные течением, и величину подъемной силы. Вращение цилиндра приводит к ускорению течения на одной стороне цилиндра и замедлению на другой. Давление на верхней части цилиндра становится больше, чем на нижней, и появляется ненулевая поперечная сила, осредненная по времени. Как результат, вращение сильно видоизменяет структуру течения, что приводит к понижению осцилляций. Течение за цилиндром было стационарным или нестационарным (периодическим) в зависимости от двух параметров  $Re$  и  $\alpha$ .

Контуры завихренности для трех различных значений  $\alpha$  для одного момента времени при  $Re = 200$ , показаны на рис.6. При наличии вихревого следа, распределения завихренности за цилиндром подобны по форме (рис.6 а, б), а эффекты вращения проявляются в окрестностях поверхности цилиндра. В потоке жидкости вблизи верхней поверхности цилиндра, отрицательная завихренность с возрастанием  $\alpha$ , доминирует над положительной завихренностью на нижней стороне. Для значений  $\alpha > \alpha_L$  вихревой след полностью подавляется и наблюдается наличие 2-х стационарных вихрей, присоединенных к цилиндру (рис. 6 в). При дальнейшем возрастании  $\alpha$ , вихри становятся вытянутыми и смещенными в направлении вращения.

Распределение коэффициента давления по поверхности цилиндра в момент времени, при котором коэффициент лобового сопротивления имеет минимальное значение, а коэффициент подъемной силы обращается в нуль, для случаев с различными комбинациями скорости вращения, показано на рис.7. Влияние эффекта вращения на количественные характеристики течения, приведено для фиксированного значения числа Рейнольдса ( $Re = 200$ ).

Средние значения коэффициента давления для  $\alpha = 0$  симметрично относительно  $\theta = 180^\circ$ , что приводит к нулевому значению средней подъемной силы (рис.8). При возрастании  $\alpha$ , поток становится ассиметричным и за тот же

промежуток времени давление на нижней стороне цилиндра ( $\theta = 270^\circ$ ) понижается, в результате появляется отрицательная средняя сила (рис.8). С ростом  $\alpha$ , задняя критическая точка перемещается по поверхности цилиндра в направлении противоположном вращению.

В результате численного исследования установлено, что для ламинарного режима течения ( $47 \leq Re \leq 200$ ), вихревой след существует при низких скоростях вращения и полностью подавляется при  $\alpha > \alpha_L$ . Рост числа Рейнольдса дестабилизирует течение в следе за цилиндром, в то время как вращение стабилизирует его.

Вращение цилиндра в вязких течениях может сильно повлиять на структуру течения, понизить, индуцируемые потоком, осцилляции в вихревом следе. При наличии вихревого следа, в диапазоне  $\alpha \leq \alpha_L$ , наблюдаются изменения в структуре течения. Во-первых, числа Струхали почти не зависят от скорости вращения, но сильно зависят от чисел Рейнольдса. Во-вторых, при увеличении скорости вращения, средние значения подъемной силы возрастают почти линейно  $\alpha$ , а лобового сопротивления понижаются.

Результаты показывают, что вращение цилиндра может подавлять интенсивность вихревой структуры. Вихревой след существует при низких скоростях вращения и полностью исчезает при  $\alpha > \alpha_L$ , где  $\alpha_L$  – критическая скорость вращения, которая логарифмически зависит от числа Рейнольдса. Пока существует вихревой след, числа Струхали остаются почти постоянными, при изменении  $\alpha$ . С возрастанием  $\alpha$ , значение подъемной силы линейно возрастает, а значение лобового сопротивления понижается и значительно отличается от результатов, получаемых по теории потенциального течения.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что при постоянной скорости ветра на несущий цилиндр опорной башни действуют аэродинамические силы, переменные по величине, направлению и частоте, зависящие от значений текущей угловой скорости.

*4.3. Ротор Савониуса.* Для совершенствования ветроэнергетической установки (ВЭУ), важным моментом является анализ поля течения вокруг вращающегося ротора ВЭУ. В качестве вертикально-осевой ВЭУ выбран трехлопастный ротор Савониуса. При взаимодействии с набегающим потоком ветра ротор Савониуса генерирует сложное поле течения с большими отрывными зонами. Основными преимуществами этого класса ВЭУ является простота конструкции, независимость от направления ветра, низкая скорость и большой крутящий момент. Так как скорость вращения ротора Савониуса не высока и числа Маха низкие ( $M < 0.1$ ), поле течения можно считать несжимаемым.

На базе разработанного численного алгоритма решена связанная задача динамики и аэродинамики ротора Савониуса. Расчетная сетка, построенная возле ротора, содержала порядка миллиона узлов. Расчет проводился в два этапа. На первом этапе задавался невозмущенный поток во всей области, в который внезапно вносили преграду – ротор Савониуса. Целью первого этапа было получение периодического течения, по структуре похожего на дорожку Кармана. На втором этапе совместно с аэродинамической задачей решалось

уравнение вращения. В некоторый момент времени, который принимается за начало отсчета, «вынимается стопор» и ротор начинает вращение под действием набегающего потока ветра.

Контуры завихренности возле неподвижного и подвижного ротора приведены на рис. 7. В случае неподвижного ротора Савониуса за лопастями формируются вихри, которые поочередно отрываются от лопастей и сносятся вниз по потоку. Когда ротор приводится в движение, интенсивность вихрей резко возрастает, а геометрические размеры уменьшаются. В этом случае, период схода вихрей определяется не только скоростью набегающего потока и характерными размерами, но и частотой вращения самого ротора. От того, с какой угловой скоростью вращается ротор Савониуса, зависит интенсивность и частота схода вихрей. Вихри, сходящие с лопастей идущих на встречу потоку, имеют меньшую интенсивность, чем те, которые сходят с лопастей, которые движутся по потоку. Это объясняется тем, что в первом случае, вихри подтормаживаются, за счет действия вязких эффектов, а во втором случае, они, наоборот, подталкиваются движущимися лопастями. Направление вращения их различно.

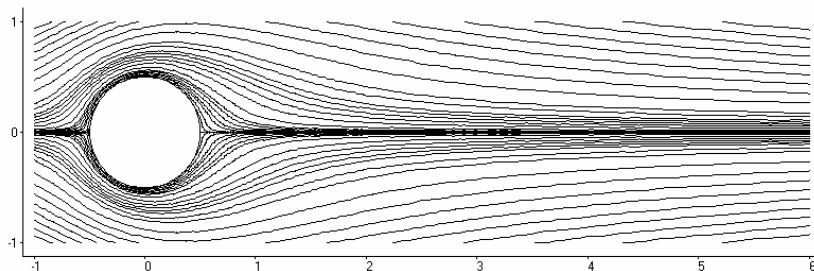
Результаты решения связанной задачи динамики и аэродинамики ротора ветроколеса сравнивались с экспериментальными данными и результатами расчетов по инженерной методике, разработанной авторами [16].

## 6. Выводы

Для исследования связанной задачи динамики и аэродинамики вертикально-осевого ветроагрегата разработан неявный численный алгоритм на основе уравнения вращения и нестационарных двумерных уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в подвижных криволинейных координатах.

Проведено тестирование численного алгоритма на задачах о развитии течения в следе за неподвижным и вращающимся цилиндром.

Выполнен расчет связанной задачи динамики и аэродинамики ротора Савониуса. Разработанные математические модели, алгоритмы, вычислительные программы позволяют рассчитывать изменение во времени угловой скорости вращения ветротурбины, внешней нагрузки, выбирать рациональные компоновочные схемы (количество лопастей, форму и углы установки профиля) с учетом их движения под действием нестационарного набегающего потока ветра.



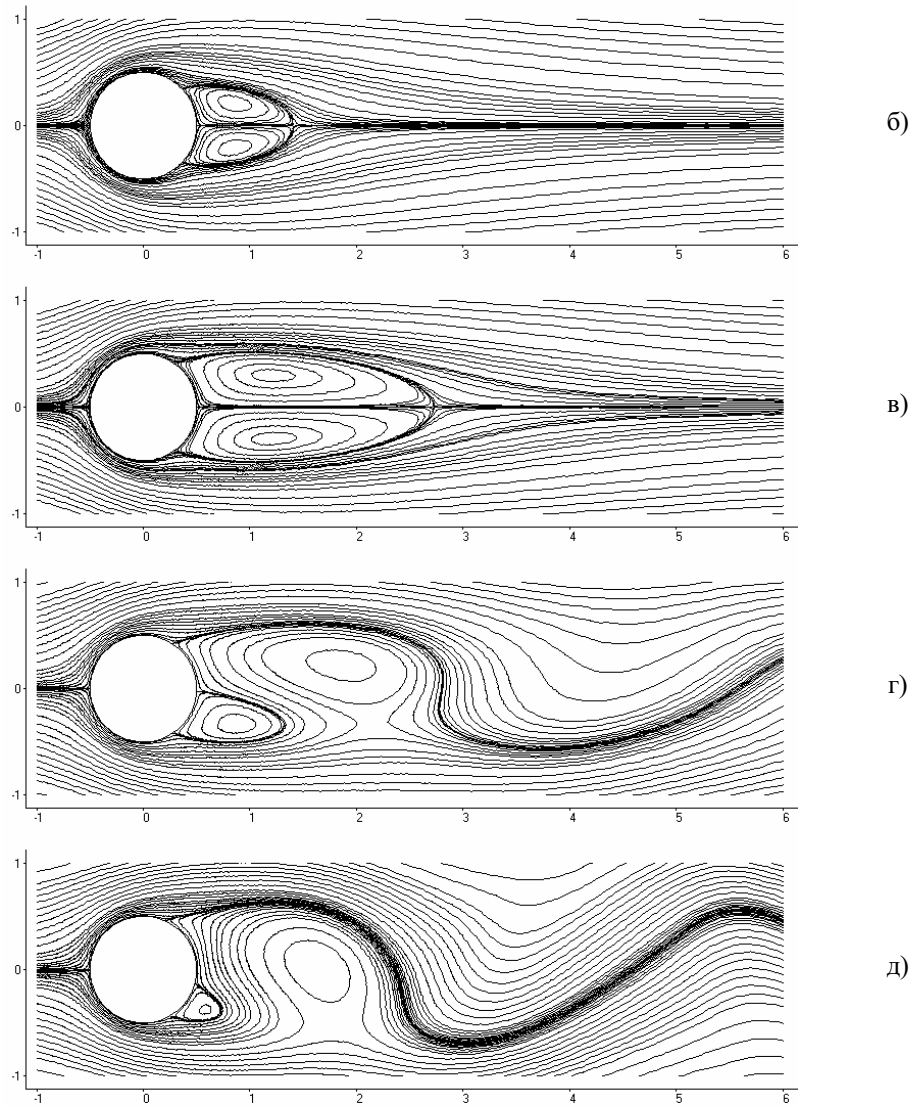


Рис. 1. Стационарное и нестационарное обтекание цилиндра.  
 Линии тока построенные по мгновенному полю скоростей:  
 а –  $Re = 5$ , б –  $Re = 20$ , в –  $Re = 40$ , г –  $Re = 50$ , д –  $Re = 100$

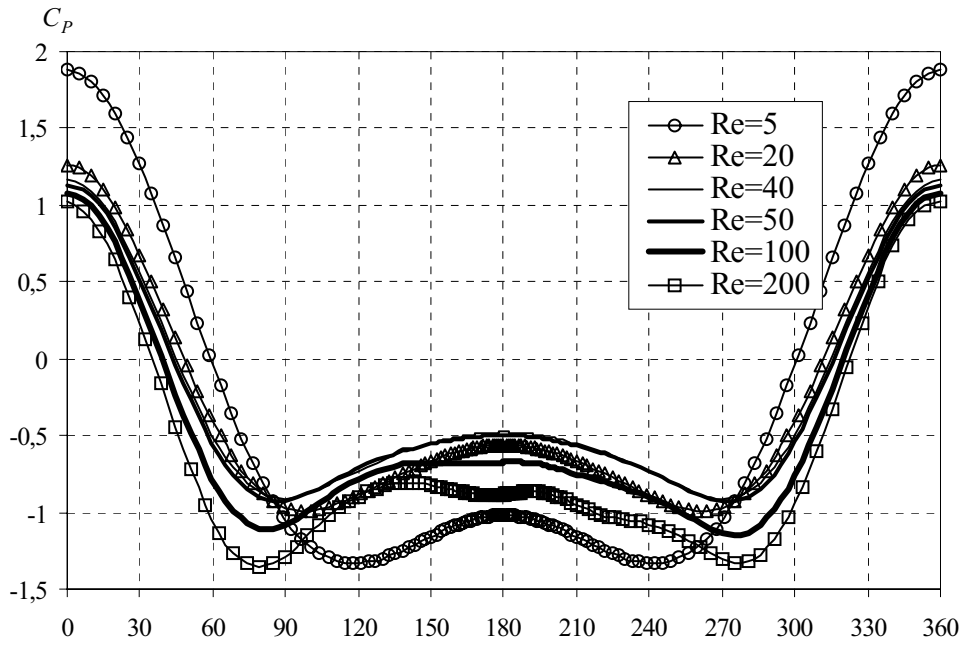


Рис. 2. Распределение коэффициента давления  $C_p$  по поверхности кругового цилиндра в зависимости от чисел Рейнольдса

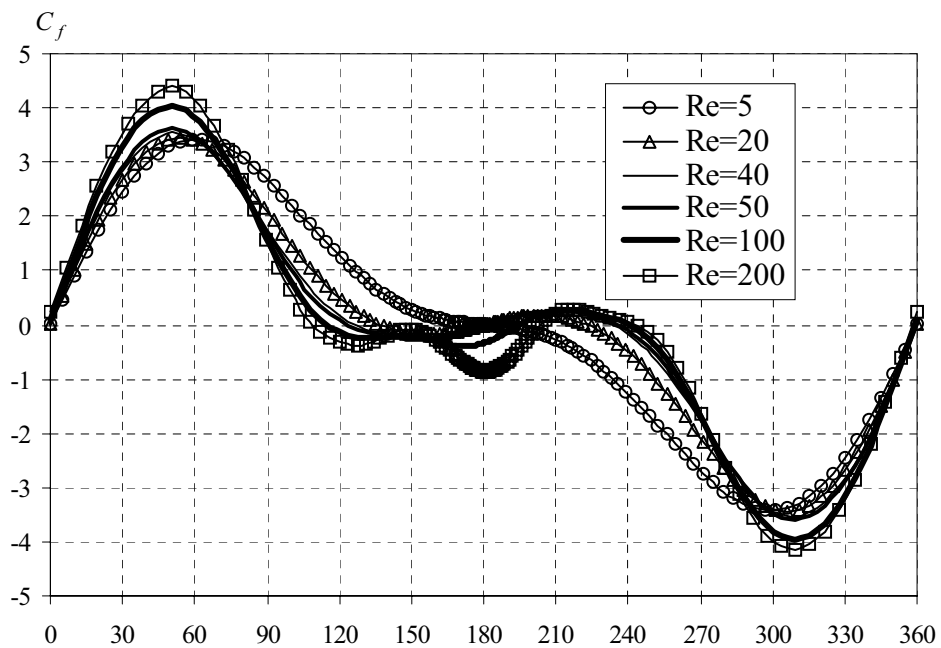
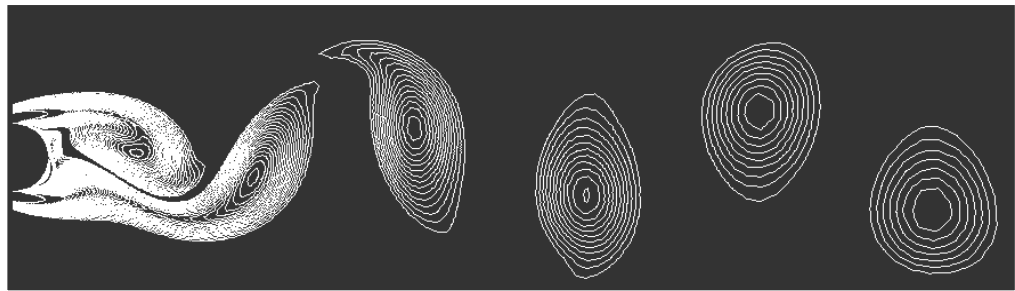


Рис. 3. Распределение коэффициента трения  $C_f$  по поверхности кругового цилиндра в зависимости от чисел Рейнольдса



а)



б)

Рис. 4. Вихревая структура дорожки Кармана ( $Re = 140$ )  
 а) – эксперимент, фотография из альбома Ван-Дайка [9]  
 б) – численный расчет настоящей работы

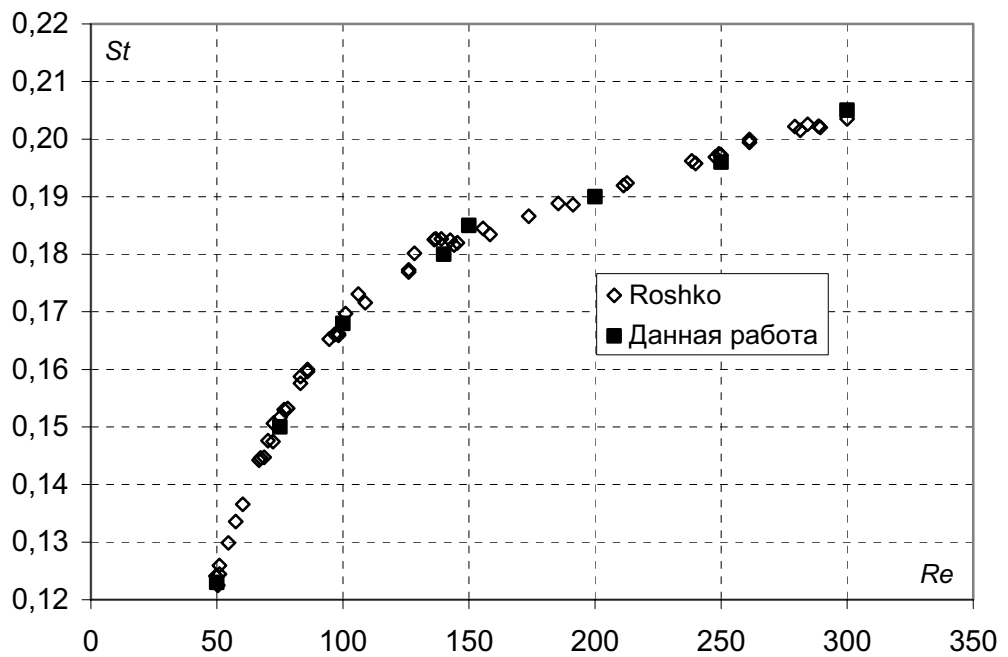


Рис. 5. Зависимость числа Струхала от числа Рейнльда. Сравнение данных настоящей работы с экспериментальными данными Roshko [10]



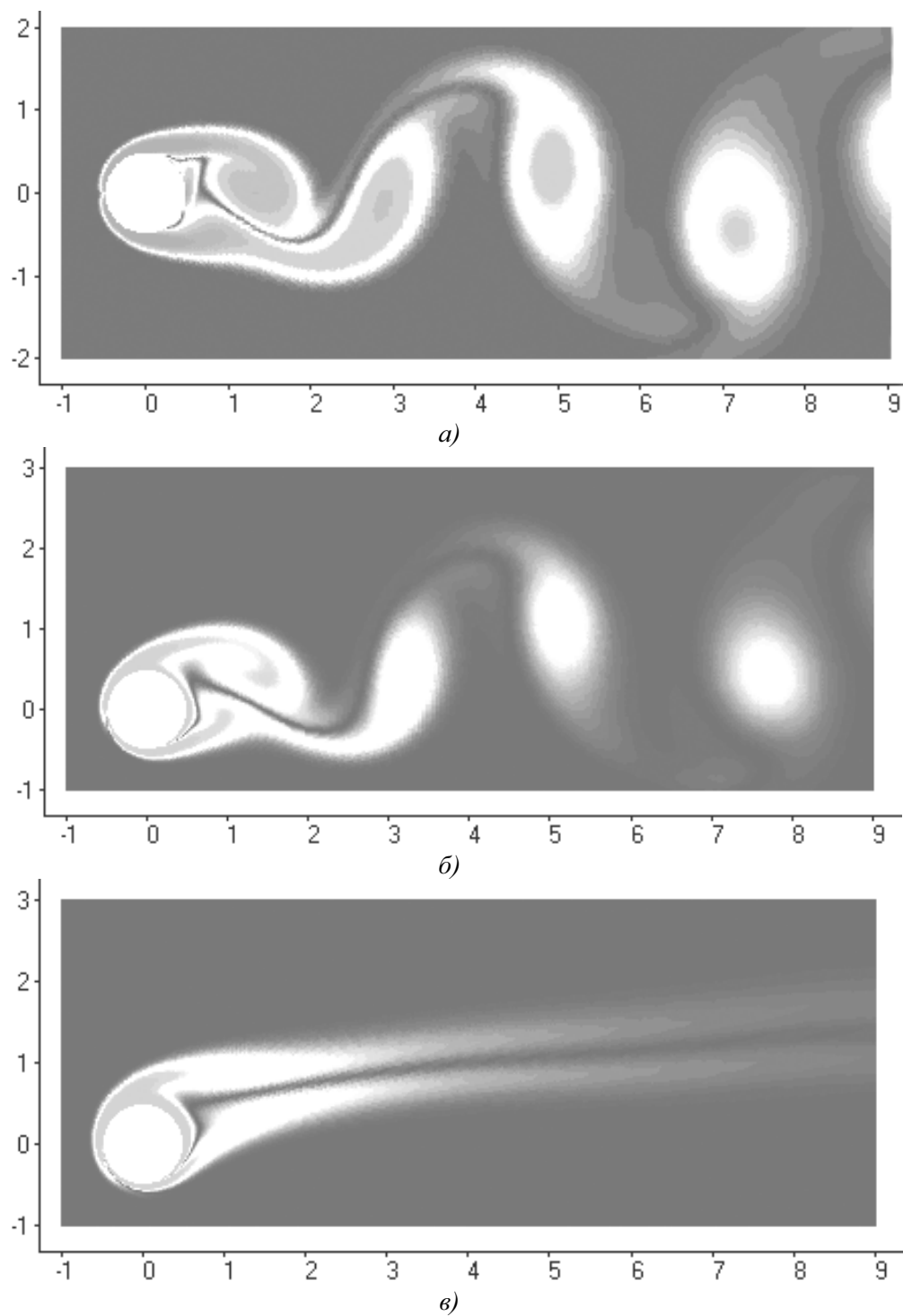


Рис. 6. Контуры завихренности при обтекании цилиндра ( $Re = 200$ ) в зависимости от линейной скорости вращения: а –  $\alpha = 0$ , б –  $\alpha = 1$ , в –  $\alpha = 2$

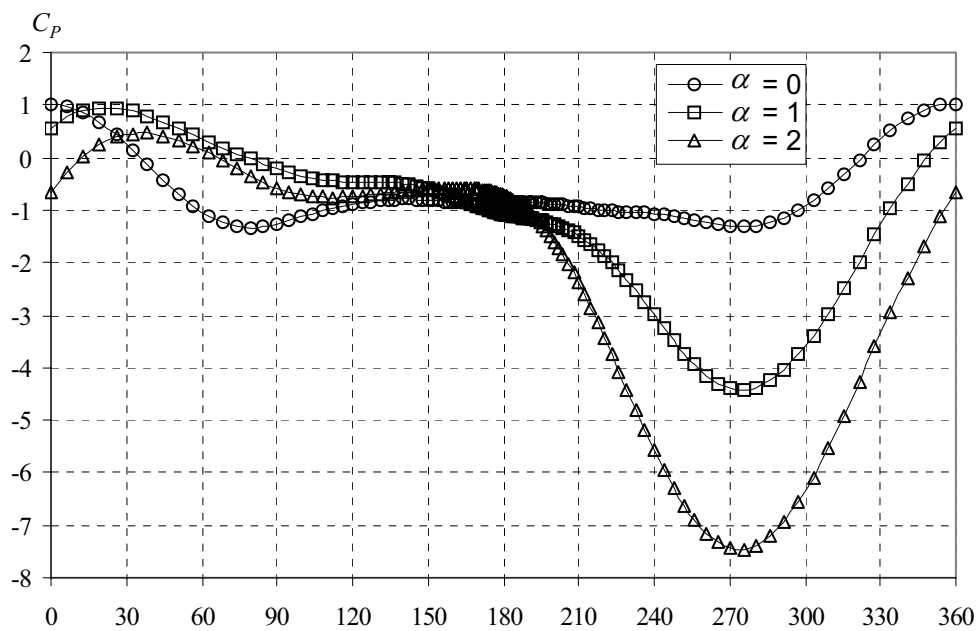


Рис. 7. Распределение коэффициента давления  $C_p$  по поверхности кругового цилиндра ( $Re=200$ ) в зависимости от линейной скорости вращения

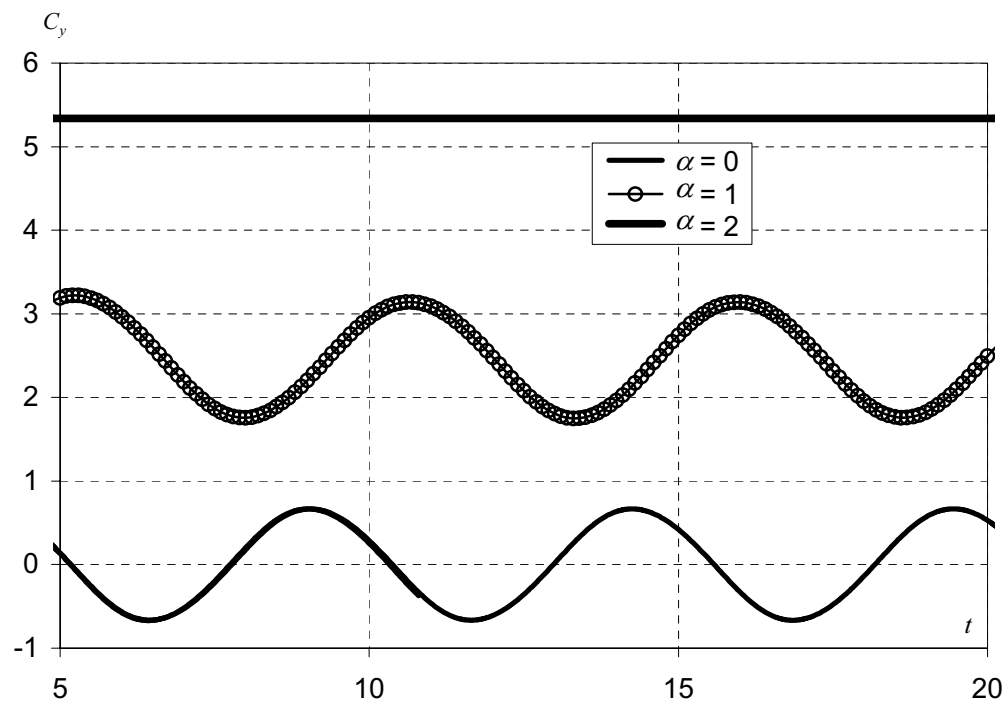


Рис. 8. Зависимость коэффициента подъемной силы  $C_y$  для кругового цилиндра ( $Re=200$ ) в зависимости от линейной скорости вращения

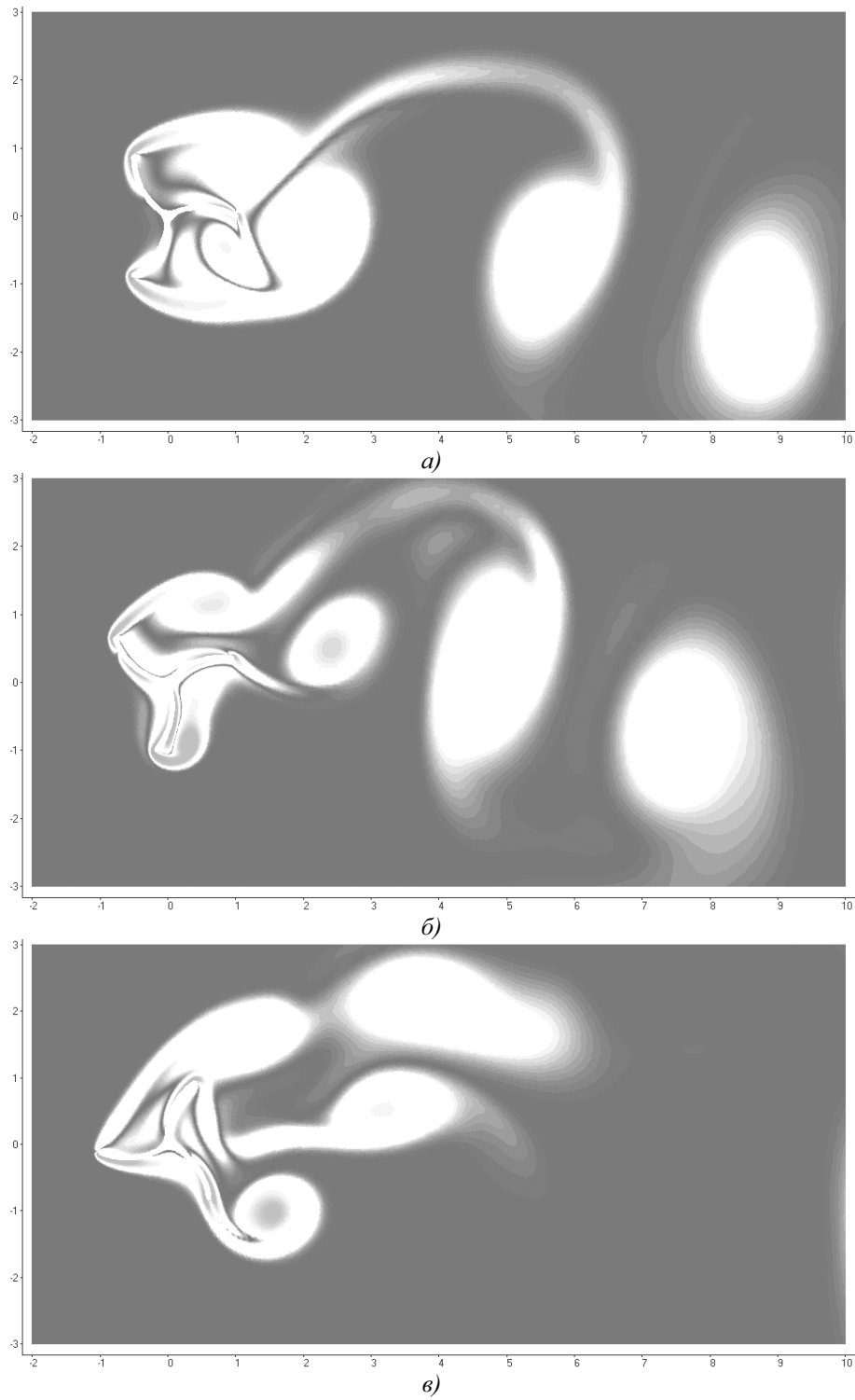


Рис. 9. Контуры завихренности вокруг ротора Савониуса:  
а – неврещающийся, б, в – вращающийся

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // *J. Comput. Phys.* – 1967. – V.2. – P. 12–26.
2. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations // *AIAA J.* – 1990. – Vol. 28, № 2. – P. 253 – 262.
3. Roe P.L. Approximate riemann schemes // *Journal of Computational Physics.* – 1981. – V. 43. – P. 357 – 372.
4. Rai M.M. Navier-Stokes simulation of blade-vortex interaction using high-order accurate upwind schemes // *AIAA Paper.* – 1987. – Vol. 43, № 5. –P. 153 – 166.
5. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // *Journal Numerical Mathematics.* – 1991. – Vol. 8. – P. 43 – 64.
6. Приходько А.А., Редчиц Д.А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // *Прикладная гидромеханика.* – 2005. Т. 7, № 1.-С. 56-71.
7. Приходько А.А., Сохацкий А.В. Математическое и экспериментальное моделирование аэродинамики элементов транспортных систем вблизи экрана. – Днепропетровск: Наука и образование, 1998. – 160 с.
8. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене. Киев.: Наукова думка, 2003. – 240 с.
9. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир. 1986. – 184с.
10. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // *NACA Rep.* 1191, 1954. –P. 32 – 65.
11. Taneda S. Visual observations of the flow past a circular cylinder performing a rotary oscillation // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1978. – Vol. 45, № 5. –P. 1038 – 1053.
12. Tokumaru P.T., Dimotakis P.E. Rotary oscillation control of a cylinder wake // *J. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 77, № 6. –P. 108 – 155.
13. Filler J.R., Marston P.L., Mih W. C. Response of the shear layers separating from a circular cylinder to small-amplitude rotational oscillations // *J. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 78, № 7. –P. 481 – 496.
14. Wu J.M., Mo J.D., Vakili A.D. On the wake of cylinder with rotational oscillations // *AIAA Paper.* – 1989. – Vol. 10, № 2. –P. 1024 – 1043.
15. Baek S., Sung H.J. Numerical simulation of the flow behind a rotary oscillating circular cylinder // *Phys. Fluids.* – 1998. – Vol. 10, № 4. –P. 869 – 893.
16. Редчиц Д. А., Приходько А. А. Численное решение связанной задачи динамики и аэродинамики ротора ветроагрегатов // *Космическая наука и технология*, 2005. Т. 11, № 1.-С. 27-35.